Nuova biblioteca di cultura

Collana diretta da Ignazio Ambrogio

Serie scientifica
a cura di Carlo Bernardini

Lev D. Landau Evgenij M. Lifšits

Fisica teorica 8

Editori Riuniti Edizioni Mir

Evgenij M. Lifšits Lev P. Pitaevskij

Elettrodinamica dei mezzi continui

Editori Riuniti Edizioni Mir

I edizione: 1986
Titolo originale: *Elektrodinamika splošnych sred*
© by Nauka, Mosca, 1982
Traduzione dal russo di A. Machov
© by Edizioni Mir, Mosca, 1986
© dy Editori Riuniti, 1986
Via Serchio 9/11-00198 Roma

Indice

Prefazione alla seconda edizione 9
Prefazione alla prima edizione 10
Alcune notazioni 11

CAPITOLO I. ELETTROSTATICA DEI CONDUTTORI

§ 1. *Campo elettrostatico dei conduttori* 12
§ 2. *Energia del campo elettrostatico dei conduttori* 15
§ 3. *Metodi di soluzione dei problemi elettrostatici* 22
§ 4. *Ellissoide conduttore* 37
§ 5. *Forze agenti su un conduttore* 50

CAPITOLO II. ELETTROSTATICA DEI DIELETTRICI

§ 6. *Campo elettrostatico nei dielettrici* 58
§ 7. *Permettività dielettrica* 60
§ 8. *Ellissoide dielettrico* 65
§ 9. *Permettività dielettrica di una miscela* 70
§ 10. *Relazioni termodinamiche per dielettrici in un campo elettrico* 72
§ 11. *Energia libera totale di un corpo dielettrico* 78
§ 12. *Elettrostrizione dei dielettrici isotropi* 82
§ 13. *Proprietà dielettriche dei cristalli* 86
§ 14. *Positività della suscettività dielettrica* 92
§ 15. *Forze elettriche in un dielettrico liquido* 95
§ 16. *Forze elettriche nei solidi* 101
§ 17. *Corpi piezoelettrici* 107
§ 18. *Disuguaglianze termodinamiche* 117
§ 19. *Corpi ferroelettrici* 122
§ 20. *Corpi ferroelettrici impropri* 131

CAPITOLO III. CORRENTE CONTINUA

§ 21. *Densità di corrente e conducibilità* 135
§ 22. *Effetto Hall* 140
§ 23. *Differenza di potenziale di contatto* 143
§ 24. *Elemento galvanico* 146
§ 25. *Elettrocapillarità* 148
§ 26. *Fenomeni termoelettrici* 150

§ 27. *Fenomeni termogalvanomagnetici* 155
§ 28. *Fenomeni di diffusione elettrica* 156

CAPITOLO IV. CAMPO MAGNETICO COSTANTE

§ 29. *Campo magnetico costante* 161
§ 30. *Campo magnetico di correnti continue* 165
§ 31. *Relazioni termodinamiche in un campo magnetico* 174
§ 32. *Energia libera totale di un corpo magnetico* 176
§ 33. *Energia di un sistema di correnti* 179
§ 34. *Autoinduzione dei conduttori lineari* 185
§ 35. *Forze in un campo magnetico* 192
§ 36. *Fenomeni giromagnetici* 196

CAPITOLO V. FERROMAGNETISMO E ANTIFERROMAGNETISMO

§ 37. *Simmetria magnetica dei cristalli* 198
§ 38. *Classi magnetiche e gruppi spaziali* 202
§ 39. *Corpo ferromagnetico in prossimità del punto di Curie* 206
§ 40. *Energia di anisotropia magnetica* 210
§ 41. *Curva di magnetizzazione dei corpi ferromagnetici* 214
§ 42. *Magnetostrizione dei corpi ferromagnetici* 219
§ 43. *Tensione superficiale della parete di dominio* 223
§ 44. *Struttura a dominî dei corpi ferromagnetici* 232
§ 45. *Particelle a un dominio* 237
§ 46. *Transizioni di orientazione* 240
§ 47. *Fluttuazioni in un corpo ferromagnetico* 243
§ 48. *Corpo antiferromagnetico in prossimità del punto di Curie* 249
§ 49. *Punto bicritico di un corpo antiferromagnetico* 254
§ 50. *Ferromagnetismo debole* 257
§ 51. *Piezomagnetismo ed effetto magnetoelettrico* 262
§ 52. *Struttura magnetica elicoidale* 265

CAPITOLO VI. SUPERCONDUTTIVITÀ

§ 53. *Proprietà magnetiche dei superconduttori* 268
§ 54. *Corrente superconduttrice* 271
§ 55. *Campo critico* 276
§ 56. *Stato intermedio* 282
§ 57. *Struttura dello stato intermedio* 287

CAPITOLO VII. CAMPO ELETTROMAGNETICO QUASI-STAZIONARIO

§ 58. *Equazioni del campo quasi-stazionario* 293
§ 59. *Profondità di penetrazione del campo magnetico in un conduttore* 297
§ 60. *Effetto skin* 307
§ 61. *Resistenza complessa* 309
§ 62. *Capacità nel circuito di una corrente quasi-stazionaria* 315

§ 63. *Moto di un conduttore in un campo magnetico* 320
§ 64. *Eccitazione della corrente per accelerazione* 326

CAPITOLO VIII. IDRODINAMICA MAGNETICA

§ 65. *Equazioni del moto di un fluido in un campo magnetico* 330
§ 66. *Processi dissipativi nell'idrodinamica magnetica* 334
§ 67. *Flusso magnetoidrodinamico tra piani paralleli* 338
§ 68. *Configurazioni di equilibrio* 340
§ 69. *Onde magnetoidrodinamiche* 345
§ 70. *Condizioni nei punti di discontinuità* 351
§ 71. *Discontinuità tangenziali e rotatorie* 352
§ 72. *Onde d'urto* 358
§ 73. *Condizione di evoluzione delle onde d'urto* 362
§ 74. *Dinamica turbolenta* 370

CAPITOLO IX. EQUAZIONI DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 75. *Equazioni del campo in dielettrici senza dispersione* 377
§ 76. *Elettrodinamica dei dielettrici in moto* 382
§ 77. *Dispersione della permettività dielettrica* 388
§ 78. *Permettività dielettrica per frequenze molto grandi* 392
§ 79. *Dispersione della permeabilità magnetica* 393
§ 80. *Energia del campo nei mezzi dispersivi* 400
§ 81. *Tensore degli sforzi nei mezzi dispersivi* 405
§ 82. *Proprietà analitiche della funzione* $\varepsilon(\omega)$ 409
§ 83. *Onda monocromatica piana* 415
§ 84. *Mezzi trasparenti* 420

CAPITOLO X. PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 85. *Ottica geometrica* 424
§ 86. *Riflessione e rifrazione delle onde* 428
§ 87. *Impedenza superficiale dei metalli* 437
§ 88. *Propagazione delle onde in un mezzo non omogeneo* 444
§ 89. *Principio di reciprocità* 449
§ 90. *Oscillazioni elettromagnetiche nelle cavità risonanti* 452
§ 91. *Propagazione delle onde elettromagnetiche nelle guide d'onda* . . . 458
§ 92. *Diffusione delle onde elettromagnetiche su particelle di piccole dimensioni* 466
§ 93. *Assorbimento delle onde elettromagnetiche su particelle di piccole dimensioni* 470
§ 94. *Diffrazione su un cuneo* 472
§ 95. *Diffrazione su uno schermo piano* 476

CAPITOLO XI. ONDE ELETTROMAGNETICHE IN MEZZI ANISOTROPI

§ 96. *Permettività dielettrica dei cristalli* 482
§ 97. *Onda piana in un mezzo anisotropo* 484

§ 98. *Proprietà ottiche dei cristalli uniassici* 491
§ 99. *Cristalli biassici* 495
§ 100. *Birifrangenza in un campo elettrico* 501
§ 101. *Effetti magneto-ottici* 502
§ 102. *Effetti dinamo-ottici* 512

CAPITOLO XII. DISPERSIONE SPAZIALE

§ 103. *Dispersione spaziale* 517
§ 104. *Attività ottica naturale* 523
§ 105. *Dispersione spaziale in mezzi otticamente inattivi* 528
§ 106. *Dispersione spaziale in prossimità della linea di assorbimento* . . 530

CAPITOLO XIII. OTTICA NON LINEARE

§ 107. *Trasformazione delle frequenze nei mezzi non lineari* 535
§ 108. *Permettività non lineare* 538
§ 109. *Autofocalizzazione* 543
§ 110. *Generazione della seconda armonica* 551
§ 111. *Onde elettromagnetiche forti* 557
§ 112. *Diffusione combinatoria forzata* 562

CAPITOLO XIV. PASSAGGIO DELLE PARTICELLE VELOCI ATTRAVERSO LA MATERIA

§ 113. *Perdite per ionizzazione di particelle veloci nella materia. Caso non relativistico* 565
§ 114. *Perdite per ionizzazione di particelle veloci nella materia. Caso relativistico* 572
§ 115. *Radiazione Čerenkov* 581
§ 116. *Radiazione di transizione* 584

CAPITOLO XV. DIFFUSIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 117. *Teoria generale della diffusione nei mezzi isotropi* 591
§ 118. *Principio del bilancio dettagliato per la diffusione* 600
§ 119. *Diffusione a piccola variazione di frequenza* 604
§ 120. *Diffusione di Rayleigh in gas e fluidi* 613
§ 121. *Opalescenza critica* 620
§ 122. *Diffusione nei cristalli liquidi* 623
§ 123. *Diffusione nei corpi solidi amorfi* 624

CAPITOLO XVI. DIFFRAZIONE DEI RAGGI X NEI CRISTALLI

§ 124. *Teoria generale della diffrazione dei raggi X* 628
§ 125. *Intensità integrale* 636
§ 126. *Diffusione termica diffusa dei raggi X* 640
§ 127. *Dipendenza della sezione di diffrazione dalla temperatura* 643

Appendice. Coordinate curvilinee 647
Indice analitico 649

Prefazione alla seconda edizione

Dalla prima edizione di questo volume sono ormai passati venticinque anni. È naturale che un periodo di tempo così lungo abbia imposto per la seconda edizione un ampliamento e una notevole rielaborazione del testo.

La scelta del materiale era stata fatta in origine secondo criteri che lo mettessero al riparo dai rischi dell'invecchiamento e, salvo qualche eccezione, lo scopo è stato raggiunto.

Il libro è stato comunque arricchito di materiale nuovo, specie per quel che riguarda la teoria delle proprietà magnetiche della materia e la teoria dei fenomeni ottici. Abbiamo anche aggiunto nuovi capitoli sulla dispersione spaziale e sull'ottica lineare. Segnaliamo invece l'esclusione del capitolo sulle fluttuazioni elettromagnetiche perché, con le debite modifiche, è stato incluso nel IX volume del Corso.

Un inestimabile aiuto per la rielaborazione di questo e di altri volumi del Corso *ci è stato dato da molti colleghi, troppo numerosi per poterli qui elencare al completo. A tutti vada il nostro sincero ringraziamento, che vogliamo estendere in particolare a V. L. Ginsburg, B. J. Zeldovič e V. P. Krajnov, prodighi di preziose osservazioni. Un grazie speciale anche a A. F. Andreiev, I. E. Dzjaloŝinskij e I. M. Lifŝits che hanno costantemente offerto la possibilità di discutere con loro i problemi che insorgevano nel corso dell'elaborazione del testo. Verso S. I. Vainŝtein o R. V. Polovin ci sentiamo particolarmente debitori per il contributo prestato alla rielaborazione del capitolo sulla idrodinamica magnetica.*

Ringraziamo, infine, A. S. Borovik-Romanov, V. I. Grigoriev e M. I. Kaganov per la lettura del manoscritto e le loro utili osservazioni.

E. M. Lifŝits, L. P. Pitaevskij

Luglio 1981

Prefazione alla prima edizione

Il presente volume del Corso di Fisica teorica *è dedicato alla teoria dei campi elettromagnetici nei mezzi materiali e alla teoria delle proprietà macroscopiche, elettriche e magnetiche, della materia. La materia, come si vede dall'indice, include una cerchia assai vasta di problemi.*

Nello scrivere il libro abbiamo incontrato difficoltà notevoli dovute alla necessità di operare una scelta tra l'enorme materiale esistente e al fatto che l'esposizione usuale di numerose questioni qui trattate non è spesso chiara dal punto di vista fisico e talvolta contiene anche errori. Ci rendiamo conto che l'esposizione proposta ha ancora molti difetti che speriamo correggere nelle prossime edizioni del libro.

Siamo grati al prof. V. L. Ginsburg che ha letto il manoscritto e fatto alcune osservazioni utili. Siamo anche grati a I. E. Dzjalošinskij e L. P. Pitaevskij per il grande aiuto dato nella correzione delle bozze.

L. D. Landau, E. M. Lifšits

Mosca, ottobre 1956

Alcune notazioni

Intensità e induzione del campo elettrico: **E** e **D**.
Intensità e induzione del campo magnetico: **H** e **B**.
Intensità dei campi elettrico e magnetico esterni: vettori $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$; valori assoluti $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$.
Polarizzazione dielettrica: **P**.
Magnetizzazione: **M**.
Momenti elettrico e magnetico totali di un corpo: $\mathscr{P}$ e $\mathscr{M}$.
Permettività dielettrica: ε.
Suscettività dielettrica: $\varkappa$.
Permeabilità magnetica: μ.
Suscettività magnetica: χ.
Densità di corrente: **j**.
Conducibilità: σ.
Temperatura assoluta (in unità energetiche): T.
Pressione: P.
Volume: V.
Grandezze termodinamiche riferite all'unità di volume:
entropia S,
energia interna U,
energia libera F,
potenziale termodinamico Φ.
Le stesse grandezze per un corpo in totale: $\mathscr{S}$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{Φ}$.
Potenziale chimico: ζ.
Il fattore complesso periodico (rispetto al tempo) è considerato ovunque nella forma $e^{-i\omega t}$.
Elemento di volume: dV o d^3x; elemento di superficie: $d\mathbf{f}$.
Ovunque si usa la regola di sommatoria estesa agli indici vettoriali e tensoriali ripetuti due volte, tridimensionali (lettere dell'alfabeto latine) e bidimensionali (lettere dell'alfabeto greche).
I rimandi ai paragrafi e alle formule degli altri volumi di questo Corso sono indicati mediante cifre romane: I (Meccanica, 1975); II (Teoria dei campi, 1975); III (Meccanica quantistica, 1976); IV (Teoria quantistica relativistica, 1977); V (Fisica statistica, parte 1, 1978); VI (Meccanica dei mezzi continui, in via di pubblicazione); VII (Teoria dell'elasticità, 1978); IX (Fisica statistica, parte 2, 1981); X (Fisica cinetica, 1984).

Capitolo I

ELETTROSTATICA DEI CONDUTTORI

§ 1. *Campo elettrostatico dei conduttori*

L'elettrodinamica macroscopica ha come oggetto lo studio dei campi elettromagnetici nello spazio riempito dalla materia. Come qualsiasi altra teoria macroscopica l'elettrodinamica fa uso di grandezze fisiche le cui media sono calcolate rispetto ad elementi di volume « fisicamente infinitesimi » senza tenere conto delle fluttuazioni microscopiche di queste grandezze dovute alla struttura molecolare della materia. Così, al posto di un vero e proprio valore « microscopico » dell'intensità **e** di un campo elettrico ne considereremo la media indicandola nel seguente modo:

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \tag{1,1}$$

Le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica dei mezzi continui si ottengono mediante le equazioni medie del campo elettromagnetico nel vuoto. Questo passaggio dalle equazioni microscopiche a quelle macroscopiche è stato attuato originariamente da *H. A. Lorentz* (nel 1902).

La forma delle equazioni dell'elettrodinamica macroscopica e il significato delle grandezze che figurano in esse dipendono notevolmente dalla natura fisica del mezzo materiale e dal carattere della variazione del campo con il tempo. Perciò è opportuno dedurre e studiare queste equazioni separatamente per ogni categoria di oggetti fisici.

Come è noto, in relazione alle proprietà elettriche tutti i corpi si dividono in due categorie: *conduttori* e *dielettrici*; fra l'altro, i primi differiscono dai secondi per il fatto che ogni campo elettrico suscita in essi il moto di cariche, ossia una corrente elettrica [1]).

Cominciamo dallo studio dei campi elettrici costanti generati da conduttori carichi (*elettrostatica* dei conduttori). Dalla proprietà fondamentale dei conduttori segue soprattutto che nel caso elettrostatico l'intensità del campo elettrico al loro interno deve essere nulla. Infatti, un'intensità **E** diversa da zero condurrebbe alla produzione di corrente; fra l'altro, la propagazione di corrente nel

[1]) Il conduttore è supposto qui omogeneo (per sua composizione, temperatura ecc.). In un conduttore non omogeneo, come vedremo nel seguito, possono esistere dei campi che non generano il moto delle cariche.

conduttore è legata alla dissipazione di energia e perciò non può mantenersi di per sé (senza sorgenti di energia esterne) stazionaria.

Ne segue, a sua volta, che tutte le cariche in un conduttore debbono essere distribuite sulla sua superficie: la presenza di cariche nel volume interno del conduttore implicherebbe la produzione in esso di un campo elettrico [1]); la distribuzione delle cariche sulla superficie può essere realizzata in modo tale da compensare reciprocamente i campi generati da esse all'interno del conduttore.

Con ciò il problema dell'elettrostatica dei conduttori si riduce alla determinazione di un campo elettrico nel vuoto, al di fuori dei conduttori, e alla determinazione della distribuzione delle cariche sulla loro superficie.

Nei punti non troppo vicini alla superficie del corpo il campo medio **E** nel vuoto coincide di fatto con il campo vero e proprio **e**. Queste due grandezze differiscono l'una dall'altra nella vicinanza immediata del corpo dove ancora è forte l'influenza dei campi molecolari irregolari. L'ultima circostanza, tuttavia, non incide sulla forma delle equazioni del campo medio. Le equazioni microscopiche di Maxwell esatte nel vuoto sono

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 0, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \tag{1,3}$$

(**h** è l'intensità microscopica del campo magnetico). Poiché il campo magnetico medio è supposto assente, la derivata $\partial \mathbf{h}/\partial t$ dopo il calcolo della media si annulla anch'essa e otteniamo così che il campo elettrico costante nel vuoto verifica le equazioni ordinarie

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{1,4}$$

vale a dire che è un campo derivante da un potenziale φ legato all'intensità mediante la relazione

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{1,5}$$

e soddisfacente all'equazione di Laplace

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1,6}$$

Le condizioni al contorno per il campo **E** sulla superficie del conduttore seguono dall'equazione stessa $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ che è valida (così come l'equazione iniziale (1,3)) all'esterno e all'interno del corpo. Consideriamo l'asse z coincidente con la direzione della normale **n** alla superficie del conduttore in un punto. La componente E_z del campo nella vicinanza immediata alla superficie del corpo assume valori molto grandi (la differenza di potenziale è qui finita a distanze molto piccole). Questo grande campo rappresenta una proprietà

[1]) Ciò si vede con chiarezza dell'equazione (1,8) data più avanti.

della superficie stessa e dipende dalle sue caratteristiche fisiche, ma non ha niente a che fare con il problema elettrostatico in questione poiché decresce rapidamente già a distanze comparabili con quelle atomiche. È importante, tuttavia, che se la superficie è omogenea, le derivate $\partial E_z/\partial x$, $\partial E_z/\partial y$ restano finite lungo la superficie malgrado la componente stessa E_z diventi infinita. Perciò dalla

$$(\mathrm{rot}\ \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

segue che $\partial E_y/\partial z$ è finita. Ciò vuol dire che E_y è continua sulla superficie (poiché una discontinuità di E_y significherebbe che la derivata $\partial E_y/\partial z$ diventa infinita). Lo stesso si può dire della componente E_x, e poiché all'interno del conduttore, in generale, $\mathbf{E} = 0$, possiamo concludere che le componenti tangenti del campo esterno devono essere nulle sulla sua superficie:

$$\mathbf{E}_t = 0. \tag{1,7}$$

In tal modo, il campo elettrostatico deve essere normale alla superficie del conduttore in ogni suo punto. Poiché $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ \varphi$, ciò significa che il potenziale del campo deve essere costante lungo tutta la superficie del conduttore in esame. In altre parole, la superficie di un conduttore omogeneo è una superficie equipotenziale del campo elettrostatico.

Quanto alla componente del campo normale alla superficie, essa è legata in modo semplice alla densità della carica distribuita sulla superficie. Questo legame si ottiene dall'equazione generale dell'elettrostatica div $\mathbf{e} = 4\pi\rho$ che dopo il calcolo della media diventa

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}, \tag{1,8}$$

dove $\bar{\rho}$ è la densità di carica media. Nella forma integrale questa equazione significa, come è noto, che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla carica totale contenuta nel volume delimitato da questa superficie (moltiplicata per 4π). Applicando questo teorema all'elemento di volume compreso tra due aree unitarie infinitamente vicine adiacenti da ambo le parti alla superficie del conduttore e tenendo conto che sull'area interna $\mathbf{E} = 0$, troviamo che $E_n = 4\pi\sigma$ dove σ è la densità superficiale di carica, cioè la carica per unità di superficie del conduttore. In tal modo, la distribuzione delle cariche sulla superficie del conduttore è data dalla formula

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{1,9}$$

(la derivata del potenziale è calcolata nella direzione della normale esterna **n** alla superficie). La carica totale del conduttore è

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} df, \tag{1,10}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie.

La distribuzione del potenziale in ogni campo elettrostatico gode della seguente notevole proprietà: la funzione $\varphi(x, y, z)$ può assumere il suo valore massimo o minimo soltanto sulle frontiere del dominio del campo. Questo teorema si può formulare come proposizione sull'impossibilità di equilibrio stabile di una carica-prova e portata nel campo poiché non esiste punto in cui la sua energia potenziale $e\varphi$ abbia minimo.

La dimostrazione del teorema è molto semplice. Supponiamo, ad esempio, che in un punto A (che non si trovi sulla frontiera del campo) il potenziale abbia un massimo. Allora si può circondare A con una piccola superficie chiusa sulla quale ovunque la derivata lungo la normale $\partial\varphi/\partial n < 0$. Quindi, anche l'integrale esteso a questa superficie $\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df < 0$. Ma in virtù dell'equazione di Laplace, si ha

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \Delta\varphi dV = 0,$$

questo contraddice l'ipotesi.

§ 2. *Energia del campo elettrostatico dei conduttori*

Calcoliamo l'energia totale $\mathcal{U}$ del campo elettrostatico dei conduttori carichi [1]):

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}^2 dV, \tag{2,1}$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume dello spazio all'esterno dei conduttori. Trasformiamo questo integrale nel seguente modo:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \mathbf{E}) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Il secondo integrale si annulla in virtù della (1,4) e il primo si trasforma nell'integrale esteso alle superficie dei conduttori che delimitano il campo e ad una superficie infinitamente lontana. Ma que-

[1]) Il quadrato $\mathbf{E}^2$ non coincide con la media quadratica $\overline{\mathbf{e}^2}$ del campo vero e proprio in prossimità della superficie conduttrice e anche nel volume di quest'ultima (dove $\mathbf{E} = 0$, ma, si intende, ovviamente, che $\overline{\mathbf{e}^2} \neq 0$). Calcolando l'integrale (2,1) omettiamo l'energia interna del conduttore come tale, la quale qui non presenta interesse, e dall'energia di parentela delle cariche nei confronti della sua superficie.

st'ultimo integrale si annulla poichè il campo decresce in modo sufficientemente rapido all'infinito (la costante arbitraria in φ è supposta tale che $\varphi = 0$ all'infinito). Numerando i conduttori con l'indice a e indicando con φ_a valori costanti del potenziale lungo ciascuno dei conduttori, otteniamo [1])

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \sum_a \oint \varphi E_n df = \frac{1}{8\pi} \sum_a \varphi_a \oint E_n df.$$

Infine, introducendo le cariche totali e_a dei conduttori secondo la formula (1,10), otteniamo l'espressione definitiva

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi_a, \tag{2,2}$$

analoga a quella per l'energia di un sistema di cariche puntiformi.

Le cariche e i potenziali dei conduttori non possono essere assegnati contemporaneamente in modo arbitrario; esiste tra essi una determinata relazione. In virtù della linearità e dell'omogeneità delle equazioni del campo nel vuoto questa relazione deve essere anch'essa lineare, cioè espressa mediante equazioni della forma

$$e_a = \sum_b C_{ab} \varphi_b, \tag{2,3}$$

dove le grandezze C_{aa}, C_{ab} hanno le dimensioni di lunghezza e dipendono dalla forma e dalla disposizione reciproca dei conduttori. Le grandezze C_{aa} si chiamano *coefficienti di capacità*, e le grandezze C_{ab} $(a \neq b)$ *coefficienti di induzione elettrostatica*. In particolare, se esiste un solo conduttore, allora $e = C\varphi$ dove C è la capacità; l'ordine di grandezza della capacità coincide con le dimensioni lineari del corpo. Le espressioni inverse per i potenziali in funzione delle cariche sono:

$$\varphi_a = \sum_b C_{ab}^{-1} e_b \tag{2,4}$$

dove i coefficienti C_{ab}^{-1} costituiscono la matrice inversa di quella costituita dai coefficienti C_{ab}.

Calcoliamo la variazione dell'energia di un sistema di conduttori rispetto ad una variazione infinitesima delle loro cariche o dei potenziali. Variando l'espressione iniziale (2,1) otteniamo

$$\delta\mathcal{U} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\, \delta\mathbf{E}\, dV.$$

[1]) Nella trasformazione dell'integrale di volume in quello di superficie qui e più avanti si deve tener conto che E_n è la componente del campo lungo la direzione della normale esterna nei confronti del conduttore; questa direzione è opposta alla direzione della normale esterna al dominio dell'integrazione volumetrica, cioè allo spazio all'esterno dei conduttori. Ciò premesso, nella trasformazione l'integrale ha cambiato di segno.

Questa espressione si può trasformare in seguito con due modi equivalenti. Sostituendovi $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$ e tenendo conto che il campo variato così come quello iniziale, verifica le equazioni (1,4) (in modo che $\text{div}\,\delta\mathbf{E} = 0$), scriviamo

$$\delta\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \text{grad}\,\varphi\cdot\delta\mathbf{E}\,dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int \text{div}\,(\varphi\,\delta\mathbf{E})\,dV = \frac{1}{4\pi}\sum_a \varphi_a \oint \delta E_n\,df,$$

e infine

$$\delta\mathcal{U} = \sum_a \varphi_a \delta e_a, \tag{2,5}$$

cioè otteniamo la variazione dell'energia espressa in funzione della variazione delle cariche. Questo risultato, fra l'altro, è evidentemente a priori come il lavoro da compiere sulle cariche infinitesime δe_a per portarle ai conduttori assegnati dall'infinito dove il potenziale del campo è nullo.

D'altra parte, si può scrivere

$$\delta\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,\text{grad}\,\delta\varphi\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int \text{div}\,(\mathbf{E}\,\delta\varphi)\,dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_a \delta\varphi_a \oint E_n df,$$

ossia

$$\delta\mathcal{U} = \sum_a e_a \delta\varphi_a, \tag{2,6}$$

vale a dire che la variazione dell'energia è espressa in funzione della variazione dei potenziali dei conduttori.

Le formule (2,5) e (2,6) mostrano che, derivando l'energia $\mathcal{U}$ rispetto alle grandezze delle cariche, otteniamo i potenziali dei conduttori, mentre le derivate di $\mathcal{U}$ rispetto ai potenziali danno valori delle cariche

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial e_a} = \varphi_a, \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\varphi_a} = e_a. \tag{2,7}$$

D'altra parte, i potenziali e le cariche sono funzioni lineari gli uni degli altri. Mediante la (2,3) abbiamo

$$\frac{\partial^2\mathcal{U}}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b} = \frac{\partial e_b}{\partial\varphi_a} = C_{ba},$$

e invertendo l'ordine di derivazione, avremmo C_{ab}. Ne segue che

$$C_{ab} = C_{ba} \tag{2,8}$$

(e, analogamente, $C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$). L'energia $\mathcal{U}$ può essere rappresentata come forma quadratica dei potenziali o delle cariche:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{a,\,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b = \frac{1}{2} \sum_{a,\,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b. \tag{2,9}$$

Questa forma quadratica, così come l'espressione iniziale (2,1), deve essere necessariamente positiva. Da questa condizione derivano alcune diseguaglianze cui devono soddisfare i coefficienti C_{ab}. In particolare, tutti i coefficienti di capacità sono positivi:

$$C_{aa} > 0 \tag{2,10}$$

(così come $C_{aa}^{-1} > 0$) [1].

Viceversa, tutti i coefficienti di induzione elettrostatica sono negativi:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b). \tag{2,11}$$

Questa circostanza è evidente dalle semplici considerazioni seguenti. Supponiamo che tutti i conduttori, ad eccezione di uno (l'a-esimo), siano collegati a terra, cioè che i loro potenziali siano nulli. Allora la carica indotta dal conduttore carico (l'a-esimo) su un conduttore b vale $e_b = C_{ba}\varphi_a$. Il segno della carica indotta è opposto a quello del potenziale di induzione, e perciò $C_{ab} < 0$. Ciò si può provare partendo dal fatto che il potenziale del campo elettrostatico non può avere massimi o minimi al di fuori dei conduttori. Supponiamo, ad esempio, che il potenziale dell'unico conduttore non collegato a terra sia $\varphi_a > 0$. Allora il potenziale sarà positivo anche in tutto lo spazio e il suo minimo (zero) si ottiene soltanto sui conduttori collegati a terra. Ne segue che sulla superficie di questi ultimi la derivata normale del potenziale $\partial\varphi/\partial n$ sarà positiva e la loro carica, secondo l'(1,10) negativa.

Mediante considerazioni analoghe si può provare che $C_{ab}^{-1} > 0$.

L'energia del campo elettrostatico dei conduttori gode della proprietà estremale la quale, per la verità, è di carattere non tanto fisico quanto formale. Per la deduzione di questa proprietà supponiamo che la distribuzione delle cariche nei conduttori sia soggetta a una variazione infinitesima (rimanendo costante la carica totale di ciascun conduttore) così che le cariche possono venire a trovarsi anche all'interno dei conduttori; in questo caso non teniamo conto del fatto che in realtà questa distribuzione delle cariche non può

---

[1]) Notiamo anche che tra le condizioni di positività della forma (2,9) figurano le diseguaglianze

$$C_{aa}C_{bb} > C_{ab}^2.$$

essere stazionaria. Consideriamo la variazione corrispondente dell'integrale

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV$$

che dobbiamo supporre esteso ora a tutto lo spazio, compreso il volume dei conduttori stessi (poiché dopo la traslazione delle cariche il campo E, in generale, sarà non nullo anche all'interno dei conduttori). Scriviamo

$$\delta\mathcal{U} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{grad} \varphi \cdot \delta \mathbf{E}\, dV = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \delta \mathbf{E})\, dV +$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int \varphi \operatorname{div} \delta \mathbf{E} dV.$$

Il primo integrale, essendo trasformato in integrale esteso a superficie infinitamente lontana, scompare. Nel secondo integrale, in virtù dell'equazione (1,8), abbiamo $\operatorname{div} \delta \mathbf{E} = 4\pi\delta\bar{\rho}$ in modo che

$$\delta\mathcal{U} = \int \varphi \delta\bar{\rho} dV.$$

Ma questo integrale si annulla se φ corrisponde a un campo elettrostatico reale: in questo caso, all'interno di ciascun conduttore $\varphi =$ $=$ costante e gli integrali $\int \delta\bar{\rho}\, dV$ rispetto ai loro volumi sono nulli poiché le cariche totali dei conduttori restano invariate.

In tal modo, l'energia di un campo elettrostatico reale è minima [1]) rispetto all'energia dei campi che sarebbero generati da qualsiasi altra distribuzione delle cariche nel volume dei conduttori (*teorema di Thomson*).

Da questo teorema deriva, in particolare, il corollario seguente: l'introduzione di un conduttore non carico nel campo delle cariche in esame (conduttori carichi) diminuisce l'energia totale del campo. Per provarlo è sufficiente confrontare l'energia del campo reale, che diventa stazionario dopo l'introduzione del conduttore in questione, con l'energia del campo fittizio corrispondente all'assenza di cariche indotte sul conduttore introdotto. La prima, essendo la minima possibile, è inferiore alla seconda la quale, al tempo stesso, coincide con l'energia del campo iniziale (poiché in assenza di cariche indotte il campo « penetrerebbe » all'interno del conduttore senza variazione). Questo risultato si può formulare in un altro modo: un conduttore non carico posto lontano da un sistema di cariche date è attratto da queste ultime.

Infine, si può mostrare che un conduttore (carico o meno), introdotto in un campo elettrostatico, in generale, non può trovarsi in equilibrio stabile sotto l'azione delle sole forze elettriche. Questa

[1]) Non ci soffermiamo qui su considerazioni molto semplici dalle quali si vede che si tratta precisamente di un minimo e non, in generale, dell'estremo.

affermazione generalizza il teorema analogo, formulato alla fine del § 1, per una carica puntiforme e può essere ottenuta mediante l'applicazione contemporanea dell'ultimo teorema e del teorema di Thomson; non ci soffermiamo qui sulle considerazioni corrispondenti.

La formula (2,9) è comoda per il calcolo dell'energia di un sistema di conduttori separati da distanze finite l'uno dall'altro. Tuttavia, deve essere considerata in modo particolare l'energia del conduttore non carico sito in un campo esterno omogeneo $\mathfrak{E}$ che si può supporre generato da cariche che si trovano all'infinito. Secondo la formula (2,2) questa energia vale $\mathcal{U} = e\varphi/2$, dove e è una carica lontana che crea il campo e φ il potenziale del campo generato dal conduttore in questione nel punto in cui si trova la carica e (da $\mathcal{U}$ è esclusa l'energia della carica e nel proprio campo che non ha a che vedere con l'energia del conduttore in esame). La carica del conduttore è nulla, ma sotto l'influenza del campo esterno il conduttore acquisisce un momento di dipolo elettrico che indichiamo con $\mathcal{P}$. Il potenziale del campo di dipolo elettrico a una grande distanza $\mathbf{r}$ da esso è, come è noto, $\varphi = \mathcal{P}\mathbf{r}/r^3$. Perciò

$$\mathcal{U} = \frac{e}{2r^3}\mathcal{P}\mathbf{r}.$$

Ma $-e\mathbf{r}/r^3$ è, al tempo stesso, l'intensità del campo $\mathfrak{E}$ creato dalla carica e. Quindi,

$$\mathcal{U} = -1/2\mathcal{P}\mathfrak{E}. \tag{2,12}$$

In virtù della linearità di tutte le equazioni del campo, è evidente che le componenti del momento di dipolo $\mathcal{P}$ sono funzioni lineari delle componenti dell'intensità del campo $\mathfrak{E}$. I coefficienti di proporzionalità tra $\mathcal{P}$ e $\mathfrak{E}$ hanno le dimensioni del cubo di una lunghezza e perciò sono proporzionali al volume del conduttore:

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{2,13}$$

dove i coefficienti α_{ik} dipendono unicamente dalla forma del corpo. L'insieme delle grandezze $V\alpha_{ik}$ costituisce il *tensore di polarizzabilità* del corpo. Questo tensore è simmetrico: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ (la dimostrazione di questa affermazione è data nel § 11). Rispettivamente, l'energia (2,12) si scrive nella forma

$$\mathcal{U} = -1/2V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{2,14}$$

Problemi

1. Esprimere la capacità reciproca C del sistema di due conduttori (di cariche $\pm e$) mediante i coefficienti C_{ab}.

Soluzione. La capacità reciproca dei conduttori si esprime come coefficiente nella relazione $e = C(\varphi_2 - \varphi_1)$ e l'energia del sistema si esprime mediante C dalla relazione $\mathcal{U} = e^2/2C$. Confrontando con la (2,9) otteniamo

$$\frac{1}{C} = C_{11}^{-1} - 2C_{12}^{-1} + C_{22}^{-1} = \frac{C_{11} + 2C_{12} + C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}.$$

2. La carica puntiforme e si trova nel punto O in prossimità di un sistema di conduttori collegati a terra e induce su questi ultimi le cariche e_a. Se la carica e non ci fosse e uno dei conduttori (l'a-esimo) avesse il potenziale φ'_a (gli altri, come prima, sono collegati a terra) il potenziale del campo nel punto O sarebbe φ'_0. Esprimere le cariche e_a mediante φ'_a e φ'_0.

Soluzione. Se le cariche e_a sui conduttori trasmettono a quest'ultimi i potenziali φ_a e le cariche e'_a i potenziali φ'_a, dalla (2,3) segue che

$$\sum_a \varphi_a e'_a = \sum_{a,\,b} \varphi_a C_{ab} \varphi'_b = \sum_a \varphi'_a e_a.$$

Applichiamo questa relazione a due stati del sistema composto di tutti i conduttori e della carica e (considerando quest'ultima come caso limite di un conduttore di piccola dimensione). In uno stato del sistema esiste la carica e, i conduttori hanno le cariche e_a e i potenziali $\varphi_a = 0$. Nell'altro stato la carica $e = 0$ e uno dei conduttori ha il potenziale $\varphi'_a \neq 0$. Allora otteniamo $e\varphi'_0 + e_a\varphi'_a = 0$ da cui

$$e_a = -e\varphi'_0/\varphi'_a.$$

Poiché la carica e si trova a distanza r dal centro della sfera collegata a terra di raggio a ($r > a$), allora $\varphi'_0 = \varphi'_a\, a/r$ e la carica indotta sulla sfera è

$$e_a = -\,ea/r.$$

Come altro esempio consideriamo la carica e che si trova tra due sfere concentriche collegate a terra di raggi a e b a distanza r dal centro ($a < r < b$). Se la sfera esterna è collegata a terra e quella interna carica così che il suo potenziale sia φ'_a, allora il potenziale a distanza r vale

$$\varphi'_0 = \varphi'_a \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Perciò la carica indotta sulla sfera interna dalla carica e vale

$$e_a = -e\frac{a(b-r)}{r(b-a)}.$$

Analogamente, la carica indotta sulla sfera esterna vale

$$e_b = -e\frac{b(r-a)}{r(b-a)}.$$

3. Due conduttori di capacità C_1 e C_2 si trovano l'uno dall'altro a una distanza r grande rispetto alle loro dimensioni. Determinare i coefficienti C_{ab}.

Soluzione. Se il conduttore *1* porta la carica e_1 e il conduttore *2* non è carico, in prima approssimazione $\varphi_1 = e_1/C_1$, $\varphi_2 = e_1/r$; in questo caso trascuriamo la variazione del campo lungo il conduttore *2* e la sua polarizzazione. In tal modo, $C_{11}^{-1} = 1/C_1$, $C_{12}^{-1} = 1/r$ e, analogamente, $C_{22}^{-1} = 1/C_2$. Da cui per i coefficienti C_{ab} [1]) troviamo:

$$C_{11} = C_1\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right), \quad C_{12} = -\frac{C_1C_2}{r}, \quad C_{12} = C_2\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right).$$

[1]) I termini successivi dello sviluppo hanno, nel caso generale, l'ordine di grandezza (rispetto a $1/r$) di 1 superiore a quello dei termini scritti. Se, tuttavia, r è calcolata come la distanza tra «centri delle cariche» di ambedue i corpi (nel caso delle sfere, fra i loro centri geometrici), l'ordine dei termini successivi sarà superiore di 2.

4. Determinare la capacità C di un anello di filo sottile di sezione circolare, (il raggio dell'anello è b, il raggio della sezione del filo a; $b \gg a$).

Soluzione. Poiché l'anello è molto sottile il campo in prossimità della sua superficie coincide con il campo che sarebbe generato dalla stessa carica distribuita lungo la linea assiale dell'anello (ciò sarebbe esatto per un cilindro retto). Perciò il potenziale dell'anello stesso è

$$\varphi_a = \frac{e}{2\pi b} \oint \frac{dl}{r},$$

dove r è la distanza fra un dato punto della superficie dell'anello e l'elemento dl della sua linea assiale, lungo la quale si integra. Dividiamo l'integrale in due parti rispetto ai domini $r < \Delta$ e $r > \Delta$, dove Δ è una distanza tale che $a \ll \Delta \ll \ll b$. Allora per $r < \Delta$ si può supporre retto un tratto dell'anello e perciò

$$\int\limits_{\Delta > r} \frac{dl}{r} = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \approx 2 \ln \frac{2\Delta}{a}$$

Nel dominio $r > \Delta$, invece, si può trascurare lo spessore del filo, cioè supporre r come semplice distanza fra due punti della linea assiale dell'anello. Allora

$$\int\limits_{r > \Delta} \frac{dl}{r} = 2 \int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{b\, d\varphi}{2b \operatorname{sen}(\varphi/2)} = -2 \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{4},$$

dove φ è l'angolo centrale che sottende la corda r e il limite di integrazione inferiore è determinato dalla $2b \operatorname{sen}(\varphi_0/2) = \Delta$, da cui $\varphi_0 \approx \Delta/b$. Sommando le due parti dell'integrale la grandezza Δ si elide e per la capacità dell'anello $C = e/\varphi_a$ otteniamo la seguente espressione:

$$C = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

§ 3. *Metodi di soluzione dei problemi elettrostatici*

I metodi generali di soluzione dell'equazione di Laplace nelle date condizioni di frontiera su queste o quelle superficie si studiano nel settore corrispondente della fisica matematica e non ci proponiamo di darne un'esposizione completa. Ci limitiamo qui all'indicazione di alcuni procedimenti più semplici e alla soluzione di un gruppo di problemi tipici che presentano un interesse di per se stessi [1]).

Metodo delle immagini. La determinazione del campo generato dalla carica puntiforme e sita all'esterno di un mezzo conduttore che

[1]) Per soluzione di numero più grande di problemi complessi si vedano: *Smythe W. R.* Static and dynamic electricity. — McGraw-Hill, N.Y., 1950; *Grinberg G. A.* Questioni scelte della teoria matematica dei fenomeni elettrici e magnetici. — Mosca, Edizione dell'Accademia delle scienze, 1948 (in russo).

riempie un semispazio rappresenta un esempio elementare di applicazione del cosiddetto metodo delle immagini. L'idea di questo metodo consiste nella ricerca di cariche puntiformi fittizie complementari tali che, con le cariche date, creino un campo per il quale la superficie del conduttore assegnato coincida con una delle superficie equipotenziali del campo. Nel caso in questione ciò si ottiene introducendo la carica fittizia $e' = -e$ sita in un punto che è l'immagine speculare del punto e nel piano di frontiera del mezzo conduttore. Il potenziale del campo della carica e e della sua « immagine » e' vale

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

dove r e r' sono le distanze tra il punto di osservazione e le cariche e e e'. Sul piano di frontiera $r = r'$ e il potenziale ha il valore costante $\varphi = 0$, in modo che la condizione al contorno necessaria è veramente soddisfatta e la formula (3,1) fornisce la soluzione del problema posto. È da notare che la carica e è attratta al conduttore con la forza $e^2/(2a)^2$ (*forza dell'immagine*) e l'energia di interazione vale $-e^2/4a$.

La distribuzione sul piano di frontiera delle cariche superficiali indotte dalla carica puntuale e è data dalla formula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}, \tag{3,2}$$

dove a è la distanza fra la carica e la superficie. È facile provare che la carica totale in questo piano vale

$$\int \sigma df = -e$$

come deve essere.

La carica totale indotta da cariche estranee su un conduttore isolato, inizialmente non carico resta, si intende, nulla. Perciò se nel caso in esame il mezzo conduttore (in realtà un conduttore di grandi dimensioni) è isolato, si deve supporre che contemporaneamente con la carica $-e$ viene indotta anche la carica $+e$ la quale, tuttavia, essendo distribuita sulla superficie di un corpo di grandi dimensioni, ha una densità infinitesima.

In seguito, consideriamo il problema più complicato del campo generato da una carica puntiforme sita in prossimità di un conduttore sferico. Per la soluzione di questo problema ricorriamo al seguente

risultato che è facile provare con calcoli diretti. Il potenziale del campo generato da due cariche puntiformi e e $-e'$

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'}$$

si annulla su una superficie sferica di raggio R il cui centro si trova sul prolungamento della retta congiungente i punti e e e' alle distanze l e l' da questi punti, fra l'altro, l, l' e R verificano le uguaglianze $l/l' = (e/e')^2$, $R^2 = ll'$.

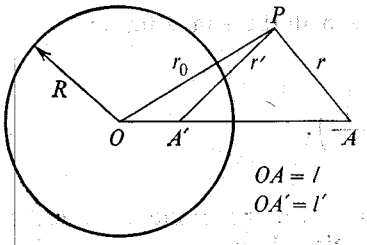


Fig. 1.

Supponiamo dapprima che il conduttore sferico sia mantenuto a un potenziale costante $\varphi = 0$ (sfera è collegata a terra). Allora il campo generato all'esterno della sfera dalla carica puntiforme e sita a distanza l dal centro della sfera (nel punto A della fig. 1) coinciderà con il campo creato dal sistema delle due cariche, la carica in esame e e quella fittizia $-e'$, sita all'interno della sfera (punto A') a distanza l' dal suo centro, in questo caso,

$$l' = R^2/l, \quad e' = eR/l. \tag{3,3}$$

Il potenziale di questo campo

$$\varphi = e/r - eR/lr' \tag{3,4}$$

(cfr. fig. 1). Sulla superficie della sfera è indotta, in questo caso, una carica totale non nulla uguale a $-e'$. L'energia di interazione della carica con la sfera vale

$$\mathcal{U} = -\frac{ee'}{2(l-l')} = -\frac{e^2R}{2(l^2-R^2)} \tag{3,5}$$

e la carica è attratta verso la sfera dalla forza

$$F = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} = -\frac{e^2lR}{(l^2-R^2)^2}.$$

Se la sfera conduttrice è mantenuta con carica totale nulla (sfera isolata non carica), si deve introdurre un'altra carica fittizia in modo tale che la carica totale indotta sulla superficie della sfera sia nulla, e non venga violata la costanza del potenziale su questa superficie. Ciò si ottiene collocando la carica $+e'$ al centro della sfera. Allora il potenziale del campo cercato è definito dalla formula

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \tag{3,6}$$

In questo caso, l'energia di interazione è

$$\mathcal{U} = \frac{ee'}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'}\right) = -\frac{e^2R^3}{2l^2(l^2-R^2)}. \tag{3,7}$$

Infine, se la carica e si trova nel piano sferico del mezzo conduttore (nel punto A' della fig. 1), il campo all'interno della cavità coincide con il campo che sarebbe generato dalla carica e e dalla sua « immagine » nel punto A all'esterno della sfera (a prescindere dal fatto che il conduttore sia collegato a terra o isolato):

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \tag{3,8}$$

Metodo dell'inversione. Esiste un semplice metodo che in alcuni casi permette sulla base della soluzione nota di un problema elettrostatico di trovare la soluzione di un altro problema. Questo metodo è basato sull'invarianza dell'equazione di Laplace rispetto a una trasformazione di variabili.

Nelle coordinate sferiche l'equazione di Laplace ha la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\varphi = 0,$$

dove Δ_Ω indica la parte angolare dell'operatore di Laplace. È facile provare che questa equazione conserva la sua forma se al posto della variabile r introduciamo una variabile nuova r' secondo la formula

$$r = \frac{R^2}{r'} \tag{3,9}$$

(*trasformazione dell'inversione*) e sostituiamo simultaneamente la funzione cercata φ secondo la formula

$$\varphi = \frac{r'}{R}\varphi'. \tag{3,10}$$

Qui R è una costante che ha le dimensioni di una lunghezza (*raggio dell'inversione*). In tal modo, se la funzione $\varphi(\mathbf{r})$ verifica l'equazione di Laplace, allora la funzione

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right) \tag{3,11}$$

è anch'essa soluzione di questa equazione.

Supponiamo di conoscere la soluzione del problema del campo elettrostatico generato da un certo sistema di conduttori, che si trovano tutti allo stesso potenziale φ_0, e da un sistema di cariche puntiformi. Generalmente si determina il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ in modo tale che esso si annulli all'infinito. Qui, tuttavia, definiamo $\varphi(\mathbf{r})$ in modo da far tendere questa funzione a $-\varphi_0$ all'infinito; allora sui conduttori si avrà $\varphi = 0$.

Precisiamo ora quale problema elettrostatico si risolve mediante la funzione trasformata (3,11). Prima di tutto, cambieranno la forma e la disposizione reciproca di tutti i conduttori. La condizione di frontiera per la quale il potenziale è costante sulla superficie dei conduttori si verifica automaticamente poiché per $\varphi = 0$ si avrà $\varphi' = 0$. Ugualmente cambieranno la disposizione e la grandezza di tutte le cariche puntuali. La carica sita nel punto $\mathbf{r}_0$ passa al punto $\mathbf{r}_0' = (R^2/r_0^2)\,\mathbf{r}_0$ e acquisisce la grandezza e' che si può determinare nel seguente modo. Per $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ il potenziale $\varphi(\mathbf{r})$ diventa infinito secondo la legge $\varphi = e/|\,\delta\mathbf{r}\,|$, dove $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. D'altra parte, derivando la relazione $\mathbf{r} = (R^2/r'^2)\,\mathbf{r}'$ troviamo che i valori assoluti delle piccole differenze $\delta\mathbf{r}$ e $\delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0'$ sono legati reciprocamente dalla relazione

$$(\delta\mathbf{r})^2 = \frac{R^4}{r_0'^4}\,(\delta\mathbf{r}')^2.$$

Perciò per $\mathbf{r}' \to \mathbf{r}_0'$ la funzione φ' tende all'infinito secondo la legge

$$\varphi' = \frac{R}{r_0'}\,\frac{e}{|\delta\mathbf{r}|} = \frac{er_0'}{R\,|\delta\mathbf{r}'|}$$

che corrisponde alla carica

$$e = \frac{er_0'}{R} = \frac{eR}{r_0}. \tag{3,12}$$

Infine, consideriamo l'andamento della funzione $\varphi'(\mathbf{r}')$ in prossimità dell'origine delle coordinate. Al punto $\mathbf{r}' = 0$ corrisponde $\mathbf{r} \to \infty$. Ma per $\mathbf{r} \to \infty$ la funzione $\varphi(\mathbf{r})$ tende a $-\varphi_0$. Perciò, se $\mathbf{r}' \to 0$, la funzione φ' diventa infinita secondo la legge

$$\varphi' = -\frac{R\varphi_0}{r'}.$$

Ciò vuol dire che nel punto $\mathbf{r}' = 0$ si trova la carica $e_0 = -R\varphi_0$.

Indichiamo come si trasformano per inversione alcune figure geometriche. Una superficie sferica di raggio a e con centro in $\mathbf{r}_0$ è data dall'equazione

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2.$$

Invertendo, otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{R^2}{r'^2}\,\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\right)^2 = a^2$$

che dopo la moltiplicazione per r'^2 e un nuovo raggruppamento dei termini può essere ridotta alla forma $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0')^2 = a'^2$ dove

$$\mathbf{r}_0' = -\frac{R^2\mathbf{r}_0}{a^2 - r_0^2},\quad a' = \frac{aR^2}{|a^2 - r_0^2|}. \tag{3,13}$$

In tal modo, riotteniamo una sfera di altro raggio a' e con centro nel punto $\mathbf{r}_0'$. Se la sfera iniziale passava per l'origine delle coordinate ($a = r_0$), allora $a' = \infty$; in questo caso, la sfera si trasforma in un piano perpendicolare alla direzione $\mathbf{r}_0$ che passa a distanza

$$r_0' - a' = \frac{R^2}{a + r_0} = \frac{R^2}{2a}$$

dall'origine delle coordinate.

Metodo della trasformazione conforme. Un campo dipendente unicamente da due coordinate cartesiane (x, y) si chiama campo *piano*. Un mezzo possente nella soluzione dei problemi elettrostatici bidimensionali è dato dalla teoria delle funzioni di una variabile complessa. Le basi dell'applicazione di questa teoria consistono in quanto segue.

Il campo elettrostatico nel vuoto verifica due equazioni: rot $\mathbf{E} = 0$ e div $\mathbf{E} = 0$. La prima di esse consente di introdurre il potenziale del campo secondo $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$. La seconda mostra, invece, che accanto a φ si può introdurre anche il « potenziale vettor » del campo $\mathbf{A}$ secondo la formula $\mathbf{E} = \text{rot}\,\mathbf{A}$. Nel caso del campo piano il vettore $\mathbf{E}$ giace nel piano xy e dipende esclusivamente da queste due coordinate. Si puo scegliere rispettivamente, il vettore $\mathbf{A}$ in modo tale che sia diretto ovunque perpendicolarmente al piano xy. Allora le componenti dell'intensità si esprimono come derivate di φ o di $\mathbf{A}$ secondo la formula

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{3,14}$$

Ma queste relazioni fra le derivate delle funzioni φ e A coincidono, dal punto di vista matematico, con le note condizioni di Cauchy-Riemann che esprimono il fatto che la relazione complessa

$$w = \varphi - iA \tag{3,15}$$

è una funzione analitica dell'argomento complesso $z = x + iy$. Ciò significa che la funzione $w(z)$ ha in ogni punto una derivata indipendente dalla direzione in cui è considerata. Così derivando nella direzione dell'asse x troviamo che

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial A}{\partial x}$$

ossia

$$\frac{dw}{dz} = -E_x + iE_y, \tag{3,16}$$

La funzione w si chiama *potenziale complesso*.

Le linee di forza del campo sono determinate dall'equazione

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Esprimendo E_x e E_y in funzione delle derivate di A, riscriviamo questa equazione nella forma

$$dx\frac{\partial A}{\partial x}+dy\frac{\partial A}{\partial y}=dA=0,$$

da cui $A(x, y)$ = costante. Quindi, le linee dei valori costanti della parte immaginaria della funzione $w(z)$ rappresentano linee di forza del campo, mentre le linee dei valori costanti della sua parte reale sono linee equipotenziali. L'ortogonalità reciproca di queste due famiglie di linee è gia garantita dalle relazioni iniziali (3,14) secondo le quali

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y}=0.$$

Sia la parte reale che la parte immaginaria della funzione analitica $w(z)$ verificano in egual modo l'equazione di Laplace. Quindi per la stessa ragione si può considerare Im w come potenziale del campo. Le linee di forza saranno allora date dalle equazioni Re w = = costante. In questo caso, al posto della (3,15) avremo $w = A + i\varphi$.

Il flusso dell'intensità del campo elettrico attraverso un tratto della linea equipotenziale è dato dall'integrale

$$\int E_n dl=-\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl,$$

dove dl è l'elemento di lunghezza della linea equipotenziale e $\mathbf{n}$ la direzione della normale ad essa. Secondo le relazioni (3,14) abbiamo $\partial\varphi/\partial n = -\partial A/\partial l$ e il segno è stato scelto in modo che la direzione positiva di l è a sinistra guardando nella direzione di $\mathbf{n}$. Perciò

$$\int E_n dl=\int\frac{\partial A}{\partial l}dl=A_2-A_1,$$

dove A_2 e A_1 sono i valori di A in ambedue le estremità del tratto in esame. In particolare, il flusso del campo elettrico attraverso un contorno chiuso vale $4\pi e$, dove e è la carica totale racchiusa in questo contorno (riferito all'unità di lunghezza dei conduttori lungo l'asse z). Perciò

$$e=\frac{1}{4\pi}\Delta A, \tag{3,17}$$

dove ΔA è la variazione di A nella descrizione di una linea equipotenziale chiusa in senso antiorario.

Un esempio elementare di potenziale complesso è il potenziale del campo di un filo rettilineo carico (coincidente con l'asse z). L'intensità di questo campo è data dalle formule

$$E_r=\frac{2e}{r},\ E_\theta=0,$$

dove r, θ sono le coordinate polari del piano xy ed e la carica per unità di lunghezza del filo. Il potenziale complesso corrispondente è

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta. \tag{3,18}$$

Se il filo carico passa non per l'origine delle coordinate ma per il punto (x_0, y_0), il potenziale complesso è

$$w = -2e \ln (z - z_0), \tag{3,19}$$

dove $z_0 = x_0 + iy_0$.

Dal punto di vista matematico la relazione funzionale $w = w(z)$ realizza la *trasformazione conforme* del piano della variabile complessa z nel piano della variabile complessa w. Sia C il contorno della sezione del conduttore nel piano xy e sia φ_0 il potenziale di questo conduttore. Da quanto detto deriva con chiarezza che il problema del campo generato da questo conduttore si riduce alla ricerca di una funzione $w(z)$ che trasformi il contorno C nel piano z nella linea $w = \varphi_0$ parallela all'asse delle ordinate nel piano w; allora la parte reale Re w darà il potenziale del campo considerato (se, invece, la funzione $w(z)$ trasforma il contorno C in una linea parallela all'asse delle ascisse, il potenziale è dato dalla funzione Im w).

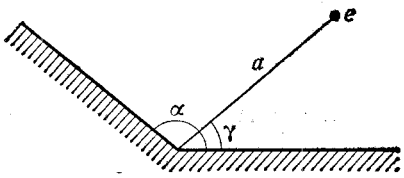


Fig. 2.

Problema del cuneo. A titolo informativo diamo qui le formule che determinano il campo generato dalla carica puntiforme e sita nello spazio tra due semipiani conduttori intersecantisi. Supponiamo che l'asse z di un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z coincida con lo spigolo del cuneo, mentre l'angolo θ è calcolato a partire da uno dei suoi lati, e che la carica e si trovi nel punto a, γ, 0 (fig. 2). L'angolo di apertura α tra i piani può essere sia minore che maggiore di π; nell'ultimo caso abbiamo a che fare con la carica sita all'esterno del cuneo conduttore.

Il potenziale del campo è dato dalla formula

$$\varphi = \frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha} - \cos\frac{\pi(\theta-\gamma)}{\alpha}} - \frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha} - \cos\frac{\pi(\theta+\gamma)}{\alpha}} \right] \times$$

$$\times \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta - \operatorname{ch}\eta}}, \tag{3,20}$$

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad \eta > 0;$$

sulla superficie del conduttore, cioè per $\theta = 0$, α il potenziale $\varphi = 0$ (*H. M. Macdonald*, 1895) [1].

In particolare, per $\alpha = 2\pi$ si ottiene un semipiano conduttore nel campo di una carica puntiforme. In questo caso l'integrale (3,20) si calcola esattamente e dà

$$\varphi|_{\alpha=2\pi} = \frac{e}{\pi}\left[\frac{1}{R}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\theta-\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right) - \frac{1}{R'}\arccos\times\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{\cos\frac{\theta+\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)\right], \tag{3,21}$$

$$R = [a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma - \theta)]^{1/2},$$
$$R' = [a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma + \theta)]^{1/2}.$$

Nel limite, quando il punto di osservazione del campo tende al punto in cui è sita la carica e, il potenziale (3,21) assume la forma

$$\varphi = \frac{e}{R} + \varphi', \quad \varphi' = -\frac{e}{2\pi a}\left(1 + \frac{\pi-\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}\right). \tag{3,22}$$

Il primo termine è il potenziale coulombiano che diventa infinito per $R \to 0$ e φ' la variazione del potenziale nel punto in cui si trova la carica sotto influenza del conduttore. L'energia di interazione della carica con il semipiano conduttore è

$$\mathcal{U} = \frac{e\varphi'}{2} = -\frac{e^2}{4\pi a}\left(1 + \frac{\pi-\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}\right). \tag{3,23}$$

Problemi

1. Determinare il campo attorno a una sfera conduttrice non carica (di raggio R) sita in un campo elettrico omogeneo esterno $\mathfrak{E}$.

Soluzione. Scriviamo il potenziale nella forma $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, dove $\varphi_0 = -\mathfrak{E}\mathbf{r}$ è il potenziale del campo esterno e φ_1 la variazione cercata del potenziale causata dalla sfera. In virtù della simmetria della sfera, φ_1 può dipendere unicamente dal solo vettore costante $\mathfrak{E}$. L'unica soluzione dell'equazione di Laplace che si annulla all'infinito è

$$\varphi_1 = -\text{cost}\cdot\mathfrak{E}\nabla\frac{1}{r} = \text{cost}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^3}$$

[1]) La deduzione di questa formula è data nei libri seguenti: *Batyghin V. V.*, *Toptyghin I. N.*, Problemi elettrodinamici. — Mosca, Nauka, 1970, problemi 205, 206 (edizione russa); *H. M. Macdonald.* Electromagnetism. — Bell, London, 1934.

(il centro della sfera è stato scetlo come origine delle coordinate). Sulla superficie della sfera φ deve essere costante; di qui troviamo costante $= R^3$ in modo che

$$\varphi = -\mathfrak{E} r \cos\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

(θ è l'angolo compreso tra i vettori $\mathfrak{E}$ e $\mathbf{r}$). La distribuzione delle cariche sulla superficie della sfera è data dalla formula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{3\mathfrak{E}}{4\pi}\cos\theta;$$

la carica totale $e = 0$.

Il modo più semplice per trovare il momento di dipolo della sfera è confrontare φ_1 con il potenziale $\mathcal{P}\mathbf{r}/r^3$ del campo del dipolo elettrico; troviamo che

$$\mathcal{P} = R^3\mathfrak{E}.$$

2. Considerare il problema 1 per un cilindro infinito in un campo omogeneo trasversale.

Soluzione. Introduciamo le coordinate polari nel piano perpendicolare all'asse del cilindro. La soluzione dell'equazione di Laplace bidimensionale dipendente esclusivamente da un vettore costante è

$$\varphi_1 = \text{cost}\cdot\mathfrak{E}\nabla \ln r = \text{cost}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^2}.$$

Sommandovi a $\varphi_0 = -\mathbf{r}\mathfrak{E}$ e ponendo costante $= R^2$, otteniamo

$$\varphi = -\mathfrak{E} r \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

La densità superficiale delle cariche è

$$\sigma = \frac{\mathfrak{E}}{2\pi}\cos\theta.$$

Il momento di dipolo $\mathcal{P}$ dell'unità di lunghezza del cilindro si può trovare confrontando φ con il potenziale di un campo di dipolo bidimensionale. Quest'ultimo ha la forma

$$2\mathcal{P}\nabla \ln r = \frac{2\mathcal{P}\mathbf{r}}{r^2},$$

in modo che $\mathcal{P} = \mathfrak{E}R^2/2$.

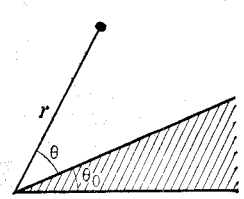


Fig. 3.

3. Determinare il campo in prossimità dello spigolo di un cuneo conduttore.

Soluzione. Consideriamo le coordinate polari r, θ nel piano perpendicolare allo spigolo del cuneo con l'origine nel vertice dell'angolo θ_0 formato del cuneo stesso (fig. 3). Supponiamo che l'angolo θ si calcoli da uno dei lati del cuneo; ad un dominio esterno al conduttore corrispondono i valori $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0$. In prossimità dello spigolo del cuneo il potenziale si può sviluppare in potenze di r, ma qui interessa il primo termine dopo quello costante di questo sviluppo contenente la potenza più piccola di r. Le soluzioni dell'equazione di Laplace bidimensionale proporzionali a r^n sono $r^n \cos n\theta$ e $r^n \operatorname{sen} n\theta$. La soluzione con n più piccolo che soddisfa la condizione $\varphi =$ costante per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi - \theta_0$ (sulla superficie del conduttore) è

$$\varphi = \text{cost}\cdot r^n \operatorname{sen} n\theta, \quad n = \pi/(2\pi - \theta_0).$$

L'intensità del campo, corrispondentemente, dipende da r come r^{n-1}. Per $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), quindi, l'intensità diventa infinita in prossimità dello spigolo del cuneo. In particolare, per un cuneo molto sottile ($\theta_0 \ll 1$, $n \approx 1/2$) E cresce con la diminuzione di r come $r^{-1/2}$. Viceversa nelle vicinanze dello spigolo di una cavità cuneiforme, sulla superficie del conduttore ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$) il campo tende a zero.

Il valore della costante può essere ricavato soltanto dalla soluzione del problema per l'intero campo. Così, per un cuneo molto sottile, nel campo della carica puntiforme e il passaggio a r piccoli nella (3,21) conferma la legge

$$\varphi = \text{cost} \cdot \sqrt{r}\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2},$$

dove

$$\text{cost} = \frac{4e\sqrt{a}}{\pi(a^2+z^2)}\,\text{sen}\,\frac{\gamma}{2}.$$

La locuzione «in prossimità dello spigolo del cuneo» significa in questo caso la condizione $r \ll a$, nella cui realizzazione si può trascurare il termine $\partial^2\varphi/\partial z^2$ nell'equazione di Laplace.

4. Determinare il campo in prossimità di una punta conica sottile sulla superficie del conduttore.

Soluzione. Consideriamo le coordinate sferiche con l'origine nel vertice e l'asse polare coincidente con l'asse della punta conica. Supponiamo che l'angolo di apertura del cono sia $2\theta_0 \ll 1$ in modo che i domini esterni al conduttore corrispondano ai valori dell'angolo polare $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Analogamente a quanto è stato fatto nel problema 3, cerchiamo la soluzione (per la parte variabile del potenziale) simmetrica rispetto all'asse del cono nella forma

$$\varphi = r^n f(\theta) \tag{1}$$

con n il più piccolo possiblile. L'equazione di Laplace

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

dopo avervi sostituito questa espressione dà

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{df}{d\theta}\right) + n(n+1)f = 0. \tag{2}$$

La condizione di costanza del potenziale sulla superficie della punta significa che deve essere $f(\theta_0) = 0$.

Per θ_0 piccolo cerchiamo la soluzione partendo dall'ipotesi che $n \ll 1$ e che $f(\theta)$ abbia la forma $f = \text{cost}\cdot[1 + \psi(0)]$, dove $\psi \ll 1$ (per $\theta_0 \to 0$, cioè per una punta infinitamente sottile è naturale supporre che φ tenda ad una costante in quasi tutto il dominio attorno alla punta). Per ψ otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\text{sen}\,\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right) = -n. \tag{3}$$

La soluzione in cui ψ non ha singolarità nel dominio esterno alla punta (in particolare, per $\theta = \pi$) è

$$\psi(\theta) = 2n\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.$$

Per $\theta \sim \theta_0 \ll 1$ la funzione $\psi(\theta)$ cessa di essere piccola. Malgrado ciò, l'espressione ottenuta resta applicabile poiché in questo dominio grazie alla piccolezza di θ, in generale, si può trascurare il secondo termine dell'equazio-

ne (2). Per determinare la costante n, in prima approssimazione, dobbiamo esigere che la funzione trovata precedentemente $f = 1 + \psi$ si annulli per $\theta = \theta_0$. In tal modo troviamo [1]) che

$$n = -\frac{1}{2 \ln \theta_0}.$$

L'intensità del campo cresce indefinitamente, nell'avvicinarsi all'estremità della punta, come $r^{-(1-n)}$, cioè, in generale, come $1/r$.

5. Considerare il problema 4 per una cavità conica sulla superficie di un conduttore.

Soluzione. Ora, al dominio esterno al conduttore corrispondono i valori $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. Come nel problema 4, cerchiamo φ nella forma (1), ma in questo caso $n \gg 1$. Poiché in tutto il dominio del campo si ha ora $\theta \ll 1$, l'equazione (2) si può scrivere nella forma

$$\frac{1}{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\theta \frac{df}{d\theta} \right) + n^2 f = 0.$$

Questa è un'equazione di Bessel, e la sua soluzione non avente influenza nel dominio del campo è $J_0(n\theta)$. Il valore di n è definito come la radice più piccola dell'equazione $J_0(n\theta_0) = 0$ e di ui

$$n = 2{,}4/\theta_0.$$

6. Determinare l'energia di attrazione di un dipolo elettrico da una superficie piana conduttrice.

Soluzione. Consideriamo l'asse x perpendicolare alla superficie del conduttore e passante per il punto in cui si trova il dipolo. Supponiamo che il vettore del momento di dipolo $\mathcal{P}$ giaccia nel piano xy. L'« immagine » del dipolo si trova nel punto $-x$ e ha un momento di dipolo $\mathcal{P}'_x = \mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}'_y = -\mathcal{P}_y$. L'energia di attrazione cercata si calcola come l'energia di interazione del dipolo con la sua « immagine » e vale

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8x^3} (2\mathcal{P}_x^2 + \mathcal{P}_y^2).$$

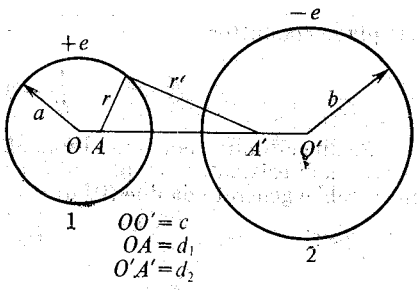


Fig. 4

7. Determinare la capacità reciproca dell'unità di lunghezza di due conduttori cilindrici infiniti paralleli (di raggio a e b sia c la distanza fra gli assi) [2]).

---

[1]) In realtà, la formula più precisa, ossia $n = 1/(2 \ln (2/\theta_0))$ contenente il coefficiente nel grande logaritmo non può essere ottenuta con il metodo indicato. Tuttavia, per ragioni casuali il calcolo più preciso conduce proprio a questa formula.

[2] Analogo problema per due sfere non si risolve in forma finita. La differenza è dovuta al fatto che nel campo di due fili paralleli carichi (di cariche uguali o opposte) tutte le superfici equipotenziali rappresentano cilindri circolari, mentre nel campo di due cariche puntiformi $\pm e$ le sue superficie equipotenziali non sono sfere.

Soluzione. Il campo generato da ambedue i cilindri coincide con il campo che sarebbe generato (nello spazio esterno ai cilindri) da due fili carichi passanti per due punti A e A' scelti in modo opportuno (fig. 4). I fili portano (per unità di lunghezza) le cariche $\pm e$ uguali alle cariche dei cilindri, mentre i punti A e A' devono essere disposti sulla linea OO' in modo tale che le superfici dei cilindri coincidano con le superfici equipotenziali. A tale scopo le distanze OA e $O'A'$ devono verificare le relazioni

$$OA \cdot OA' = a^2, \quad O'A' \cdot O'A = b^2,$$

ossia

$$d_1 (c - d_2) = a^2, \quad d_2 (c - d_1) = b^2.$$

Allora su ciascuna delle circonferenze il rapporto r'/r fra le distanze dai punti A e A' resta costante: sulla circonferenza *1*

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{OA'} = \frac{a}{c - d_2} = \frac{d_1}{a}$$

e sulla circonferenza *2* $r'/r = d_2/b$. Corrispondentemente, i potenziali dei cilindri sono

$$\varphi_1 = -2e \ln \frac{r}{r'} = -2e \ln \frac{d_1}{a}, \quad \varphi_2 = 2e \ln \frac{d_2}{b}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 2e \ln \frac{d_1 d_2}{ab}.$$

Di qui per la capacità reciproca cercata otteniamo $C = e/(\varphi_2 - \varphi_1)$

$$\frac{1}{C} = 2 \ln \frac{d_1 d_2}{ab} = 2 \operatorname{Arch} \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

In particolare, per un cilindro di raggio a che si trova alla distanza $h > a$ dal piano conduttore si deve porre $c = b + h$ e passare al limite $b \to \infty$; ciò dà

$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{h}{a}.$$

Se due cilindri vuoti sono l'uno all'interno dell'altro ($c < b - a$), il campo esterno non esiste e il campo nello spazio tra i due cilindri coincide con quello che sarebbe generato da due fili di cariche $+e$ e $-e$ passanti per i punti A e A' (fig. 5). Allo stesso modo si ottiene come risultato:

$$\frac{1}{C} = 2 \operatorname{Arch} \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

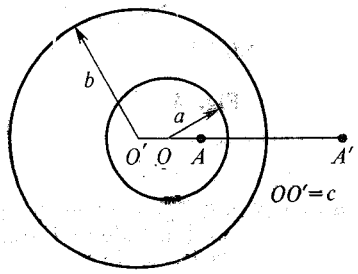


Fig. 5

8. La frontiera di un conduttore è un piano illimitato con una convessità avente forma di una semisfera. Trovare la distribuzione delle cariche su tale superficie.

Soluzione. Nel campo trovato nel problema 1 il cui potenziale della forma

$$\varphi = \text{cost} \cdot z \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)$$

il piano $z = 0$ con una convessità $r = R$ è una superficie equipotenziale (sulla quale $\varphi = 0$). Perciò essa può essere anche la superficie di un conduttore e la for-

mula scritta determina il campo all'esterno del conduttore. La distribuzione delle cariche nella parte piana della superficie è data dalla formula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \sigma_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(abbiamo posto cost $= -4\pi\sigma_0$, dove σ_0 è la densità delle cariche lontano dalla convessità). Invece sulla superficie della convessità abbiamo

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 3\sigma_0 = \frac{z}{R}.$$

9. Determinare il momento di dipolo di una sbarra cilindrica conduttrice sottile (di lunghezza $2l$, di raggio a; $a \ll l$) nel campo elettrico $\mathfrak{E}$ parallelo al suo asse.

Soluzione. Siano $\tau(z)$ una carica indotta sulla superficie del cilindro e riferita all'unità di lunghezza e z una coordinata lungo l'asse del cilindro che calcoliamo a partire dalla sua mezzeria. La condizione di costanza del potenziale sulla superficie conduttrice è

$$-\mathfrak{E}z + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')\,dz'\,d\varphi}{R} = 0, \qquad R = \left[(z'-z)^2 + 4a^2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}$$

(φ è l'angolo fra due piani passanti per l'asse del cilindro e per i punti della sua superficie, separati da una distanza R). Dividiamo l'integrale in due parti scrivendo l'identità $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - \tau(z)]$. Tenendo conto che $l \gg a$ e considerando i punti non troppo vicini agli estremi della sbarra, abbiamo

$$\frac{\tau(z)}{2\pi}\int\int\frac{dz'\,d\varphi}{R} \approx \frac{\tau(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{l^2-z^2}{a^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi/2)}\,d\varphi = \tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2}$$

$\left(\text{abbiamo usato il noto risultato } \int_0^{\pi}\ln\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = -\pi\ln 2\right)$. Nell'integrale contenente la differenza $\tau(z') - \tau(z)$ si può trascurare il termine con a^2 in R poiché ciò non porta alla divergenza dell'integrale. In tal modo,

$$\mathfrak{E}z = \tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2} + \int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')-\tau(z)}{|z'-z|}\,dz'.$$

La dipendenza di τ da z si riduce fondamentalmente alla proporzionalità di z; in questa approssimazione l'integrale che figura nell'espressione dà $-2\tau(z)$, e come risultato otteniamo

$$\tau(z) = \frac{\mathfrak{E}z}{\ln[4(l^2-z^2)/a^2]-2}.$$

Questa espressione non è valida in prossimità degli estremi della sbarra, ma per il calcolo del momento di dipolo questo dominio dei valori z non è importante. Con la precisione qui considerata abbiamo

$$\mathcal{P} = \int_{-l}^{l}\tau(z)\,z\,dz = \frac{\mathfrak{E}}{L}\int_0^{l}\left[z^2 - \frac{z^2}{2L}\ln\left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)\right]dz = \mathfrak{E}\,\frac{l^3}{3L}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{L}\left(\frac{4}{3} - \ln 2\right)\right]$$

(dove $L = \ln(2l/a) - 1$ è un numero grande) o, con la stessa precisione,

$$\mathcal{P} = \frac{\mathfrak{E} l^3}{3[\ln(4l/a) - 7/3]}.$$

10. Determinare la capacità di un segmento conduttore sferico.

Soluzione. Consideriamo come origine delle coordinate O un punto qualsiasi del bordo del segmento (fig. 6) e facciamo la trasformazione di inversione $r = l^2/r'$ (l è la lunghezza della corda nella sezione principale del segmento sferico). In questo caso il segmento si trasforma in un semipiano (retta tratteggiata della fig. 6) perpendicolare al raggio AO del segmento e passante per il punto B del suo bordo; l'angolo $\gamma = \pi - \theta$, dove 2θ è l'angolo di apertura del segmento.

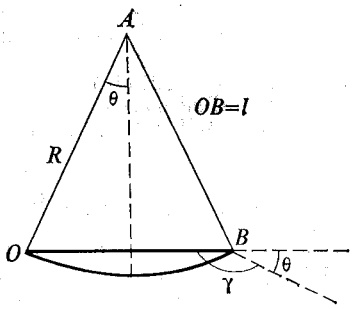


Fig. 6

Se il potenziale del segmento che porta la carica e è nullo, allora per $r \to \infty$ il potenziale del campo tende a

$$\varphi \approx -\varphi_0 + \frac{e}{r}.$$

Corrispondentemente, nel problema trasformato per $r' \to 0$ il potenziale tende a

$$\varphi' = \frac{l\varphi}{r'} \approx -\frac{l\varphi_0}{r'} + \frac{e}{l}$$

(il primo termine corrisponde alla carica $e' = -l\varphi_0$ situata nell'origine delle coordinate).

D'altra parte, secondo la formula (3,22) abbiamo

$$\varphi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l}\left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

(il potenziale in prossimità della carica e' sita a distanza l dal bordo del semipiano conduttore di potenziale nullo). Confrontando ambedue le espressioni otteniamo per la capacità cercata $C = e/\varphi_0$ la seguente formula:

$$C = \frac{l}{2\pi}\left(1 + \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right) = \frac{R}{\pi}(\operatorname{sen}\theta + \theta)$$

(R è il raggio del segmento).

11. Trovare la correzione, dovuta agli effetti di bordo, per il valore $C = S/4\pi d$ esprimente la capacità di un condensatore piano (S è l'area della superficie del rivestimento e d la distanza tra i rivestimenti; $d \ll \sqrt{S}$).

Soluzione. Poiché i rivestimenti hanno dei bordi liberi, la distribuzione delle cariche non è uniforme su di essi. Per trovare la correzione cercata, consideriamo in prima approssimazione alcuni punti dei rivestimenti lontani dal bordo a distanze x tali che $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Considerando, ad esempio, il rivestimento superiore (con il potenziale $\varphi = \varphi_0/2$, fig. 7, *a*) e trascurandone la distanza $d/2$ che la separa dal piano medio (superficie equipotenziale $\varphi = 0$), otteniamo il problema del campo in prossimità della frontiera di due parti di un piano aventi potenziali distinti (fig. 7, *b*). Questo problema si risolve in modo elementare [1])

[1]) Cfr. il § 23; nella formula (23,2), per il potenziale, in questo caso, si deve porre $\varphi_{ab} = \varphi_0/2$, $\alpha = \pi$.

e come risultato, per la densità delle cariche in eccesso (rispetto a σ lontana dall'orlo), si ottiene l'espressione

$$\Delta\sigma = \frac{E_n}{4\pi} = \frac{\varphi_0}{8\pi^2 x},$$

in modo che la carica in eccesso totale è

$$L \int \Delta\sigma\, dx = \frac{\varphi_0 L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}$$

(L è la lunghezza del perimetro del rivestimento); nel calcolare l'integrale logaritmicamente divergente consideriamo come limiti superiore e inferiore le frontiere del dominio $d \ll x \ll \sqrt{S}$.

Di qui ricaviamo la capacità

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2} \ln \frac{\sqrt{S}}{d}.$$

Il calcolo più preciso (determinazione del coefficiente nell'argomento del logaritmo) richiede l'applicazione di metodi più complicati e il risultato, fra l'altro, dipende dalla forma del rivestimento. Per i rivestimenti circolari (di raggio R) si ha

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi}\left(\ln \frac{16\pi R}{d} - 1\right)$$

(*formula di Kirchhoff*).

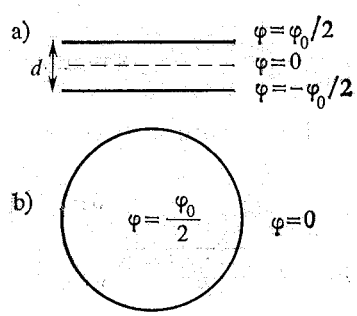


Fig. 7

§ 4. *Ellissoide conduttore*

Il problema del campo generato da un ellissoide conduttore carico e quello di un ellissoide in un campo esterno omogeneo si risolvono mediante le cosiddette coordinate *ellissoidali*.

Il legame fra le coordinate ellissoidali e quelle cartesiane è dato dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c). \tag{4,1}$$

Questa equazione, cubica rispetto ad u, ha tre radici reali distinte ($u = \xi, \eta, \zeta$) che si trovano negli intervalli seguenti:

$$\xi \geqslant -c^2, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2. \tag{4,2}$$

Queste tre radici non sono altro che le coordinate ellissoidali del punto x, y, z. Il loro significato geometrico deriva dal fatto che le superficie a valori costanti ξ, η, ζ rappresentano rispettivamente degli ellissoidi e degli iperboloidi a una e a due falde i cui fuochi coincidono con quelli dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{4,3}$$

Per ogni punto dello spazio passa una superficie di ognuna delle tre famiglie, inoltre queste superfici sono reciprocamente ortogonali. Le formule di trasformazione delle coordinate ellissoidali in quelle cartesiane si ottengono mediante la soluzione simultanea di tre equazioni del tipo (4,1) e hanno la forma

$$\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}, \\ y &= \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2}, \\ z &= \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{4,4}$$

L'elemento di lunghezza nelle coordinate ellissoidali ha la forma

$$dl^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2 + h_3^2 d\zeta^2,$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta}, \quad h_3 \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta}, \tag{4,5}$$

dove è stata introdotta la notazione

$$R_n = \sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)}, \quad u = \xi,\ \eta,\ \zeta.$$

L'equazione di Laplace in queste coordinate si scrive

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)}\Big[(\eta-\zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\Big(R_\xi \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big) + (\zeta-\xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \times \\ \times \Big(R_\eta \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\Big) + (\xi-\eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(R_\zeta \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\Big)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{4,6}$$

Se due dei semiassi a, b, c diventano uguali, il sistema di coordinate ellissoidali degenera. Sia $a = b > c$. Allora l'equazione cubica (4,1) degenera in quella quadratica

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \\ &\rho^2 = x^2 + y^2, \end{aligned} \tag{4,7}$$

le cui due radici assumono valori negli intervalli

$$\xi \geqslant -c^2, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -a^2.$$

Le superfici delle coordinate ξ e η con valori costanti diventano rispettivamente degli ellissoidi di rotazione confocali schiacciati e degli iperboloidi di rotazione a una falda (fig. 8). Come terza coordinata si può introdurre l'angolo polare φ nel piano xy ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \operatorname{sen} \varphi$). Quanto alla coordinata ellissoidale ζ, per

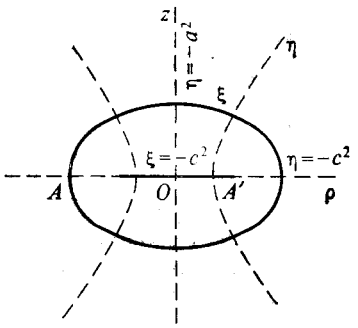


Fig. 8

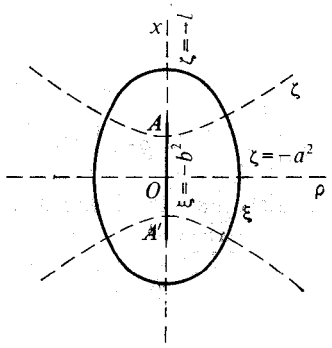


Fig. 9

$a = b$ essa degenera nella costante $-a^2$. Il suo legame con l'angolo φ consiste nella legge secondo la quale ζ tende a $-a^2$ allorché b tende ad a:

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a^2+\zeta}{a^2-b^2}}, \tag{4,8}$$

risultato che si ottiene facilmente dalla (4,4) o immediatamente dall'equazione (4,1). Il legame fra le coordinate z, ρ e ξ, η è dato secondo la (4,4) dalle uguaglianze

$$z = \pm \left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{1/2}, \quad \rho = \left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{1/2}. \tag{4,9}$$

Le coordinate ξ, η, φ si dicono coordinate *sferoidali schiacciate* [1].

Analogamente, per $a > b = c$ le coordinate ellissoidali degenerano nelle cosiddette coordinate *sferoidali allungate*. Le coordinate ξ e ζ sono date dalle radici dell'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \tag{4,10}$$

fra l'altro, $\xi \geqslant -b^2$, $-b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$. Le superficie delle costanti ξ e ζ rappresentano degli ellissoidi allungati e degli iperboloidi di

[1]) Questa definizione di coordinate sferoidali rappresenta il caso limite in cui esse sono ellissoidali. Nella letteratura si usano altre definizioni che si riducono facilmente a quella che qui applichiamo.

rotazione a due falde (fig. 9). La coordinata η per $c \to b$ degenera nella costante $-b^2$ secondo la legge

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{b^2+\eta}{b^2-c^2}}, \tag{4,11}$$

dove φ è l'angolo polare nel piano yz.

Il legame fra le coordinate ξ, ζ e x, ρ è dato dalle formule

$$\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\zeta+a^2)}{a^2-b^2}\right]^{1/2}, \\ \rho &= \left[\frac{(\xi+b^2)(\zeta+b^2)}{b^2-a^2}\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{4,12}$$

Nel sistema sferoidale schiacciato i fuochi delle superficie coordinate (di ellissoidi e iperboloidi) giacciono su una circonferenza di raggio $\sqrt{a^2-c^2}$ nel piano xy (nella fig. 8 questa circonferenza ha il diametro AA'). Tracciamo un piano passante per un punto P e l'asse z. Esso intersecherà la circonferenza focale in due punti; siano r_1 e r_2 le distanze fra questi punti e il punto P. Se ρ, z sono le coordinate del punto P, allora

$$r_1^2 = (\rho - \sqrt{a^2-c^2})^2 + z^2, \quad r_2^2 = (\rho + \sqrt{a^2-c^2})^2 + z^2.$$

Le coordinate sferoidali ξ, η si esprimono in funzione di r_1, r_2 secondo le seguenti formule:

$$\xi = \left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2 - a^2, \quad \eta = \left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)^2 - a^2. \tag{4,13}$$

In un sistema sferoidale allungato i fuochi sono i due punti $x = \pm\sqrt{a^2-b^2}$ sull'asse x (i punti A, A' della fig. 9). Se r_1, r_2 sono le distanze fra questi due punti e il punto P, allora

$$r_1^2 = \rho^2 + (x - \sqrt{a^2-b^2})^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + (x + \sqrt{a^2-b^2})^2,$$

e le coordinate sferoidali ξ, ζ si esprimono in funzione di r_1, r_2 secondo le formule (4,13) (sostituendovi η con ζ).

Torniamo al problema del campo generato da un ellissoide carico la cui superficie è data dall'equazione (4,3). Nelle coordinate ellissoidali essa è una superficie coordinata $\xi = 0$. Perciò è chiaro che se cerchiamo il potenziale del campo come funzione della sola ξ, automaticamente saranno equipotenziali tutte le superficie ellissoidali $\xi = \text{cost}$, compresa la superficie del conduttore. In questo caso l'equazione di Laplace (4,6) diventa

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = 0,$$

da cui

$$\varphi(\xi) = A \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}.$$

Il limite di integrazione superiore è scelto in modo tale da garantire la scomparsa del campo nell'infinito. La costante A si può determinare facilmente dalla condizione che per grandi distanze r il campo deve tendere a quello coulombiano: $\varphi \approx e/r$, dove e è la carica totale del conduttore. Per $r \to \infty$ si ha $\xi \to \infty$; in questo caso $r^2 \approx \xi$ come risulta dall'equazione (4,1) con $u = \xi$. D'altra parte, per grandi valori di ξ abbiamo $R_\xi \approx \xi^{3/2}$ e $\varphi \approx 2A/\sqrt{\xi} = 2A/r$. Di qui concludiamo che $2A = e$ e otteniamo infine

$$\varphi(\xi) = \frac{e}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \tag{4,14}$$

L'integrale che compare qui è un integrale ellittico di prima specie. Alla superficie del conduttore corrisponde il valore $\xi = 0$, perciò per la capacità dell'ellissoide abbiamo

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{R_\xi}. \tag{4,15}$$

La distribuzione della densità di carica sulla superficie dell'ellissoide è determinata dalla derivata normale del potenziale

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{h_1} \frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi\sqrt{\eta\zeta}}.$$

Mediante le equazioni (4,4) è facile provare che per $\xi = 0$ abbiamo

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}.$$

Perció

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{4,16}$$

Per un ellissoide a un asse gli integrali (4,14) e (4,15) si esprimono mediante funzioni elementari. Per un ellissoide allungato ($a > b = c$) il potenziale del campo è dato dalla formula

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}, \tag{4,17}$$

e la sua capacità è

$$C = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\operatorname{Arch}(a/b)}. \tag{4,18}$$

Per un ellissoide schiacciato ($a = b > c$) abbiamo

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\arccos(c/a)}. \tag{4,19}$$

In particolare, per un disco circolare ($a = b$, $c = 0$)

$$C = 2a/\pi. \tag{4,20}$$

Passiamo al problema dell'ellissoide conduttore non carico collocato in un campo elettrico esterno omogeneo $\mathfrak{E}$. Senza perdere di generalità, è sufficiente considerare il campo esterno $\mathfrak{E}$ diretto lungo uno degli assi dell'ellissoide. In caso contrario, si può sviluppare $\mathfrak{E}$ in tre componenti lungo gli assi dell'ellissoide e cercare il campo risultante come sovrapposizione dei tre campi generati da ciascuna di queste componenti separatamente.

Il potenziale del campo omogeneo $\mathfrak{E}$ diretto lungo l'asse x (asse a dell'ellissoide) in coordinate ellittiche ha la forma

$$\varphi_0 = -\mathfrak{E}x = -\mathfrak{E}\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}. \tag{4,21}$$

Rappresentiamo il potenziale del campo al di fuori dell'ellissoide nella forma $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$, dove φ' determina la deformazione cercata del campo esterno da parte dell'ellissoide e cercheremo φ' nella forma

$$\varphi' = \varphi_0 F(\xi). \tag{4,22}$$

Nella funzione φ' i fattori dipendenti da η e ζ coincidono con quelli in φ_0; questa forma della funzione consente di soddisfare la condizione di frontiera per $\xi = 0$ e η, ζ arbitrari (sulla superficie dell'ellissoide). Sostituendo l'espressione (4,22) nell'equazione di Laplace (4,6) otteniamo per $F(\xi)$ la seguente equazione:

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln\left[R_\xi(\xi+a^2)\right] = 0.$$

Una delle sue soluzioni è $F = \text{cost}$ e l'altra ha la forma

$$F(\xi) = A\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}. \tag{4,23}$$

Il limite di integrazione superiore è scelto in modo tale che all'infinito ($\xi \to \infty$) il potenziale φ' tenda a zero. L'integrale che figura nell'ultima espressione è un integrale ellittico di seconda specie.

Sulla superficie dell'ellissoide si deve avere $\varphi = \text{costante}$. Affinché questa condizione sia soddisfatta per $\xi = 0$ e η, ζ arbitrari è necessario porre cost $= 0$. Scegliendo in modo appropriato il coefficiente A nella funzione $F(\xi)$ (così che si abbia $F(0) = -1$), otteniamo infine la seguente espressione per il potenziale del campo

attorno all'ellissoide in esame:

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)\,R_s} \Big/ \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)\,R_s} \right\}. \tag{4,24}$$

Cerchiamo ora la forma del potenziale φ' a grandi distanze r dall'ellissoide. A grandi valori di r corrispondono grandi valori della coordinata ξ e, fra l'altro, $r^2 \approx \xi$ come segue immediatamente dall'equazione (4,1). Perciò

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)R_s} \approx \int_{r^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{5/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

e per il potenziale φ' abbiamo

$$\varphi' = \frac{\mathfrak{E}x}{r^3} \frac{V}{4\pi n^{(x)}},$$

dove $V = 4\pi abc/3$ è il volume dell'ellissoide, mentre la grandezza $n^{(x)}$ e quelle analoghe che figurano in seguito $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ sono date dalle formule

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2)\,R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int \frac{ds}{(s+b^2)\,R_s},$$

$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{(s+c^2)\,R_s}. \tag{4,25}$$

L'espressione per φ', come doveva essere, ha la forma del potenziale del campo di un dipolo elettrico

$$\varphi' = \mathcal{P}_x \frac{x}{r^3},$$

mentre il momento di dipolo dell'ellissoide è

$$\mathcal{P}_x = \mathfrak{E}_x \frac{V}{4\pi n^{(x)}}. \tag{4,26}$$

Con espressioni analoghe si determinano i momenti di dipolo nel caso in cui il campo $\mathfrak{E}$ sia diretto lungo l'asse y o z.

Le costanti positive $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ dipendono solo dalla forma dell'ellissoide e non dal suo volume; esse si chiamano *coefficienti di depolarizzazione* [1]). Se non si scelgono gli assi coordinati diretti

[1]) Gli stessi coefficienti figurano nei problemi dell'ellissoide dielettrico in un campo elettrico esterno e dell'ellissoide magnetico in un campo magnetico (§ 8). Tabelle e grafici di questi coefficienti per ellissoidi di rotazione ed ellissoidi triassici si possono trovare negli articoli: *Stoner E. C.* — Phil. Mag., 1945, v. 36, p. 803; *Osborn J. A.* — Phys. Rev., 1945, v. 67, p. 351.

secondo gli assi dell'ellissoide, la formula (4,26) deve essere scritta in forma tensoriale:

$$\frac{4\pi}{V} n_{ik} \mathcal{P}_k = \mathfrak{E}_i. \tag{4,27}$$

Le grandezze $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ sono i valori principali del tensore simmetrico di rango due n_{ik}. Dal confronto con la definizione (2,13) risulta che $\alpha_{ik} = n_{ik}^{-1}/4\pi$ è il tensore di polarizzabilità dell'ellissoide conduttore.

Nel caso generale per valori di a, b, c arbitrari dalle definizioni di $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ segue innanzitutto che

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)} \quad \text{se} \quad a > b > c. \tag{4,28}$$

Inoltre, sommando gli integrali $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ e introducendo $u = R_s^2$ quale variabile di integrazione, troviamo che

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int\limits_{(abc)^2}^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}},$$

da dove

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1. \tag{4,29}$$

La somma di tre coefficienti di depolarizzazione è uguale all'unità (in forma tensoriale ciò significa che $n_{ii} = 1$). Poiché, d'altra parte, questi coefficienti sono positivi, ciascuno di essi non può superare l'unità.

Per una sfera ($a = b = c$) è chiaro, per ragioni di simmetria, che

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = {}^1/_3. \tag{4,30}$$

Per un cilindro (con asse lungo l'asse x, $a \to \infty$) abbiamo [1])

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = {}^1/_2. \tag{4,31}$$

Al caso limite a, $b \to \infty$ (lamina piana) corrispondono ovviamente i valori

$$n^{(x)} = n^{(y)} = 0, \quad n^{(z)} = 1.$$

Gli integrali ellittici (4,25) si esprimono mediante funzioni elementari per tutti gli ellissoidi di rotazione. Per un ellissoide di rotazione allungato ($a > b = c$) di eccentricità $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ abbiamo

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{e^3} (\text{Arth } e - e), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = 1/2\,(1 - n^{(x)}). \tag{4,32}$$

[1]) Questi valori per sfera e cilindro sono in accordo, s'intende, con i risultati ottenuti nel risolvere i problemi 1 e 2 del § 3.

Se l'ellissoide è vicino a una sfera ($e \ll 1$), abbiamo approssimativamente

$$n^{(x)} = {}^1/_3 - {}^2/_{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = {}^1/_3 + {}^1/_{15}e^2. \tag{4,33}$$

Per un ellissoide schiacciato ($a = b > c$)

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e), \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 1/2\,(1 - n^{(z)}), \tag{4,34}$$

dove $e = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$. Se $e \ll 1$, allora

$$n^{(z)} = 1/3 + 2/15e^2, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 1/3 - 1/15e^2. \tag{4,35}$$

Problemi

1. Determinare il campo di un disco circolare conduttore carico (di raggio a) esprimendolo in coordinate cilindriche. Trovare la distribuzione di carica sul disco.

Soluzione. La distribuzione di carica si ottiene passando nella formula (4,16) al limite $c \to 0$, $z \to 0$, fra l'altro, il rapporto $z/c = \sqrt{1 - r^2/a^2}$ (dove $r^2 = x^2 + y^2$) è in accordo con la formula (4,3). Ciò dà

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}.$$

Il potenziale del campo in tutto lo spazio è definito dalla formula (4,19) nella quale poniamo $c = 0$ ed esprimiamo ξ in funzione di r e z mediante l'equazione (4,1) per $c = 0$, $u = \xi$, $a = b$:

$$\varphi = \frac{e}{a}\operatorname{arctg}\left[\frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + [(r^2+z^2-a^2)^2 + 4a^2z^2]^{1/2}}\right]^{1/2}.$$

In prossimità del bordo del disco al posto di r e z introduciamo le coordinate ρ e θ in base alle relazioni $z = \rho \operatorname{sen}\theta$, $r = a - \rho\cos\theta$ ($\rho \ll a$) (fig. 10) e troviamo che

$$\varphi \approx \frac{e}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2\rho}}{a}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right),$$

in accordo con il risultato generale del problema 3 al § 3.

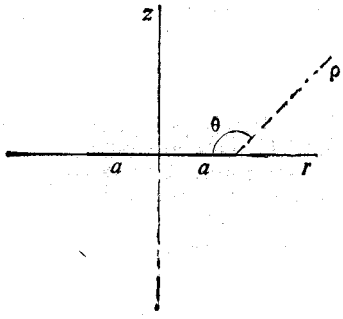


Fig. 10

2. Determinare il momento di quadrupolo elettrico di un ellissoide carico.

Soluzione. Il tensore del momento di quadrupolo di un conduttore carico è definito come $D_{ik} = e\,(3\overline{x_i x_k} - \overline{r^2}\delta_{ik})$, dove e è la carica totale e la barra indica la media calcolata secondo la legge

$$\overline{x_i x_k} = \frac{1}{e}\oint x_i x_k \sigma\, df.$$

È evidente che gli assi dell'ellissoide sono al tempo stesso gli assi principali del tensore D_{ik}. Usando per σ la formula (4,16) e per l'elemento di superficie

dell'ellissoide l'espressione

$$df = \frac{dx\,dy}{\nu_z} = \frac{dx\,dy}{z/c^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}$$

(ν è il vettore unitario normale alla superficie dell'ellissoide), otteniamo

$$\overline{z^2} = \frac{c}{4\pi ab}\int z\,dx\,dy = \frac{c^2}{3}$$

(si integra due volte rispetto a $dx\,dy$ sull'area della sezione dell'ellissoide con il piano xy). Quindi,

$$D_{xx} = \frac{e}{3}(2a^2-b^2-c^2), \qquad D_{yy} = \frac{e}{3}(2b^2-a^2-c^2),$$

$$D_{zz} = \frac{e}{3}(2c^2-a^2-b^2).$$

3. Trovare la distribuzione delle cariche sulla superficie di un ellissoide conduttore non carico sito in un campo omogeneo esterno.

Soluzione. Secondo la formula (1,9) abbiamo

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\left(\frac{1}{4\pi h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0}$$

(l'elemento di lunghezza lungo la direzione della normale alla superficie dell'ellissoide è, in accordo con la (4,5), $h_1 d\xi$). Mediante la formula (4,24) e tenendo conto che

$$\nu_x = \frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=0} = \frac{x}{2a^2h_1}\bigg|_{\xi=0},$$

otteniamo

$$\sigma = \mathfrak{E}\,\frac{\nu_x}{4\pi n^{(x)}}.$$

Se il campo esterno è diretto in modo arbitrario rispetto agli assi x, y, z dell'ellissoide, abbiamo

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\nu_i n_{ik}^{-1}\mathfrak{E}_k = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\nu_x}{n^{(x)}}\mathfrak{E}_x + \frac{\nu_y}{n^{(y)}}\mathfrak{E}_y + \frac{\nu_z}{n^{(z)}}\mathfrak{E}_z\right].$$

4. Risolvere il problema 3 per un disco circolare piano (di raggio a) disposto parallelamente al campo [1]. Determinare il momento di dipolo del disco.

Soluzione. Consideriamo il disco come limite di un ellissoide di rotazione con tendenza a zero del semiasse c. In questo caso, il coefficiente di depolarizzazione lungo questo asse (asse z) tende a 1, e lungo gli assi x e y tende a zero secondo la legge

$$n^{(z)} = 1 - \frac{\pi c}{2a}, \qquad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{\pi c}{4a}$$

che deriva dalla formula (4,34). La componente ν_x del vettore unitario normale alla superficie dell'ellissoide di rotazione tende a zero secondo la legge

[1]) Per un disco perpendicolare al campo la questione sarebbe banale; il campo resta omogeneo in tutto lo spazio, e sui due lati del disco sono indotte le cariche $\sigma = \pm\,\mathfrak{E}/4\pi$.

$$\nu_x = \frac{x}{a^2}\left(\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2} \to \frac{xc^2}{a^2 z} = \frac{xc}{a^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-1/2}.$$

Perciò la densità di cariche è

$$\sigma = \mathfrak{E}\,\frac{\nu_x}{4\pi n(x)} = \mathfrak{E}\,\frac{\rho\cos\varphi}{\pi^2\sqrt{a^2-p^2}},$$

dove ρ, φ sono le coordinate polari nel piano del disco.

Il momento di dipolo del disco è definito secondo la formula (4,26) e vale

$$\mathcal{P} = \frac{4a^3}{3\pi}\,\mathfrak{E}.$$

È da notare che esso è proporzionale ad a^3, anziché al « volume » del disco a^2c.

5. Determinare il potenziale del campo al di fuori di un ellissoide di rotazione conduttore non carico il cui asse di simmetria è parallelo al campo omogeneo esterno.

Soluzione. Per un ellissoide di rotazione allungato ($a > b = c$, il campo $\mathfrak{E}$ è diretto lungo l'asse x) otteniamo calcolando l'integrale nella formula (4,24)

$$\varphi = -\mathfrak{E}x\left\{1-\frac{\operatorname{Arth}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+\xi}}-\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+\xi}}}{\operatorname{Arth}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}-\sqrt{1-\dfrac{b^2}{c^2}}}\right\}.$$

La coordinata ξ è legata alle coordinate x e $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$ dalla relazione

$$\frac{\rho^2}{b^2+\xi}+\frac{x^2}{a^2+\xi}=1,$$

nello spazio esterno all'ellissoide $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$.

Per un ellissoide schiacciato ($a = b > c$) il campo $\mathfrak{E}$ è diretto lungo l'asse z. Ciò premesso, negli integrali che figurano nella formula (4,24) si deve sostituire $s + a^2$ con $s + c^2$ e considerare $\varphi_0 = -\mathfrak{E}z$. Come risultato otteniamo

$$\varphi = -\mathfrak{E}z\left\{1-\frac{\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1}}\right\},$$

inoltre, la coordinata ξ è legata alle coordinate z e $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ dalla relazione

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1.$$

6. Risolvere il problema 5 se l'asse di simmetria dell'ellissoide è perpendicolare al campo esterno.

Soluzione. Per un ellissoide allungato (il campo è diretto lungo l'asse z) abbiamo

$$\varphi = -\mathfrak{E}z\left\{1-\frac{\dfrac{\sqrt{\xi+a^2}}{\xi+b^2}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}}{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arth}\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}}\right\}.$$

Per un ellissoide schiacciato (il campo è diretto lungo l'asse x) abbiamo

$$\varphi = -\mathfrak{E}x \left\{ 1 - \frac{\dfrac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\xi+c^2}} - \dfrac{\sqrt{\xi+c^2}}{a^2+\xi}}{\dfrac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}-1} - \dfrac{c}{a^2}} \right\}.$$

7. Un campo omogeneo $\mathfrak{E}$ diretto lungo l'asse z (nel semispazio $z < 0$) è limitato da un piano conduttore $z = 0$ collegato a terra e avente un foro circolare. Determinare il campo e la distribuzione delle cariche sul piano.

Soluzione. Consideriamo il piano xy con un foro circolare di raggio a con il centro nell'origine delle coordinate come caso limite dell'iperboloide di rotazione a una falda

$$\frac{\rho^2}{a^2-|\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1, \quad \rho^2 = x^2+y^2$$

per $|\eta| \to 0$. Questi iperboloidi rappresentano una delle famiglie di superficie di coordinate definite da un sistema di coordinate sferoidali schiacciate con $c = 0$. La coordinata cartesiana z si esprime secondo la formula (4,9) in funzione di ξ e η mediante $z = \sqrt{\xi|\eta|}/a$, dove la radice $\sqrt{\xi}$ deve avere il segno $+$ o $-$ rispettivamente nei semispazi superiore o inferiore.

Cerchiamo la soluzione nella forma $\varphi = -\mathfrak{E}zF(\xi)$ e per la funzione $F(\xi)$ otteniamo

$$F(\xi) = \text{cost}\cdot \int \frac{d\xi}{\xi^{3/2}(\xi+a^2)} = \text{cost}\cdot \left(\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right)$$

(la costante di integrazione è supposta nulla in accordo con la condizione $\varphi = 0$ per $z \to +\infty$, cioè per $\sqrt{\xi} \to +\infty$). In questo caso, arctg dell'argomento negativo va inteso come

$$\operatorname{arctg} \frac{a}{-\sqrt{\xi}} = \pi - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}},$$

e non come $-\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi})$. In caso contrario, il potenziale avrebbe una discontinuità nel piano forato ($\xi = 0$). Scegliamo il coefficiente costante in modo che per $z \to -\infty$ (cioè per $\sqrt{\xi} \to -\infty$ e $\operatorname{arctg}(a/\sqrt{\xi}) \to \pi$) sia $\varphi = +\mathfrak{E}z$, e infine otteniamo

$$\varphi = -\mathfrak{E}\frac{z}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right] = -\mathfrak{E}\frac{\sqrt{|\eta|}}{\pi}\left[\frac{\sqrt{\xi}}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1\right].$$

Sulla superficie conduttrice $\eta = 0$ ed anche il potenziale, come deve essere, si annulla.

A grandi distanze $r = \sqrt{z^2+\rho^2}$ dal foro abbiamo $\xi \approx r^2$ e il potenziale (nel semispazio superiore) assume la forma

$$\varphi \approx \mathfrak{E}\frac{a^2}{3\pi}\frac{\sqrt{-\eta}}{\xi} = \mathfrak{E}\frac{a^3 z}{3\pi r^3},$$

cioè il campo è di tipo dipolare e corrisponde al momento di dipolo $\mathcal{P} = \mathfrak{E}\, a^3/3\pi$.

L'intensità del campo decresce come r^{-3}, e perciò il flusso del campo attraverso una superficie infinitamente lontana (nel semispazio $z > 0$) si annulla. Ciò vuol dire che tutte le linee di forza passanti per il foro si chiudono sul lato superiore del piano conduttore.

La distribuzione di carica sul piano conduttore si calcola nel seguente modo:

$$\sigma = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \mp \frac{a}{4\pi \sqrt{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \sqrt{-\eta}} =$$
$$= \pm \mathfrak{E} \frac{1}{4\pi^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}} \right],$$

dove i segni superiore e inferiore si riferiscono ai lati superiore e inferiore del piano. Secondo la formula

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1$$

che lega ξ con ρ e z, nel piano $z = 0$ abbiamo $\sqrt{\xi} = \pm \sqrt{\rho^2 - a^2}$. Quindi, la distribuzione di carica sul lato inferiore del piano conduttore è data dalla formula

$$\sigma = -\mathfrak{E} \frac{1}{4\pi^2} \left(\pi - \operatorname{arcsen} \frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} \right).$$

Per $\rho \to \infty$ abbiamo $\sigma = -\mathfrak{E}/4\pi$, come deve essere. Sul lato superiore abbiamo

$$\sigma = -\mathfrak{E} \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{a}{\sqrt{\rho^2 - a^2}} - \operatorname{arcsen} \frac{a}{\rho} \right).$$

La carica totale indotta sul lato superiore del piano è finita e vale

$$e' = \int_a^\infty \sigma \cdot 2\pi\rho \, d\rho = -\frac{a^2}{8} \mathfrak{E}.$$

8. Risolvere il problema 7 se il piano conduttore ha ora una fessura retta di larghezza $2b$.

Soluzione. Consideriamo il piano xy con una fessura lungo l'asse x come caso limite del cilindro iperbolico

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

per $|\eta| \to 0$. Questi cilindri iperbolici rappresentano una delle famiglie di superficie di coordinate ellissoidali per $a \to \infty$ e $c \to 0$. La coordinata cartesiana $z = \sqrt{\xi |\eta|}/b$.

Come nel problema 7, cerchiamo la soluzione nella forma $\varphi = -\mathfrak{E} z F(\xi)$ e per la funzione $F(\xi)$ otteniamo

$$F = \text{cost} \cdot \int \frac{d\xi}{\xi^{3/2} \sqrt{\xi + b^2}}.$$

Qui il coefficiente e la costante di integrazione sono determinati dalle condizioni $F = 0$ e $F = 1$, rispettivamente, per $z \to +\infty$ e $z \to -\infty$ (cioè per $\sqrt{\xi} \to +\infty$ e $\sqrt{\xi} \to -\infty$), e infine otteniamo

$$\varphi = \mathfrak{E} \frac{1}{2b} \left[\sqrt{\xi + b^2} \mp \sqrt{\xi} \right] \sqrt{|\eta|},$$

dove ora la radice $\sqrt{\xi}$ è supposta come grandezza positiva e i segni superiore e inferiore corrispondono alle regioni $z > 0$ e $z < 0$.

A grandi distanze dalla fessura nel semispazio superiore abbiamo $\xi \approx y^2 + z^2 = r^2$ e il potenziale

$$\varphi \approx \mathfrak{E} \frac{b}{4} \sqrt{\frac{|\eta|}{\xi}} = \mathfrak{E} \frac{b^2 z}{4r^2}$$

vale a dire che il campo è di tipo dipolare bidimensionale con momento di dipolo $\mathfrak{E} b^2/8$ per un'unità di lunghezza della fessura (si veda la formula data nel problema 2 del § 3).

La distribuzione di carica sul piano conduttore è data dalla formula

$$\sigma = -\mathfrak{E} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{|y|}{\sqrt{y^2 - b^2}} \mp 1 \right).$$

La carica totale indotta sul lato superiore del piano (riferita all'unità di lunghezza della fessura) vale

$$e' = 2 \int_b^\infty \sigma \, dy = -\mathfrak{E} \frac{b}{4\pi}.$$

In prossimità del bordo della fessura nell'espressione per $\varphi(\xi, \eta)$ si può porre $\xi \to 0$ e

$$\eta \approx -2b\rho \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

dove ρ, θ sono le coordinate polari nel piano yz calcolate a partire dal bordo della fessura ($y = b + \rho \cos\theta$, $z = \rho \operatorname{sen}\theta$). Allora

$$\varphi \approx \mathfrak{E} \sqrt{\frac{b\rho}{2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

in accordo con la soluzione del problema 3 nel § 3 per il caso $\theta_0 \ll 1$.

§ 5. *Forze agenti su un conduttore*

In un campo elettrico la superficie di un conduttore è soggetta all'azione di forze dovute al campo stesso. Queste forze si possono calcolare facilmente nel seguente modo.

La densità di flusso dell'impulso in un campo elettrico nel vuoto è definita dal noto tensore degli sforzi di Maxwell [1]:

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{E^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k \right).$$

Quanto alla forza agente sull'elemento di superficie $d\mathbf{f}$ del corpo, essa non rappresenta altro che il flusso dell'impulso « entrante » in esso dall'esterno, cioè è uguale a $\sigma_{ik}\, df_k = \sigma_{ik} n_k\, df$ (il segno è cambiato poiché il vettore della normale $\mathbf{n}$ è diretto verso l'esterno

[1]) Cfr. II § 33. Il tensore degli sforzi σ_{ik} si suole definire con segno opposto rispetto al tensore della densità di flusso dell'impulso. Questa definizione è usata negli altri volumi di questo Corso, tranne nel II § 33, dove per errore, σ_{ik} si usa con altro segno.

del solido e non verso l'interno). La grandezza $\sigma_{ik}n_k$ è, quindi, la forza $\mathbf{F}_{sup}$ riferita a 1 cm^2 della superficie. Tenendo conto che l'intensità $\mathbf{E}$ sulla superficie metallica non ha che la componente normale, otteniamo

$$\mathbf{F}_{sup} = \mathbf{n}\frac{E^2}{8\pi} \tag{5,1}$$

ossia, introducendo la densità di carica superficiale σ,

$$\mathbf{F}_{sup} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = 1/2\sigma\mathbf{E}.$$

In tal modo, sulla superficie conduttrice agiscono forze di « pressione negativa » dirette lungo la normale esterna alla superficie e uguali per grandezza alla densità di energia del campo.

La forza totale $\mathbf{F}$ agente sul conduttore si ottiene integrando la forza (5,1) su tutta la superficie conduttrice [1]):

$$\mathbf{F} = \oint \frac{E}{8\pi}\, d\mathbf{f}. \tag{5,2}$$

Tuttavia, è più comodo calcolare questa grandezza, in accordo con le regole generali della meccanica, derivando l'energia $\mathcal{U}$. Il fatto è che la forza agente sul conduttore lungo l'asse coordinato q è $-\partial\mathcal{U}/\partial q$, dove con la derivata si deve intendere la variazione dell'energia per traslazione parallela dell'intero corpo in questione lungo l'asse q. In questo caso l'energia deve essere espressa in funzione delle cariche dei conduttori (sorgenti del campo) e la derivazione va effettuata a cariche costanti. Denotando questo con l'indice e, scriviamo

$$F_q = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q}\right)_e. \tag{5,3}$$

Analogamente, la proiezione su un asse qualunque del momento delle forze agente sul conduttore vale

$$K = -\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\psi}\right)_e, \tag{5,4}$$

dove ψ è l'angolo di rotazione dell'intero corpo attorno a questo asse.

Se, invece, l'energia è espressa come funzione dei potenziali e non delle cariche dei conduttori, la questione del calcolo delle forze richiede uno studio particolare. Il fatto è che per mantenere costante il potenziale del conduttore (al momento della sua traslazione) è necessario ricorrere all'aiuto di corpi estranei. Ad esempio, si può mantenere costante il potenziale nel conduttore associandolo a un

[1]) In questo caso applichiamo la formula in esame a una superficie non coincidente letteralmente con la superficie del solido ma un po' spostata rispetto a quest'ultima per escludere l'influenza della struttura del campo in prossimità della superficie conduttrice (cfr. p. 13-14).

altro conduttore che abbia una capacità molto grande (« serbatoio di cariche »). Acquistando una carica e_a il conduttore la toglie dal suo serbatoio il cui potenziale φ_a non varia a causa della sua grande capacità. Cambia, tuttavia, l'energia del serbatoio diminuendo di $e_a\varphi_a$. Quando tutto il sistema di conduttori acquista le cariche e_a, l'energia dei serbatoi ad essi associati diminuisce di $-\sum e_a\varphi_a$. Quanto alla grandezza $\mathcal{U}$, in essa è presente la sola energia dei conduttori in esame, ma non l'energia dei serbatoi. In questo senso si può dire che $\mathcal{U}$ si riferisce ad un sistema energeticamente non isolato. In tal modo, per un sistema di conduttori i cui potenziali vengono mantenuti costanti non è $\mathcal{U}$ a fungere da energia meccanica, bensì la grandezza

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \sum_a e_a\varphi_a. \tag{5,5}$$

Sostituendovi la (2,2) troviamo che $\tilde{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{U}$ differiscono solo per il segno:

$$\tilde{\mathcal{U}} = -\mathcal{U}. \tag{5,6}$$

La forza F_q si ottiene derivando $\tilde{\mathcal{U}}$ rispetto a q a potenziali costanti, cioè

$$F_q = -\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{U}}}{\partial q}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q}\right)_\varphi. \tag{5,7}$$

In tal modo, le forze agenti sul conduttore si possono ottenere derivando $\mathcal{U}$ sia a cariche costanti che a potenziali costanti con la sola differenza che nel primo caso la derivata si deve considerare con il segno meno e nel secondo caso con il segno più.

Lo stesso risultato si potrebbe ottenere in modo più formale partendo dall'identità differenziale

$$d\mathcal{U} = \sum_a \varphi_a de_a - F_q dq, \tag{5,8}$$

nella quale $\mathcal{U}$ è considerata come una funzione delle cariche dei conduttori e della coordinata q; questa identità esprime il fatto che le derivate valgono: $\partial\mathcal{U}/\partial e_a = \varphi_a$, $\partial\mathcal{U}/\partial q = -F_q$. Passando alle variabili φ_a al posto di e_a, otteniamo

$$d\tilde{\mathcal{U}} = -\sum_a e_a d\varphi_a - F_q dq, \tag{5,9}$$

da cui deriva la formula (5,7).

Alla fine del § 2 abbiamo trattato l'energia di un conduttore in un campo elettrico omogeneo esterno. La forza totale agente su un conduttore non carico in un campo omogeneo è, ovviamente, nulla.

Ma l'espressione per l'energia (2,14) può servire alla determinazione della forza agente sul conduttore in un campo quasi omogeneo $\mathfrak{E}$, cioè in un campo che varia poco lungo il corpo. In questo campo, in prima approssimazione, è ancora possibile calcolare l'energia mediante la formula (2,14), mentre la forza **F** sarà determinata come gradiente di quest'energia:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \mathcal{U} = 1/2\alpha_{ik} V \operatorname{grad} \mathfrak{E}_i \mathfrak{E}_k. \tag{5,10}$$

Quanto al momento totale delle forze **K**, in generale, esso è diverso da zero già in un campo omogeneo esterno. Secondo le leggi generali della meccanica il momento **K** si può determinare considerando una rotazione virtuale infinitesima del corpo; la variazione dell'energia per questa rotazione è legata a **K** mediante la relazione $\delta\mathcal{U} = -\mathbf{K}\delta\boldsymbol{\psi}$, dove $\delta\boldsymbol{\psi}$ è l'angolo di rotazione. La rotazione del corpo di un angolo $\delta\boldsymbol{\psi}$ nel campo omogeneo è equivalente alla rotazione del campo rispetto al corpo di un angolo $-\delta\boldsymbol{\psi}$. La variazione del campo in questo caso è $\delta\mathfrak{E} = -[\delta\boldsymbol{\psi}\cdot\mathfrak{E}]$ e la variazione dell'energia

$$\delta\mathcal{U} = \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathfrak{E}}\,\delta\mathfrak{E} = -\delta\boldsymbol{\psi}\left[\mathfrak{E}\,\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathfrak{E}}\right].$$

Ma $\partial\mathcal{U}/\partial\mathfrak{E} = -\mathcal{P}$ come si vede dal confronto delle formule (2,13) e (2,14). Perciò $\delta\mathcal{U} = -[\mathcal{P}\mathfrak{E}]\,\delta\boldsymbol{\psi}$, di qui

$$\mathbf{K} = [\mathcal{P}\mathfrak{E}], \tag{5,11}$$

in accordo con l'espressione ordinaria nota dalla teoria del campo nel vuoto.

Se la forza e il momento totali agenti sul conduttore sono nulli, il conduttore resta immobile nel campo e si fanno sentire soprattutto effetti legati alla deformazione del corpo (la cosiddetta *elettrostrizione*). Le forze (5,1) agenti sulla superficie del conduttore portano al cambiamento della sua forma e del suo volume. In questo caso, poiché le forze sono di carattere estensivo, il volume del solido aumenta. Una determinazione completa della deformazione richiede la soluzione delle equazioni della teoria dell'elasticità con una data distribuzione delle forze (5,1) sulla superficie del conduttore. Se tuttavia si interessa alla sola variazione di volume, il problema può essere risolto molto semplicemente.

A tale scopo bisogna tener conto del fatto seguente: se la deformazione è debole (come si verifica di fatto nel caso della elettrostrizione), l'influenza della variazione della forma sulla variazione del volume è un piccolo effetto del secondo ordine. Perciò, in prima approssimazione, la variazione del volume si può considerare come il risultato di una deformazione senza variazione della forma, cioè come una estensione onnilaterale dovuta ad una pressione efficace d'eccesso ΔP distribuita uniformemente sulla superficie del corpo che sostituisce così la distribuzione esatta secondo la formula (5,1).

La variazione relativa del volume si ottiene moltiplicando ΔP per il coefficiente di estensione della sostanza. La pressione ΔP si determina in base a una nota formula come derivata dell'energia elettrica del corpo $\mathcal{U}$ rispetto al suo volume: $\Delta P = -\partial\mathcal{U}/\partial V$ [1]).

Supponiamo che il campo deformante sia generato dal conduttore carico stesso. Allora l'energia sarà $\mathcal{U} = e^2/2C$ e la pressione

$$\Delta P = -\frac{e^2}{2}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{C}\right).$$

Per una data forma del corpo la sua capacità (come grandezza avente dimensione di lunghezza) è proporzionale alle sue dimensioni lineari, cioè proporzionale a $V^{1/3}$. Perciò troviamo

$$\Delta P = \frac{e^2}{6CV} = \frac{e\varphi}{6V}. \tag{5,12}$$

Se, invece, il conduttore non carico si trova in un campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$, la sua energia è data dalla formula (2,14). Quindi, in questo caso, la pressione di estensione è

$$\Delta P = 1/2\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k. \tag{5,13}$$

Problemi

1. Un piccolo conduttore di capacità c (dell'ordine di grandezza delle sue dimensioni) si trova a distanza r dal centro di un conduttore sferico di raggio a ($a \gg c$). La distanza $r - a$ fra il conduttore c e la superficie della sfera è supposta grande soltanto rispetto a c, ma non rispetto ad a. Ambedue i conduttori sono collegati mediante un filo sottile e si trovano, quindi, allo stesso potenziale φ. Determinare la forza di mutua repulsione dei conduttori.

Soluzione. Essendo il conduttore c piccolo si può supporre che il suo potenziale sia composto dal potenziale $\varphi a/r$ creato alla distanza r dalla sfera grande e dal potenziale proprio e/c creato dalla carica e sita sul conduttore stesso. Di qui abbiamo $\varphi = \varphi a/r + e/c$ ossia $e = c\varphi\,(1 - a/r)$. La forza di interazione cercata F è definita come forza di repulsione coulombiana fra la carica e del conduttore c e la carica $a\varphi$ della sfera:

$$F = \frac{ac\varphi^2}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

(questa espressione è valida a meno di termini di ordine superiore rispetto a c). Questa forza è massima per $r = 3a/2$ (dove vale $F_{\max} = 4c\varphi^2/27a$) e decresce in entrambe le direzioni da questo punto.

2. Una sfera conduttrice carica è tagliata in due. Determinare la forza di repulsione fra le due semisfere [2]).

Soluzione. Supponiamo che le semisfere siano separate da una fessura infinitamente sottile e determiniamo la forza F agente su ciascuna semisfera median-

---

[1]) La grandezza così definita è l'espansione agente sulla superficie da parte del corpo stesso; quanto alla pressione agente sulla superficie dall'esterno, essa si ottiene cambiando il segno.

[2]) Nei problemi 2 e 3 è supposto che ambedue le semisfere si trovino ad un medesimo potenziale.

te l'integrazione rispetto alla loro superficie della forza $(E^2/8\pi)\cos\theta$ (che è la proiezione della forza (5,1) sulla direzione perpendicolare al piano di separazione delle semisfere). Nella fessura $E = 0$ e sulla superficie esterna $E = e/a^2$, dove a è il raggio della sfera ed e la carica totale su di essa. Come risultato otteniamo

$$F = \frac{e^2}{8a^2}.$$

3. Risolvere il problema 2 per una sfera non carica sita in un campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$ perpendicolare al piano del taglio.

Soluzione. Ragioniamo come per il problema 2 con la sola differenza che sulla superficie della sfera $E = 3\,\mathfrak{E}\cos\theta$ (in accordo con la soluzione del problema 1 al § 3). La forza cercata è

$$F = 9/16\ a^2\mathfrak{E}^2.$$

4. Determinare la variazione del volume e della forma di una sfera conduttrice sita in un campo elettrico omogeneo esterno.

Soluzione. La variazione del volume è $\Delta V/V = \Delta P/K$, dove K è il modulo multilaterale di estensione della sostanza e ΔP è definita dalla formula (5,13). Per la sfera abbiamo $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik} = 3\delta_{ik}/4\pi$ (la grandezza α del problema 1 del § 3), così

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\mathfrak{E}^2}{8\pi K}.$$

A causa della deformazione, la sfera si trasforma in un ellissoide allungato. Per determinare l'eccentricità di questo ellissoide vi può considerare la deformazione come una deformazione omogenea di scorrimento lungo il volume del corpo, così come per la variazione del volume totale abbiamo considerato una deformazione omogenea di estensione onnilaterale.

La condizione di equilibrio di un corpo deformato si può formulare come la condizione di minimo della somma delle energie elettrostatica ed elastica. La prima, secondo le formule (2,12) e (4,26), vale

$$\mathcal{U}_{\text{el}} = -\frac{V}{8\pi n}\mathfrak{E}^2 \approx -\frac{3V}{8\pi}\mathfrak{E}^2 - \frac{3V}{10\pi}\frac{a-b}{R}\mathfrak{E}^2,$$

dove R è il raggio iniziale della sfera, a e b sono i semiassi dell'ellissoide e

$$n \approx \frac{1}{3} - \frac{4}{15}\frac{a-b}{R}$$

il coefficiente di depolarizzazione (cfr. la (4,33)).

In virtù della simmetria assiale della deformazione (attorno alla direzione del campo, ossia attorno all'asse x) sono non nulle le sole componenti u_{xx} e $u_{yy} = u_{zz}$ del tensore di deformazione. Poiché consideriamo l'equilibrio rispetto alla variazione della forma, in questo caso, si può supporre costante il volume, cioè $u_{ii} = 0$. Perciò possiamo scrivere l'energia elastica nella forma

$$\mathcal{U}_{\text{elast}} = \frac{V}{2}u_{ik}\sigma_{ik} = \frac{V}{3}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(u_{xx} - u_{yy}),$$

dove σ_{ik} è il tensore degli sforzi elastici (cfr. VII § 4). Abbiamo

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2\mu(u_{xx} - u_{yy}),$$

dove μ è il modulo di scorrimento della sostanza e $u_{xx} - u_{yy} = (a - b)/R$. Perciò

$$\mathcal{U}_{\text{elast}} = \frac{2\mu(a-b)^2}{3R^2}V.$$

Minimizzando la somma $\mathcal{U}_{\text{elast}} + \mathcal{U}_{\text{el}}$ rispetto ad $a - b$ otteniamo

$$\frac{a-b}{R} = \frac{9}{40\pi\mu}\mathfrak{E}^2.$$

5. Trovare il legame tra la frequenza e la lunghezza di un'onda che si propaga sulla superficie piana carica di un conduttore liquido (nel campo di gravità). Ottenere la condizione di stabilità di questa superficie (*J. I. Frenkel*, 1935).

Soluzione. Supponiamo che l'onda si propaghi lungo l'asse x e che l'asse z sia diretto verticalmente verso alto. Lo spostamento verticale dei punti della superficie liquida è $\zeta = a \exp[i(kx - \omega t)]$. Se la superficie è immobile l'intensità del campo sopra di essa è $E_z = E = 4\pi\sigma_0$ e il suo potenziale $\varphi = -4\pi\sigma_0 z$, dove σ_0 è la densità di carica superficiale. Scriviamo il potenziale del campo sopra la superficie vibrante nella forma

$$\varphi = -4\pi\sigma_0 z + \varphi_1, \qquad \varphi_1 = \text{cost}\cdot e^{i(kx-\omega t)} e^{-kz}.$$

dove φ_1 è una piccola correzione soddisfacente all'equazione $\Delta\varphi_1 = 0$, che si annulla per $z \to \infty$. Lungo la superficie stessa del conduttore il potenziale deve avere un valore costante che supponiamo nullo; ne segue che

$$\varphi_1 |_{z=0} = 4\pi\sigma_0\zeta.$$

Secondo la formula (5,1), sulla superficie carica del liquido agisce una pressione negativa supplementare che a meno di termini del primo ordine rispetto a φ_1 vale

$$\frac{E^2}{8\pi} \approx \frac{E_z^2}{8\pi} \approx 2\pi\sigma_0^2 + k\sigma_0\varphi_1\Big|_{z=0} = 2\pi\sigma_0^2 + 4\pi\sigma_0^2 k\zeta.$$

Il termine costante $2\pi\sigma_0^2$ è inessenziale (lo si può includere nella pressione esterna costante).

Lo studio del moto idrodinamico in un'onda è analogo alla teoria delle onde capillari (cfr. VI § 61), differisce soltanto per la pressione supplementare suindicata. Sulla superficie del liquido otteniamo la condizione di frontiera

$$\rho g\zeta + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=0} - \alpha\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - 4\pi\sigma_0^2 k\zeta = 0,$$

dove α è il coefficiente di tensione superficiale, ρ la densità del liquido e Φ il potenziale della sua velocità; Φ e ζ sono legati, inoltre, dalla relazione

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Sostituendovi le due relazioni

$$\zeta = ae^{i(kx-\omega t)}, \qquad \Phi = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}$$

(Φ verifica l'equazione $\Delta\Phi = 0$) e escludendo a e A, otteniamo il legame cercato tra k e ω:

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho}(g\rho - 4\pi\sigma_0^2 k + \alpha k^2). \tag{1}$$

Affinché la superficie del liquido sia stabile la frequenza ω deve essere reale per tutti valori k (in caso contrario, figureranno delle ω complesse con la parte

immaginaria positiva e il fattore $e^{-i\omega t}$ crescerà indefinitamente). La condizione di positività del secondo membro della (1) dice: $(4\pi\sigma_0^2)^2 - 4g\rho\alpha < 0$ e di qui

$$\sigma_0^4 < g\rho\alpha/4\pi^2.$$

Questa è la condizione di stabilità.

6. Trovare la condizione di stabilità di una goccia sferica carica (*Rayleigh*, 1882).

Soluzione. La somma delle energie elettrostatica e superficiale della goccia è

$$\mathcal{U} = \frac{e^2}{2C} + \alpha S,$$

dove α è il coefficiente di tensione superficiale del liquido, C la capacità della goccia e S l'area della sua superficie. L'instabilità compare (al crescere di e) relativamente all' allungamento della sfera in ellissoide e si determina dall'istante in cui $\mathcal{U}$ diventa funzione decrescente dell'eccentricità (per un dato volume della goccia). La forma sferica corrisponde sempre all'estremo di $\mathcal{U}$; perciò la condizione di stabilità dice:

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial (a-b)^2}\right|_{a=b} > 0,$$

dove a, b sono semiassi dell'ellissoide e si deriva per $ab^2 =$ costante. Ricorrendo a una nota formula per la superficie dell'ellissoide e alla formula (4,18) per la sua capacità, otteniamo dopo un calcolo abbastanza lungo

$$e^2 < 16\pi a^3\alpha.$$

Questa condizione garantisce la stabilità della goccia rispetto a piccole deformazioni. Ma essa è più debole che la condizione di stabilità rispetto a grandi deformazioni, ossia dividendo in due parti uguali (gocce di cariche $e/2$ e raggi $a/2^{1/3}$):

$$e^2 < 16\pi a^3\alpha \frac{2^{1/3}-1}{2-2^{1/3}} = 0{,}35 \cdot 16\pi a^3\alpha.$$

Capitolo II

ELETTROSTATICA DEI DIELETTRICI

§ 6. *Campo elettrostatico nei dielettrici*

Passiamo ora allo studio del campo elettrico costante in un'altra categoria di mezzi materiali, ossia in dielettrici.

La prorpietà fondamentale dei dielettrici consiste nell'impossibilità che in essi circoli una corrente continua. Perciò, a differenza dei conduttori, l'intensità del campo elettrico costante nei dielettrici non deve essere necessariamente nulla, e dobbiamo dedurre delle equazioni per descrivere questo campo. Una di esse si ottiene calcolando la media dell'equazione (1,3) e, come in precedenza, si ha:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = 0. \tag{6,1}$$

La seconda si ottiene calcolando la media dell'equazione div $\mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho}. \tag{6,2}$$

Supponiamo che all'interno della sostanza dielettrica non sia introdotta nessuna carica; questo è il caso più comune e importante. Allora la carica totale in tutto il volume del dielettrico resta nulla anche dopo l'introduzione del dielettrico in un campo elettrico:

$$\int \bar{\rho}\, dV = 0.$$

Questa relazione integrale che deve essere soddisfatta per un corpo di qualsiasi forma significa che la densità di carica media può essere scritta come divergenza di un vettore che solitamente si indica con $-\mathbf{P}$:

$$\bar{\rho} = -\text{div}\,\mathbf{P}, \tag{6,3}$$

all'esterno del corpo si ha $\mathbf{P} = 0$. Integrando infatti rispetto al volume delimitato da una superficie che contenga il corpo senza intersecarlo in nessun punto, otteniamo

$$\int \bar{\rho} dV = -\int \text{div}\,\mathbf{P} dV = -\oint \mathbf{P}\, d\mathbf{f} = 0.$$

La grandezza $\mathbf{P}$ si chiama vettore di *polarizzazione dielettrica* (o, semplicemente, di polarizzazione) del corpo; un dielettrico in cui $\mathbf{P}$

è non nullo si dice *polarizzato*. Oltre alla densità di volume (6,3), il vettore **P** determina anche la densità superf ciale σ di cariche distribuite sulla superficie del dielettrico polarizzato. Se integriamo la formula (6,3) rispetto all'elemento di volume compreso tra due superficie unitarie infinitamente vicine e adiacenti da ambo le parti alla superficie del dielettrico, tenendo conto che sulla superficie unitaria esterna $\mathbf{P} = 0$, otteniamo (cfr. la deduzione della formula (1,9))

$$\sigma = P_n, \tag{6,4}$$

dove P_n è la componente del vettore **P** lungo la normale esterna alla superficie.

Per precisare il significato fisico della grandezza **P**, consideriamo il momento di dipolo totale di tutte le cariche interne del dielettrico; a differenza della carica totale, questa grandezza non deve essere nulla. In accordo con la definizione del momento di dipolo questa grandezza è l'integrale

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV.$$

Sostituendovi $\bar{\rho}$ nella forma (6,3) e integrando di nuovo rispetto al volume contenente il corpo, otteniamo

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV = -\int \mathbf{r}\, \mathrm{div}\, \mathbf{P}\, dV = -\oint \mathbf{r}\,(d\mathbf{f}\mathbf{P}) + \int (\mathbf{P}\nabla)\, \mathbf{r}\, dV.$$

L'integrale di superficie scompare e nel secondo integrale abbiamo $(\mathbf{P}\nabla)\, \mathbf{r} = \mathbf{P}$ così che

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV = \int \mathbf{P}\, dV. \tag{6,5}$$

In tal modo, il vettore di polarizzazione rappresenta il *momento di dipolo* (o, come si dice, il *momento elettrico*) dell'unità di volume del dielettrico [1]).

Sostituendo la (6,3) nella formula (6,2) otteniamo la seconda equazione del campo elettrostatico sotto la forma

$$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = 0, \tag{6,6}$$

dove è stata introdotta una nuova grandezza **D** che è definita come

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \tag{6,7}$$

---

[1]) Si deve notare che la relazione (6,3) all'interno del dielettrico e la condizione $\mathbf{P} = 0$ al suo esterno non definiscono di per se stesse la grandezza **P** univocamente; all'interno del dielettrico a **P** si può associare qualsiasi vettore della forma rot **f**. Soltanto stabilendo il legame con il momento di dipolo si può definire completamente il vettore **P**.

e si chiama *induzione elettrica*. L'equazione (6,6) è stata ottenuta considerando la densità media di cariche appartenenti al dielettrico. Se, invece, nel dielettrico vengono introdotte dall'esterno cariche estranee (le denomineremo appunto *estranee*), allora al secondo membro dell'equazione (6,6) va associata la loro densità

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{est}}. \tag{6,8}$$

Sulla superficie che separa due dielettrici devono essere soddisfatte determinate condizioni di frontiera. Una di esse segue dall'equazione rot $\mathbf{E} = 0$. Se la superficie di separazione è omogenea per quel che riguarda le sue proprietà fisiche [1]), questa condizione richiede che la componente tangenziale dell'intensità del campo sia continua, cioè che

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \tag{6,9}$$

(cfr. la deduzione della condizione (1,7)). La seconda condizione, invece, deriva dall'equazione div $\mathbf{D} = 0$ e chiede la continuità della componente dell'induzione lungo la normale alla superficie:

$$D_{n1} = D_{n2}. \tag{6,10}$$

Infatti, un balzo della componente normale $D_n = D_z$ implicherebbe un valore infinito della derivata $\partial D_z/\partial z$ (e con essa di div $\mathbf{D}$).

Sulla frontiera tra dielettrico e conduttore $\mathbf{E}_t = 0$ e la condizione per la componente normale si ricava dall'espressione (6,8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma_{\text{est}}, \tag{6,11}$$

dove σ_{est} è la densità di cariche estranee sulla superficie del conduttore (cfr. le (1,8)-(1,9)).

§ 7. *Permettività dielettrica*

Affinché le equazioni (6,1) e (6,6) costituiscano un sistema completo di equazioni descriventi il campo elettrostatico è necessario associare ad esse una relazione che leghi l'induzione $\mathbf{D}$ e l'intensità del campo $\mathbf{E}$. Nella stragrande maggioranza dei casi questa dipendenza si può ritenere lineare. Essa corrisponde ai primi termini dello sviluppo di $\mathbf{D}$ in potenze di $\mathbf{E}$ ed è dovuta alla piccolezza dei campi elettrici esterni rispetto ai campi molecolari interni.

La dipendenza lineare di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{E}$ assume una forma particolarmente semplice nel caso importante dei dielettrici isotropi. Evidentemente, nel dielettrico isotropo i vettori $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ devono avere una

[1]) Cioè omogenea per composizione, temperatura ecc. dei corpi a contatto. Se il dielettrico è un cristallo, la superficie deve essere un piano cristallino.

medesima direzione. Perciò la loro dipendenza lineare si riduce alla proporzionalità elementare [1])

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{7,1}$$

Il coefficiente ε si chiama *permettività dielettrica* della sostanza ed è una funzione del suo stato termodinamico.

Assieme all'induzione anche la polarizzazione è proporzionale al campo:

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E} \equiv \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}. \tag{7,2}$$

La grandezza $\varkappa$ si chiama coefficiente di polarizzabilità della sostanza (o la sua *suscettività dielettrica*). In seguito (§ 14) sarà mostrato che la permettività dielettrica è sempre superiore all'unità e la polarizzabilità sempre positiva. La polarizzabilità di un mezzo rarefatto (gas) si può supporre proporzionale alla sua densità.

Le condizioni di frontiera (6,9) e (6,10) sulla superficie di separazione tra due dielettrici isotropi assumono la forma

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \tag{7,3}$$

Quindi, la componente normale dell'intensità del campo fa un balzo variando in modo inversamente proporzionale alla permettività dielettrica dei mezzi corrispondenti.

In un dielettrico omogeneo $\varepsilon = \text{cost}$, e allora dall'equazione $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ segue che anche $\operatorname{div} \mathbf{P} = 0$. In accordo con la definizione (6,3) ciò significa che la densità di carica di volume in questo corpo è nulla (la densità superficiale (6,4), in generale, è diversa da zero). Viceversa, se il dielettrico non è omogeneo, allora la sua densità di volume è diversa da zero

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{div} \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon} \mathbf{D} = -\frac{\mathbf{D}}{4\pi} \operatorname{grad} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi\varepsilon} \nabla\varepsilon.$$

Se introduciamo il potenziale del campo elettrico secondo la formula $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, l'equazione (6,1) è automaticamente soddisfatta e l'equazione $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \varepsilon \mathbf{E} = 0$ dà

$$\operatorname{div} (\varepsilon \nabla\varphi) = 0. \tag{7,4}$$

---

[1]) Questa dipendenza che suppone l'annullamento di $\mathbf{D}$ contemporaneamente con $\mathbf{E}$ si verifica a rigore nei soli dielettrici omogenei per loro proprietà fisiche (composizione, temperatura ecc.). Nei corpi non omogenei $\mathbf{D}$ può avere valori non nulli anche per $\mathbf{E} = 0$ ed essere definita mediante gradienti delle grandezze termodinamiche variantisi lungo il corpo. Tuttavia, questi termini sono piccoli, perciò, e nel seguito, useremo la relazione (7,1) anche per corpi non omogenei.

Questa equazione si trasforma in quella di Laplace ordinaria soltanto in un mezzo dielettrico omogeneo. Le condizioni di frontiera (7,3) si possono riscrivere per il potenziale nella forma seguente:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \tag{7,5}$$

(la condizione di continuità delle derivate tangenziali del potenziale è equivalente alla condizione di continuità di φ stesso).

In un mezzo dielettrico omogeneo a tratti l'equazione (7,4) si riduce in ciascun tratto omogeneo all'equazione di Laplace $\Delta\varphi = 0$ in modo che le permettività dielettriche entrano nella soluzione del problema soltanto tramite le condizioni (7,5). Ma queste condizioni non contengono che il rapporto fra permettività dielettriche di due mezzi a contatto. Perciò, in particolare, la soluzione del problema elettrostatico per un corpo dielettrico con permettività ε_2 che si trova in un mezzo di permettività ε_1 si riduce allo stesso problema di un corpo di permettività dielettrica $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ nel vuoto.

Vediamo come variano i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti per il campo elettrostatico dei conduttori nel caso in cui non si trovino nel vuoto ma immersi in un mezzo dielettrico omogeneo e isotropo. In ambedue i casi la distribuzione del potenziale è descritta dall'equazione $\Delta\varphi = 0$ con la condizione di frontiera di costanza di φ sulla superficie del conduttore; l'unica differenza è che al posto del legame $E_n = -\partial\varphi/\partial n = 4\pi\sigma$ con la densità di carica superficiale ora si ha

$$D_n = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma. \tag{7,6}$$

Di qui si vede che la soluzione del problema del campo di un conduttore carico nel vuoto si trasforma nella soluzione dello stesso problema in un mezzo dielettrico mediante una sostituzione formale dei potenziali e delle cariche: o $\varphi \to \varepsilon\varphi$, $e \to e$, o $\varphi \to \varphi$, $e \to e/\varepsilon$. Nel caso dei conduttori carichi il potenziale e l'intensità del campo sono ridotti di ε volte rispetto ai loro valori nel vuoto; questo indebolimento del campo può essere interpretato intuitivamente come il risultato dello schermaggio parziale della carica del conduttore operato dalle cariche superficiali del dielettrico polarizzato adiacente. Se i potenziali dei conduttori sono mantenuti costanti, il campo resta costante ma aumentano di ε volte le cariche dei conduttori [1]).

Infine, notiamo che in elettrostatica si può considerare formalmente il conduttore (non carico) come un corpo di permettività dielettrica infinita, nel senso che la sua influenza sul campo elettrico esterno è la stessa di quella che eserciterebbe un dielettrico (di forma

[1]) Ne segue, in particolare, che nel riempire il condensatore di sostanza dielettrica la sua capacità aumenta di ε volte.

identica) con $\varepsilon \to \infty$. Infatti, in virtù della finitezza della condizione di frontiera per l'induzione **D**, quest'ultima deve restare finita all'interno del corpo anche per $\varepsilon \to \infty$; ma ciò significa che in tale campo si avrà $\mathbf{E} = 0$ in accordo con le proprietà del conduttore.

Problemi

1. Determinare il campo generato dalla carica puntiforme e sita a distanza h dalla frontiera piana di separazione tra due mezzi dielettrici distinti.

Soluzione. Indichiamo con O il punto in cui si trova la carica e nel mezzo 1 e con il punto O' (fig. 11) la sua immagine speculare dall'altro lato del piano di separazione (nel mezzo 2). Cercheremo il campo nel mezzo 1 come campo generato da due cariche puntiformi: la carica e e la carica fittizia e' nel punto O' (cfr. il metodo delle immagini, § 3):

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 r} + \frac{e'}{\varepsilon_1 r'},$$

dove r, r' sono rispettivamente le distanze tra il punto di osservazione e i punti O e O'. Quanto al campo nel mezzo 2, lo cerchiamo come campo generato dalla carica fittizia e'' sita nel punto O:

$$\varphi_2 = \frac{e''}{\varepsilon_2 r}.$$

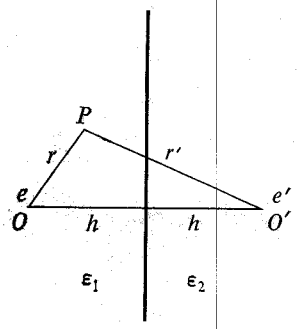


Fig. 11

Nel piano di frontiera ($r = r'$) devono essere soddisfatte le condizioni (7,5) dalle quali ricaviamo due equazioni

$$e - e' = e'', \qquad \frac{e + e'}{\varepsilon_1} = \frac{e''}{\varepsilon_2};$$

di qui

$$e' = e\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \qquad e'' = e\,\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{1}$$

Per $\varepsilon_2 \to \infty$ abbiamo $e' = -e$, $\varphi_2 = 0$, vale a dire che riotteniamo il risultato trovato nel § 3 per il campo di una carica puntiforme in prossimità di un piano conduttore.

La forza che agisce sulla carica e (*forza di immagine*) vale

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2 \varepsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)};$$

$F > 0$ corrisponde alla repulsione.

2. Risolvere il problema 1 per un filo retto infinito carico parallelo al piano di separazione e sito a distanza h da quest'ultimo.

La *soluzione* è analoga a quella del problema 1 con la sola differenza che i potenziali nei due mezzi sono:

$$\varphi_1 = -\frac{2e}{\varepsilon_1}\ln r - \frac{2e'}{\varepsilon_1}\ln r', \qquad \varphi_2 = -\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r,$$

dove e, e', e'' sono rispettivamente le cariche per unità di lunghezza del filo e delle sue « immagini » e r, r' le distanze nel piano perpendicolare ai fili. Per e, e', e'' si ottengono le stesse espressioni (1) e la forza agente per unità di lunghezza sul filo è

$$F=\frac{2ee'}{2h\varepsilon_1}=\frac{e^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{h\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}.$$

3. Determinare il campo creato da un filo retto infinito carico che è disposto (in un mezzo con permettività dielettrica ε_1) parallelamente a un cilindro (con $\varepsilon=\varepsilon_2$) di raggio a a distanza b ($b>a$) dal suo asse [1]).

Soluzione. Cerchiamo il campo nel mezzo 1 come il campo che sarebbe generato nel dielettrico omogeneo ε_1 dal filo reale carico (passante per il punto O, fig. 12) con una carica e per unità di lunghezza e da due fili virtuali con cariche

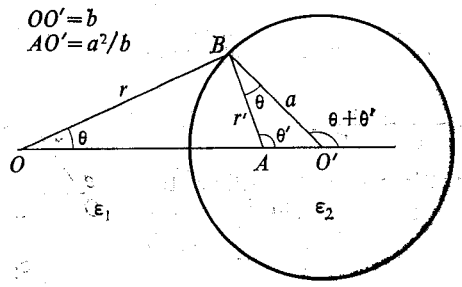


Fig. 12

e', e $-e'$ passanti rispettivamente per i punti A e O'. Il punto A si trova alla distanza $AO'=a^2/b$ dal centro della circonferenza; allora per tutti i punti della circonferenza le distanze r e r' rispettivamente dai punti O e A si trovano nel rapporto costante $r'/r=a/b$ per cui è possibile soddisfare le condizioni di frontiera su questa circonferenza. Quanto al campo nel mezzo 2, lo cerchiamo come campo che sarebbe generato nel mezzo omogeneo ε_2 dalle cariche virtuali e'' su un filo passante per il punto O.

È comodo formulare le condizioni di frontiera sulla superficie di separazione mediante il potenziale φ ($\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi$) e il potenziale vettoriale $\mathbf{A}$ (cfr. § 3) definito da $\mathbf{D}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ (in accordo con l'equazione $\operatorname{div}\mathbf{D}=0$); nel problema bidimensionale il vettore $\mathbf{A}$ è diretto lungo l'asse z (perpendicolarmente al piano della figura). Le condizioni di continuità delle componenti tangenti di $\mathbf{E}$ e della componente normale di $\mathbf{D}$ sono equivalenti alle condizioni

$$\varphi_1=\varphi_2,\quad A_1=A_2.$$

Per il campo del filo carico abbiamo nelle coordinate polari r, θ

$$\varphi=-(2e/\varepsilon)\ln r+\text{cost},\quad A=2e\theta+\text{cost}$$

(cfr. la formula (3.18)). Perciò le condizioni di frontiera sono

$$\frac{2}{\varepsilon_1}(-e\ln r-e'\ln r'+e'\ln a)=-\frac{2e''}{\varepsilon_2}\ln r+\text{cost},$$

$$2[e\theta+e'\theta'-e'(\theta+\theta')]=2e''\theta$$

[1]) Il problema analogo per una carica puntiforme in prossimità di una sfera dielettrica non si risolve in forma finita.

l'indicazione degli angoli è data in fig. 12, è stata usata la similitudine dei triangoli $OO'B$ e $BO'A$. Di qui $\varepsilon_2 (e + e') = \varepsilon_1 e''$, $e - e' = e''$ e per e', e'' si riottengono le espressioni (1) del problema 1.

La forza agente per unità di lunghezza sul filo carico è parallela a OO' e vale

$$F = eE = \frac{2ee'}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'}\right) = \frac{2e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a^2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, b\,(b^2 - a^2)}$$

($F > 0$ corrisponde alla repulsione). Nel limite $a,\ b \to \infty,\ b - a \to h$ questa espressione si trasforma nel risultato del problema 1.

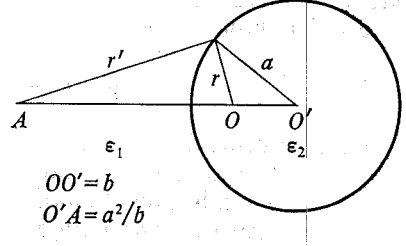


Fig. 13

4. Risolvere il problema 3 se il filo passa all'interno del cilindro di permettività dielettrica ε_2 $(b < a)$.

Soluzione. Cerchiamo il campo del mezzo 2 come campo del filo reale e (il punto O della fig. 13) e del filo virtuale e' passante per il punto A sito ora all'esterno del cilindro. Cerchiamo, invece, il campo del mezzo 1 come campo dei fili di cariche e'' e $e - e''$ passanti rispettivamente per i punti O e O'. Allo stesso modo, come nel problema precedente, otteniamo

$$e' = -e\,\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \qquad e'' = e\,\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

La forza di repulsione del filo (per $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$) dal cilindro è

$$F = \frac{2ee'}{\varepsilon_2}\,\frac{1}{OA} = \frac{2e^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\, b}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(a^2 - b^2)}.$$

5. Mostrare che il potenziale del campo $\varphi_A(\mathbf{r}_B)$ creato nel punto $\mathbf{r}_B$ di un mezzo dielettrico non omogeneo qualsiasi dalla carica puntiforme e sita nel punto $\mathbf{r}_A$ è uguale al potenziale $\varphi_B(\mathbf{r}_A)$ creato nel punto $\mathbf{r}_A$ dalla stessa carica sita nel punto $\mathbf{r}_B$.

Soluzione. I potenziali $\varphi_A(\mathbf{r})$ e $\varphi_B(\mathbf{r})$ verificano le equazioni

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_A) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi_B) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Moltiplicando la prima di esse per φ_B, la seconda per φ_A e sottraendo termine a termine l'una dall'altra troviamo

$$\operatorname{div}(\varphi_B\varepsilon\nabla\varphi_A) - \operatorname{div}(\varphi_A\varepsilon\nabla\varphi_B) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A)\varphi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B)\varphi_A(\mathbf{r}).$$

L'integrazione di questa uguaglianza su tutto lo spazio dà la relazione cercata: $\varphi_A(\mathbf{r}_B) = \varphi_B(\mathbf{r}_A)$.

§ 8. *Ellissoide dielettrico*

La polarizzazione di un ellissoide dielettrico collocato in un campo elettrico omogeneo esterno gode di alcune proprietà che rendono questo esempio di particolare interesse.

Consideriamo preliminarmente il caso particolare semplice di una sfera dielettrica in un campo esterno $\mathfrak{E}$. Indichiamo la sua permettività dielettrica con $\varepsilon^{(i)}$ e con $\varepsilon^{(e)}$ la permettività dielettrica

del mezzo esterno in cui si trova la sfera. Scegliamo il centro della sfera come origine delle coordinate sferiche (l'angolo polare θ si calcola a partire dalla direzione del campo $\mathfrak{E}$), e cerchiamo il potenziale del campo all'esterno della sfera nella forma

$$\varphi^{(e)} = -\mathfrak{E}\mathbf{r} + A\mathfrak{E}\frac{\mathbf{r}}{r^3};$$

il primo termine è il potenziale del campo esterno applicato, mentre il secondo termine, che si annulla all'infinito, dà la variazione cercata del potenziale causata dalla sfera (cfr. la soluzione del problema 1 al § 3). Quanto al potenziale del campo all'interno della sfera, lo cerchiamo nella forma

$$\varphi^{(i)} = -B\mathfrak{E}\mathbf{r};$$

questa è l'unica funzione soddisfacente all'equazione di Laplace che resta finita al centro della sfera e dipendente unicamente dal vettore costante $\mathfrak{E}$, ossia dall'unico parametro che figura nel problema in questione.

Le costanti A e B sono definite dalle condizioni di frontiera sulla superficie della sfera. Ma notiamo immediatamente che il campo interno della sfera $\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$ risulta essere omogeneo e differente dal campo applicato $\mathfrak{E}$ solo per il suo valore assoluto.

La condizione di frontiera di continuità del potenziale dà

$$E^{(i)} = \mathfrak{E}\left(1 - \frac{A}{R^3}\right)$$

(R è il raggio della sfera), mentre la condizione di continuità della componente normale dell'induzione è

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}\left(1 + \frac{2A}{R^3}\right).$$

Eliminando A da entrambe queste eguaglianze otteniamo

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{D}^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \tag{8,1}$$

ossia, sostituendovi $\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}}\mathfrak{E}. \tag{8,2}$$

Analogamente si risolve il problema di un cilindro dielettrico infinito in un campo esterno perpendicolare al suo asse (cfr. problema 2 al § 3). Il campo all'interno del cilindro, così come quello

all'interno della sfera nell'esempio precedente, è omogeneo e verifica la relazione

$$\tfrac{1}{2}\,(\mathbf{D}^{(i)} + \varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}, \tag{8,3}$$

ossia

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}}\,\mathfrak{E}. \tag{8.4}$$

Le relazioni (8,1) e (8,3) nelle quali la permettività dielettrica $\varepsilon^{(i)}$ della sfera o del cilindro non entra esplicitamente hanno un'importanza particolare in quanto sono valide a prescindere dalla dipendenza lineare tra **E** e **D** all'interno del corpo: esse sono soddisfatte qualunque sia la forma di questa dipendenza (anche per i corpi anisotropi). Hanno lo stesso carattere le relazioni

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathfrak{E} \tag{8,5}$$

per un cilindro in un campo longitudinale, e

$$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E} \tag{8.6}$$

per una lamina piana parallela in un campo che le è perpendicolare; queste eguaglianze derivano in modo immediato dalle condizioni di frontiera.

Si trova che ogni ellissoide con una relazione qualsiasi tra i semiassi a, b, c gode della proprietà di creare al suo interno un campo omogeneo (se esso si trova in un campo omogeneo esterno). Il problema della polarizzazione di un ellissoide dielettrico si risolve mediante l'uso di coordinate ellissoidali così come è stato risolto nel § 4 il problema analogo per un ellissoide conduttore.

Cerchiamo di nuovo il potenziale del campo all'esterno dell'ellissoide nella forma (4,22), ossia $\varphi_e' = \varphi_0 F(\xi)$ dove la funzione $F(\xi)$ è definita dalla formula (4,23). Quanto al potenziale φ_i all'interno dell'ellissoide, in esso non può figurare una funzione di questa forma poiché essa non soddisfa alla condizione secondo cui il campo deve essere finito in tutto il volume interno all'ellissoide. Consideriamo infatti la superficie $\xi = -c^2$ che rappresenta nel piano xy un'ellisse di semiassi $(a^2 - c^2)^{1/2}$ e $(b^2 - c^2)^{1/2}$ che si trova all'interno dell'ellissoide. Per $\xi \to -c^2$ l'integrale (4,23) si comporta come $\sqrt{\xi + c^2}$. L'intensità del campo, cioè il gradiente del potenziale, si comporta, quindi, come $(\xi + c^2)^{-1/2}$ e diventa infinito per $\xi = -c^2$. In tal modo, per il campo all'interno dell'ellissoide è valida la sola soluzione $F(\xi) =$ costante, vale a dire che φ_i va cercato nella forma

$$\varphi_i = B\varphi_0.$$

Si vede che il potenziale del campo interno φ_i differisce dal potenziale del campo omogeneo φ_0 per il solo fattore costante. In altre parole, il campo all'interno dell'ellissoide è omogeneo.

Non deduciamo qui le formule per il campo all'esterno dell'ellissoide. Quanto al campo omogeneo all'interno dell'ellissoide, lo si può trovare senza scrivere le condizioni di frontiera ma ricorrendo invece a risultati già noti.

Supponiamo dapprima che l'ellissoide si trovi nel vuoto ($\varepsilon^{(e)} = 1$). Allora tra i vettori $\mathbf{E}^{(i)}$, $\mathbf{D}^{(i)}$, $\mathfrak{E}$ (i quali hanno tutti e tre la stessa direzione, coincidente con l'asse x) deve esistere un legame lineare della forma

$$aE_x^{(i)} + bD_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x,$$

dove i coefficienti a, b non dipendono dalla permettività dielettrica dell'ellissoide $\varepsilon^{(i)}$, bensì solo dalla sua forma. L'esistenza di questo legame deriva dalla forma delle condizioni di frontiera, come abbiamo già provato precedentemente considerando gli esempi della sfera e del cilindro.

Per determinare a e b osserviamo che nel caso banale dove $\varepsilon^{(i)} = 1$ sarebbe semplicemente $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathfrak{E}$; di qui $a + b = 1$. Un altro caso già noto è rappresentato dall'ellissoide conduttore. Nel conduttore $\mathbf{E}^{(i)} = 0$ e l'induzione $\mathbf{D}^{(i)}$ non ha un senso fisico proprio ma può essere considerata come una grandezza formale legata al momento di dipolo totale dell'ellissoide mediante la relazione

$$\mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\mathbf{P} = \frac{4\pi}{V}\mathcal{P}.$$

In questo caso, secondo la formula (4,26) abbiamo

$$D_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x / n^{(x)},$$

cioè il coefficiente $b = n^{(x)}$ e perciò $a = 1 - n^{(x)}$

Otteniamo così la relazione

$$(1 - n^{(x)})\, E_x^{(i)} + n^{(x)} D_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x, \tag{8,7}$$

ossia

$$E_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x - 4\pi n^{(x)} P_x. \tag{8,8}$$

La grandezza $4\pi n^{(x)} P_x$ si chiama *campo depolarizzatore* [1]).

Le stesse relazioni (con i coefficienti $n^{(y)}$ e $n^{(z)}$) sono valide per un campo diretto lungo gli assi y e z. Come le formule particolari (8,1) e (8,3), esse sono valide qualunque sia la dipendenza tra **E** e **D** all'interno dell'ellissoide.

---

[1]) Formule analoghe sono valide anche per un ellissoide che si magnetizza nel campo magnetico omogeneo esterno (cfr. § 29). In questo caso i coefficienti $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ si dicono *coefficienti di smagnetizzazione.*

Per l'intensità del campo all'interno dell'ellissoide ricaviamo dall'(8,7) ponendovi $D_x^{(i)} = \varepsilon^{(i)} E_x^{(i)}$:

$$E_x^{(i)} = \frac{\mathfrak{E}_x}{1+(\varepsilon^{(i)}-1)\, n^{(x)}}, \tag{8,9}$$

e il momento di dipolo totale dell'ellissoide è

$$\mathcal{P}_x = VP_x = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon^{(i)}-1)\, VE_x^{(i)} = \frac{abc}{3}\, \frac{\varepsilon^{(i)}-1}{1+(\varepsilon^{(i)}-1)\, n^{(x)}}\, \mathfrak{E}_x. \tag{8,10}$$

Se il campo $\mathfrak{E}$ ha componenti lungo tutti e tre gli assi, il campo all'interno dell'ellissoide resta sempre omogeneo ma, in generale, non parallelo a $\mathfrak{E}$. Senza precisare la scelta del sistema di coordinate si può scrivere in generale la relazione (8,7) nella forma

$$E_i^{(i)} + n_{ik}\,(D_k^{(i)} - E_k^{(i)}) = \mathfrak{E}_i. \tag{8,11}$$

Il passaggio al caso in cui la permettività dielettrica del mezzo sia diversa da 1 si realizza mediante la semplice sostituzione di $\varepsilon^{(i)}$ con $\varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$. In questo caso la formula (8,7) diventa

$$(1-n^{(x)})\, \varepsilon^{(e)} E_x^{(i)} + n^{(x)} D_x^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \mathfrak{E}_x. \tag{8,12}$$

Questa formula può essere applicata, in particolare, al campo interno di una cavità ellissoidale in un mezzo dielettrico illimitato: a tale scopo bisogna porre $\varepsilon^{(i)} = 1$.

Problemi[1])

1. Determinare il momento delle forze agenti su un ellissoide di rotazione in un campo elettrico omogeneo.

Soluzione. Secondo la formula generale (16.13) il momento delle forze agenti su un ellissoide vale $\mathbf{K} = [\mathcal{P}\mathfrak{E}]$, dove $\mathcal{P}$ è il momento di dipolo dell'ellissoide. In un ellissoide di rotazione il vettore $\mathcal{P}$ giace nel piano passante per l'asse di simmetria e la direzione di $\mathfrak{E}$. Il momento delle forze, invece, è perpendicolare a questo piano e il suo valore assoluto calcolato mediante la formula (8,10) è

$$K = \frac{(\varepsilon-1)^2\, |\, 1-3n\, |\, V \operatorname{sen} 2\alpha}{8\pi\,(n\varepsilon+1-n)\,[(1-n)\,\varepsilon+1+n]}\, \mathfrak{E}^2,$$

dove α è l'angolo formato dalla direzione di $\mathfrak{E}$ e dall'asse di simmetria dell'ellissoide e n il coefficiente di depolarizzazione lungo questo asse (così che il coefficiente di depolarizzazione nelle direzioni perpendicolari all'asse di simmetria è $\frac{1}{2}(1-n)$). Il momento delle forze è diretto in modo tale che tenda a ruotare l'asse di simmetria dell'ellissoide allungato ($n < 1/3$) o schiacciato ($n > 1/3$), rispettivamente, in posizione parallela o perpendicolare al campo.

Per un ellissoide conduttore ($\varepsilon \to \infty$) abbiamo

[1]) Nei problemi del presente paragrafo si è supposto che l'ellissoide si trovi nel vuoto.

$$K = \frac{|1-3n|}{8\pi n(1-n)} V\mathfrak{E}^2 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

2. Una sfera dielettrica vuota (con permettività dielettrica ε e raggi interno ed esterno b e a) si trova in un campo elettrico omogeneo esterno $\mathfrak{E}$. Determinare il campo all'interno della sfera.

Soluzione. Analogamente al caso di una sfera piena, cerchiamo il potenziale del campo nel vuoto all'esterno della sfera (dominio *1*) e all'interno della cavità (dominio *3*) rispettivamente nelle forme

$$\varphi_1 = -\mathfrak{E}\cos\theta\left(r - \frac{A}{r^2}\right), \qquad \varphi_3 = -B\mathfrak{E}r\cos\theta,$$

e il potenziale del campo nello strato dielettrico (dominio *2*) nella forma

$$\varphi_2 = -C\mathfrak{E}\cos\theta\left(r - \frac{D}{r^2}\right),$$

dove A, B, C, D sono alcune costanti che si possono determinare dalle condizioni di continuità di φ e $\varepsilon\partial\varphi/\partial r$ sulle frontiere *1-2*, e *2-3*. In tal modo, il campo $\mathbf{E}_3 = B\mathfrak{E}$ all'interno della cavità risulta di essere omogeneo (mentre il campo $\mathbf{E}_2$ nello strato sferico è non omogeneo). Il calcolo delle costanti conduce al risultato

$$\mathbf{E}_3 = \mathfrak{E}\frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1) - 2(\varepsilon-1)^2(b/a)^3}$$

3. Risolvere il problema 2 per un cilindro vuoto in un campo omogeneo trasversale [1].

La *soluzione* è analoga a quella del problema precedente e conduce al risultato

$$\mathbf{E}_2 = \mathfrak{E}\frac{4\varepsilon}{(\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon-1)^2(b/a)^2}$$

§ 9. *Permettività dielettrica di una miscela*

Se la sostanza considerata rappresenta una miscela a dispersione fine (emulsione, miscela di polveri, ecc.), si può considerare il campo elettrico prendendone la media su volumi grandi rispetto alla scala delle eterogeneità. Nei confronti di questo campo medio la miscela è un mezzo omogeneo e isotropo e come tale può essere caratterizzato da un valore efficace della permettività dielettrica che denotiamo con $\varepsilon_{\text{misc}}$. Se $\overline{\mathbf{E}}$ e $\overline{\mathbf{D}}$ sono le medie siffatte dell'intensità e dell'induzione del campo, allora, per definizione,

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_{\text{misc}}\overline{\mathbf{E}}. \tag{9,1}$$

Se tutte le particelle della miscela sono isotrope e le differenze tra le loro permettività dielettriche piccole rispetto ad ε stessa è possibile calcolare $\varepsilon_{\text{misc}}$ in forma generale a meno di termini del secondo ordine rispetto alle differenze indicate.

[1]) In un campo longitudinale la risposta è immediata: $\mathbf{E}_3 = \mathfrak{E}$.

Scriviamo il valore locale dell'intensità del campo nella forma $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}$ e il valore locale della permettività dielettrica nella forma $\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon$, ove

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int \varepsilon \, dV \tag{9,2}$$

si ottiene calcolando la media rispetto al volume. Allora la media dell'induzione è

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})} = \bar{\varepsilon}\overline{\mathbf{E}} + \overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}} \tag{9,3}$$

(poiché, per definizione di $\delta\varepsilon$ e $\delta\mathbf{E}$, i loro valori medii sono nulli). Nell'approssimazione zero $\varepsilon_{\text{misc}} = \bar{\varepsilon}$; il primo termine di correzione non nullo sarà, naturalmente, del secondo ordine rispetto a $\delta\varepsilon$ come si vede dalla (9,3).

Dall'equazione div $\mathbf{D} = 0$ ricaviamo a meno di infinitesimi del primo ordine

$$\operatorname{div}(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}) = \bar{\varepsilon} \operatorname{div} \delta\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}}\nabla\delta\varepsilon = 0. \tag{9,4}$$

Calcoliamo la media del prodotto $\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}$ che figura nell'espressione (9,3) in due tappe. Prima di tutto, calcoliamo la media rispetto al volume per particelle della medesima sostanza, cioè per un dato valore $\delta\varepsilon$. La media di $\delta\mathbf{E}$ calcolata in questo modo si ottiene facilmente dall'equazione (9,4). Poiché la miscela è interamente isotropa, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = \frac{\partial}{\partial y}\overline{\delta E_y} = \frac{\partial}{\partial z}\overline{\delta E_z} = \frac{1}{3}\operatorname{div}\overline{\delta\mathbf{E}}.$$

Se, per esempio, il vettore $\overline{\mathbf{E}}$ è diretto lungo l'asse x, allora dall'equazione (9,4) ricaviamo

$$3\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = -\overline{E}_x \frac{\partial\delta\varepsilon}{\partial x},$$

da cui

$$\overline{\delta E_x} = -\frac{\overline{E}_x}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

Poiché la direzione dell'asse x è arbitraria, questa eguaglianza si può scrivere nella forma vettoriale seguente:

$$\overline{\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{\mathbf{E}}}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

Moltiplicandola per $\delta\varepsilon$ e calcolando infine la media rispetto a tutte le componenti della miscela, otteniamo

$$\overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}} = -\frac{\overline{E}}{3\bar{\varepsilon}}\overline{(\delta\varepsilon)^2}.$$

Infine, sostituendo questa espressione nella formula (9,3) e confrontando con la (9,1), otteniamo il risultato cercato

$$\varepsilon_{misc} = \bar{\varepsilon} - \frac{1}{3\bar{\varepsilon}} \overline{(\delta\varepsilon)^2}. \tag{9,5}$$

Questa formula può essere presentata in un'altra forma se osserviamo che a meno di termini del secondo ordine

$$\overline{\varepsilon^{1/3}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)^{1/3}} = \bar{\varepsilon}^{1/3} \left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2}\right).$$

Perciò

$$\varepsilon_{misc}^{1/3} = \overline{\varepsilon^{1/3}}. \tag{9,6}$$

In tal modo, si può concludere che nell'approssimazione considerata la radice cubica di ε è additiva.

Un altro caso limite, che consente uno studio preciso, è quello della permettività dielettrica di un'emulsione con differenza arbitraria tra le permettività dielettriche del mezzo (ε_1) e della fase dispersa (ε_2) ma con piccola concentrazione di quest'ultima; le particelle della fase dispersa sono supposte sferiche.

Nell'integrale

$$\frac{1}{V} \int (\mathbf{D} - \varepsilon_1 \mathbf{E})\, dV \equiv \bar{\mathbf{D}} - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{E}}$$

l'espressione integranda è non nulla soltanto all'interno delle particelle dell'emulsione. Perciò esso è proporzionale alla concentrazione volumetrica c dell'emulsione e nel calcolarlo si può supporre che le particelle dell'emulsione si trovino in un campo esterno coincidente con il campo medio $\bar{\mathbf{E}}$. Usando per le particelle sferiche la formula (8,2) otteniamo per i coefficienti di proporzionalità tra $\bar{\mathbf{D}}$ e $\bar{\mathbf{E}}$:

$$\varepsilon_{misc} = \varepsilon_1 + c \frac{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}. \tag{9,7}$$

Questa formula è valida a meno dei termini del primo ordine rispetto a c. Per ε_1 e ε_2 vicine essa coincide (a meno dei termini del primo ordine rispetto a c e del secondo ordine rispetto a $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$) con il risultato che si ottiene per c piccole mediante la formula (9,5).

§ 10. *Relazioni termodinamiche per dielettrici in un campo elettrico*

Per i conduttori non si pone il problema della variazione delle proprietà termodinamiche dovuta alla presenza di un campo elettrico. Poiché il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo la

variazione delle sue proprietà termodinamiche si riduce semplicemente all'aggiunta alla sua energia totale dell'energia del campo da esso generato nello spazio circostante [1]). Questa grandezza, in generale, è indipendente dallo stato termodinamico (in particolare, dalla temperatura) del corpo e perciò, ad esempio, non incide sulla sua entropia.

Viceversa, il campo elettrico penetrando all'interno di un corpo dielettrico esercita una profonda influenza sulle sue proprietà termodinamiche. Per lo studio di queste proprietà, determiniamo anzitutto il lavoro compiuto su un dielettrico termoisolato per una variazione infinitesima del campo al suo interno.

Il campo elettrico in cui si trova il dielettrico deve essere immaginato come un campo creato da alcuni conduttori carichi estranei; in questo caso si può considerare la variazione del campo come effetto della variazione delle cariche nei conduttori [2]). Per brevità, supponiamo che esista un solo conduttore con carica e e potenziale φ. Il lavoro da compiere perché la sua carica aumenti di una quantità infinitesima δe vale

$$\delta R = \varphi \delta e, \tag{10,1}$$

che è il lavoro meccanico compiuto dal campo in esame sulla carica δe per trasportarla dall'infinito (dove il potenziale del campo è nullo) alla superficie del conduttore che attraversa, quindi, una differenza di potenziale pari a φ. Esprimiamo δR in funzione dei valori del campo nello spazio riempito di sostanza dielettrica che circonda il conduttore.

Se D_n è la proiezione del vettore di induzione elettrica sulla direzione della normale alla superficie del conduttore, esterna rispetto al dielettrico (ed interna rispetto al conduttore), la densità superficiale delle cariche nel conduttore vale $-D_n/4\pi$, cosicché

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n \, df = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} \, d\mathbf{f}.$$

Tenendo conto che il potenziale φ è costante su tutta la superficie del conduttore, scriviamo

$$\delta R = \varphi \, \delta e = -\frac{1}{4\pi} \int \varphi \, \delta \mathbf{D} \, d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} (\varphi \, \delta \mathbf{D}) \, dV.$$

L'ultimo integrale del secondo termine è esteso a tutto il volume esterno al conduttore. Poiché il campo variato, così come quello

[1]) A prescindere qui dall'energia di legame tra carica e sostanza conduttrice; questa energia sarà studiata al § 23.

[2]) Le espressioni che saranno dedotte più avanti contengono i soli valori del campo all'interno del dielettrico e perciò sono indipendenti dall'origine del campo. Ciò premesso, non avremo bisogno di fare particolare menzione nei casi in cui il campo è generato non dai conduttori carichi ma da cariche estranee portate nel dielettrico stesso o dalla sua polarizzazione piroelettrica (cfr. § 13).

iniziale, verifica le equazioni del campo, allora div $\delta\mathbf{D} = 0$, in modo che

$$\operatorname{div}(\varphi\,\delta\mathbf{D}) = \varphi \operatorname{div}\delta\mathbf{D} + \delta\mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi = -\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}.$$

Otteniamo così l'importante formula:

$$\delta R = \int \frac{\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}}{4\pi}\,dV. \tag{10,2}$$

Sottolineiamo che l'integrazione in questa formula va estesa a tutto il campo, compreso il dominio di vuoto se il mezzo dielettrico non occupa tutto il volume dello spazio esterno al conduttore.

Il lavoro compiuto sul corpo termoisolato non rappresenta altro che la variazione dell'energia del corpo a entropia costante. Perciò l'espressione (10,2) deve essere aggiunta alla relazione termodinamica che definisce una variazione infinitesima dell'energia totale del corpo, che include anche l'energia del campo elettrico. Indicando questa energia con $\mathcal{U}$, di conseguenza, abbiamo

$$\delta\mathcal{U} = T\,\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon\delta\mathbf{D}\,dV \tag{10,3}$$

(T è la emperatura, $\mathcal{S}$ l'entropia del corpo) [1]. Così per l'energia libera totale $\mathcal{F} = \mathcal{U} - T\mathcal{S}$ [2]) abbiamo

$$\delta\mathcal{F} = -\mathcal{S}\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\delta\mathbf{D}\,dV. \tag{10,4}$$

Analoghe relazioni termodinamiche si possono scrivere anche per grandezze riferite all'unità di volume del corpo. Siano U, S e ρ l'energia interna, l'entropia e la massa per unità di volume del corpo. Come è noto, la relazione termodinamica ordinaria (in assenza di campo) per l'energia interna in un dato volume è

$$dU = T\,dS + \zeta\,d\rho,$$

dove ζ è il potenziale chimico della sostanza [3]. Se il campo nel

[1]) Nelle formule (10,3-4) il volume del corpo è supposto costante. Tuttavia, si deve tener conto del fatto che nel campo elettrico il corpo diventa, in generale, non omogeneo e perciò il volume non caratterizza il suo stato.

[2]) Questa grandezza è opportuno considerare soltanto a temperatura costante lungo il corpo.

[3]) Cfr. V § 24. Al posto della densità di massa abbiamo usato il numero di particelle N nell'unità di volume: $\rho = Nm$, dove m è la massa della molecola. Il potenziale chimico ζ riferito all'unità di massa differisce per un fattore dal potenziale chimico μ riferito a una particella: $\zeta = \mu/m$.

La notazione della densità di massa della sostanza con la stessa lettera ρ che serve alla notazione della densità di cariche non può causare equivoco in quanto queste grandezze non figurano mai insieme.

dielettrico non è nullo, a questa espressione si aggiunge un termine preso dall'espressione integranda della formula (10,3):

$$dU = T\,dS + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{10,5}$$

Per l'energia libera $F = U - TS$ per unità di volume del dielettrico abbiamo

$$dF = -S\,dT + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{E}\,d\mathbf{D}. \tag{10,6}$$

Le relazioni dedotte rappresentano la base della termodinamica dei dielettrici.

Si vede che le grandezze U e F sono potenziali termodinamici rispetto alle variabili S, ρ, $\mathbf{D}$ e T, ρ, $\mathbf{D}$, rispettivamente. In particolare, si può ottenere l'intensità del campo derivando questi potenziali rispetto alle componenti del vettore $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{E} = 4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{D}}\right)_{S,\rho} = 4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\rho}. \tag{10,7}$$

L'espressione dell'energia libera in questa relazione è più conveniente poiché la sua derivata viene presa a temperatura costante, mentre l'energia interna in questo caso viene espressa in funzione di una grandezza meno conveniente, ossia mediante l'entropia.

Accanto a U e F è opportuno introdurre potenziali termodinamici in cui da variabili indipendenti fungono le componenti del vettore $\mathbf{E}$ e non di $\mathbf{D}$. Tali grandezze sono

$$\tilde{U} = U - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}, \quad \tilde{F} = F - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi} \tag{10,8}$$

per i differenziali delle quali abbiamo

$$\begin{aligned} d\tilde{U} &= T\,dS + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{D}\,d\mathbf{E}, \\ d\tilde{F} &= -S\,dT + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{10,9}$$

Di qui, in particolare, ricaviamo

$$\mathbf{D} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{S,\rho} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}}\right)_{T,\rho}. \tag{10,10}$$

Notiamo che il legame tra le grandezze termodinamiche contrassegnate dal segno $\sim$ sopra la lettera e quelle senza questo segno corrisponde al legame introdotto al § 5 per l'energia del campo elettrostatico dei conduttori nel vuoto. Infatti, l'integrale $\int \mathbf{ED}\,dV$ si può trasformare come abbiamo fatto nel § 2, ricorrendo all'equazione

div $\mathbf{D} = 0$ nel volume del dielettrico e alla condizione di frontiera $D_n = 4\pi\sigma$ sulla superficie dei conduttori:

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{ED}\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{D}\,dV = \frac{1}{4\pi}\sum_a \int \varphi_a D_n\,df = \sum_a \varphi_a e_a. \tag{10,11}$$

Perciò, ad esempio, l'energia interna è

$$\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \int \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}\,dV = \mathcal{U} - \sum_a \varphi_a e_a, \tag{10,12}$$

in accordo con la definizione (5,5).

È utile anche confrontare le formule per le variazioni infinitesime di queste grandezze espresse in funzione delle cariche e dei potenziali dei conduttori (sorgenti del campo). Così, per la variazione dell'energia libera (a temperatura data) abbiamo

$$(\delta\mathcal{F})_T = \delta R = \sum_a \varphi_a \delta e_a. \tag{10,13}$$

Per la variazione di $\tilde{\mathcal{F}}$ otteniamo

$$(\delta\tilde{\mathcal{F}})_T = (\delta\mathcal{F})_T - \delta\sum_a \varphi_a e_a = -\sum_a e_a \delta\varphi_a. \tag{10,14}$$

Si può dire che le grandezze senza il segno $\sim$ sono i potenziali termodinamici rispetto alle cariche dei conduttori, e le grandezze con il segno $\sim$ quelli rispetto ai loro potenziali.

Come è noto dalla termodinamica, i diversi potenziali termodinamici godono della proprietà di raggiungere, all'equilibrio termico, un minimo rispetto a diverse variazioni dello stato del corpo. Per formulare queste condizioni di equilibrio in un campo elettrico è necessario indicare se le variazioni dello stato siano considerate mantenendo costanti le cariche o i potenziali dei conduttori quali sorgenti del campo. Così, $\mathcal{F}$ o $\tilde{\mathcal{F}}$ hanno all'equilibrio un minimo rispetto alle variazioni di stato che si verificano a temperatura costante e, rispettivamente, a cariche o potenziali costanti dei conduttori (lo stesso possiamo dire di $\mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ ad entropia costante del corpo).

Se nel corpo possono verificarsi processi che non hanno un legame diretto con il campo elettrostatico (reazioni chimiche, ad esempio), la condizione d'equilibrio rispetto a questi processi è data dal minimo di F a densità, temperatura e induzione $\mathbf{D}$ del corpo date oppure dal minimo di $\tilde{F}$ a densità, temperatura e intensità del campo $\mathbf{E}$ costanti.

Tuttora non abbiamo avanzato nessuna ipotesi sulla dipendenza di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{E}$; poiché tutte le relazioni termodinamiche ottenute sono

valide qualunque sia questa dipendenza. Applichiamole ora a un dielettrico isotropo in cui la dipendenza è lineare $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. In questo caso l'integrazione delle relazioni (10,5) e (10,6) dà

$$U = U_0(S, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \quad F = F_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}, \tag{10,15}$$

dove U_0 e F_0 sono riferite a un dielettrico in assenza di campo. In tal modo, nel caso considerato la grandezza

$$\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} \tag{10,16}$$

rappresenta la variazione di energia interna (per dati valori dell'entropia e della densità) causata dal campo o la variazione di energia libera (a date temperatura e densità) per unità di volume del mezzo dielettrico.

Le espressioni per i potenziali $\tilde{U}$ e $\tilde{F}$ sono analoghe:

$$\tilde{U} = U_0(S, \rho) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \quad \tilde{F} = F_0(T, \rho) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{10,17}$$

Si vede quindi che le differenze $U - U_0$ e $\tilde{U} - U_0$ differiscono in questo caso solo per il segno, come abbiamo mostrato anche per il campo elettrico nel vuoto (§ 5). Tuttavia, in un mezzo dielettrico questa relazione è valida soltanto se esiste un legame lineare tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$.

A titolo di informazione che sarà utile in seguito, scriviamo le formule per la densità di entropia S e per il potenziale chimico ζ della sostanza che derivano dalle espressioni (10,15):

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho, \mathbf{D}} = S_0(T, \rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right) = S_0(T, \rho) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho, \tag{10,18}$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{T, \mathbf{D}} = \zeta_0(T, \rho) - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T. \tag{10,19}$$

Si intende, che ambedue queste grandezze sono non nulle soltanto all'interno del dielettrico.

L'energia libera totale si ottiene integrando la (10,15) su tutto lo spazio; tenendo conto della (10,11), abbiamo

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} dV = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a. \tag{10,20}$$

L'ultima espressione coincide formalmente con la formula che esprime l'energia del campo elettrostatico dei conduttori nel vuoto. Allo stesso risultato si può arrivare immediatamente partendo dalla variazione $\delta\mathscr{F}$(10,13) per una variazione infinitesima delle cariche

dei conduttori. In questo caso, per legame lineare di **D** con **E**, tutte le equazioni del campo e le loro condizioni di frontiera sono anch'esse lineari. Perciò i potenziali dei conduttori devono essere (così come per il campo nel vuoto) funzioni lineari delle loro cariche e l'integrazione dell'uguaglianza (10,13) conduce alla formula (10,20).

Sottolineiamo che in queste considerazioni non è stato supposto affatto che il dielettrico occupi tutto lo spazio all'esterno dei conduttori. Se si verifica quest'ultima circostanza, possiamo procedere ulteriormente e, ricorrendo ai risultati ottenuti alla fine del § 7, affermare quanto segue. Per cariche dei conduttori date l'introduzione di un mezzo dielettrico diminuisce di ε volte sia i potenziali dei conduttori che l'energia del campo (rispetto ai valori di queste grandezze per il campo nel vuoto). Se invece sono i potenziali dei conduttori mantenuti costanti, l'energia del campo aumenta di ε volte (insieme con le cariche dei conduttori).

Problema

Determinare l'altezza h del livello di un liquido assorbito da un condensatore piano verticale.

Soluzione. Per dati potenziali dei rivestimenti del condensatore, $\mathscr{F}$ deve essere minima e in essa bisogna tener conto anche dell'energia $\rho g h^2/2$ della colonna di liquido nel campo di gravità. Da questa condizione si ottiene facilmente che

$$h = \frac{\varepsilon - 1}{2\pi\rho g} E^2.$$

§ 11. *Energia libera totale di un corpo dielettrico*

L'energia libera totale $\mathscr{F}$ (o l'energia interna totale $\mathscr{U}$), in accordo con la definizione data nel paragrafo precedente, include in sé anche l'energia del campo elettrico esterno che polarizza il dielettrico; questo campo si può supporre come quello creato da un insieme di conduttori con date cariche totali. Accanto a questa grandezza $\mathscr{F}$ è opportuno considerare l'energia libera totale dalla quale è esclusa l'energia del campo che esisterebbe in tutto lo spazio se non vi fosse il corpo. Indichiamo con $\mathfrak{E}$ l'intensità di quest'ultimo campo. Allora l'energia libera «totale» nel senso suindicato è uguale all'integrale

$$\int \left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right) dV, \tag{11,1}$$

dove F è la densità di energia libera. Indicheremo questa grandezza con la stessa lettera $\mathscr{F}$, come nel § 10 denotava l'integrale $\int F\, dV$. Si deve sottolineare che la differenza tra le due definizioni di $\mathscr{F}$ si riduce a una grandezza indipendente dallo stato termodinamico e dalle proprietà del dielettrico e perciò, in generale, non incide sulle

relazioni differenziali termodinamiche fondamentali valide per questa grandezza [1]).

Calcoliamo la variazione di $\mathscr{F}$ per una variazione infinitesima del campo che avvenga a temperatura costante e senza violazione dell'equilibrio termodinamico del mezzo.

Poiché $\delta F = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\delta\mathbf{D}$, abbiamo

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D} - \mathfrak{E}\,\delta\mathfrak{E})\,dV.$$

Questa espressione si può riscrivere identicamente nella forma

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,\delta\mathfrak{E}\,dV + \frac{1}{4\pi}\int\mathbf{E}\,(\delta\mathbf{D}-\delta\mathfrak{E})\,dV - \\ -\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\,\delta\mathfrak{E}\,dV. \qquad (11,2)$$

Nel primo integrale scriviamo $\delta\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\delta\varphi_0$ (φ_0 è il potenziale del campo $\mathfrak{E}$) e trasformiamolo in parti

$$\int\operatorname{grad}\delta\varphi_0\,(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,dV = \int\delta\varphi_0\,(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f} - \int\delta\varphi_0\operatorname{div}(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,dV.$$

È facile vedere che entrambi gli integrali a secondo membro dell'uguaglianza si annullano. Per l'integrale di volume ciò deriva immediatamente dalle equazioni $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ e $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ cui soddisfa il campo nel dielettrico e il campo nel vuoto, rispettivamente. Il primo integrale, invece, è esteso alla superficie dei conduttori che generano il campo e ad una superficie infinitamente lontana. L'ultimo integrale, come sempre, si annulla e su ciascuno dei conduttori $\delta\varphi_0$ = costante, cosicché

$$\oint\delta\varphi_0\,(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f} = \delta\varphi_0\oint(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,d\mathbf{f}.$$

Ma il campo $\mathfrak{E}$, per definizione, è creato dalle stesse sorgenti che il campo $\mathbf{E}$ con induzione $\mathbf{D}$ (cioè dai medesimi conduttori con le stesse cariche totali e). Perciò entrambi gli integrali $\oint D_n df$ e $\oint\mathfrak{E}_n df$ sono uguali alla stessa grandezza $4\pi e$, e la loro differenza è nulla.

Analogamente proviamo che è nullo anche il secondo termine nella (11,2) (a tale scopo sostituiamo in esso $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ e realizziamo la stessa trasformazione). Infine si ottiene

$$\delta\mathscr{F} = -\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\,\delta\mathfrak{E}\,dV = -\int\mathbf{P}\,\delta\mathfrak{E}\,dV. \qquad (11,3)$$

[1]) È da notare che non avrebbe senso sottrarre da F la grandezza $E^2/8\pi$ in quanto $\mathbf{E}$ è un campo già modificato dalla presenza del dielettrico, e perciò la differenza $F - (E^2/8\pi)$ non si dovrebbe considerare affatto come densità di energia libera del dielettrico come tale.

Ciò che è notevole è che l'integrale in questa espressione è esteso al solo volume occupato dal mezzo dielettrico poiché all'esterno del corpo $\mathbf{P} = 0$.

Sottolineiamo, tuttavia, che l'espressione integranda $\mathbf{P}\delta\mathfrak{E}$ non può essere interpretata come variazione della «densità» di energia libera del corpo, come è stato fatto in relazione alle formule (10,3) e (10,4). Prima di tutto, questa «densità» deve esistere anche all'esterno del corpo, poiché la presenza di quest'ultimo deforma il campo anche nello spazio circostante. È chiaro anche che la densità di energia in ciascun punto del corpo può dipendere esclusivamente dal campo che realmente esiste e non dal campo che esisterebbe in assenza del corpo stesso.

Se il campo esterno $\mathfrak{E}$ è omogeneo, allora

$$\delta\mathcal{F} = -\delta\mathfrak{E} \int \mathbf{P}\, dV = -\mathcal{P}\, \delta\mathfrak{E}, \tag{11,4}$$

dove $\mathcal{P}$ è il momento di dipolo elettrico totale del corpo. Perciò l'identità termodinamica per l'energia libera si può scrivere, in questo caso, nel modo seguente

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S}dT - \mathcal{P}d\mathfrak{E}. \tag{11,5}$$

Il momento elettrico totale del corpo si ottiene, quindi, derivando l'energia libera totale:

$$\mathcal{P} = -\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{E}}\right)_T. \tag{11,6}$$

Notiamo che l'ultima formula si può ricavare immediatamente dalla formula statistica generale

$$\overline{\frac{\partial\hat{\mathcal{H}}}{\partial\lambda}} = \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\lambda}\right)_T,$$

dove $\hat{\mathcal{H}}$ è l'hamiltoniano del corpo come sistema di particelle che lo compongono e λ un parametro che caratterizza le condizioni esterne in cui si trova il corpo (cfr. V le formule (11,4), (15,11)). Per un corpo che si trova nel campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$ l'hamiltoniano contiene il termine $-\mathfrak{E}\hat{\mathcal{P}}$, ove $\hat{\mathcal{P}}$ è l'operatore del momento di dipolo; considerando $\mathfrak{E}$ come parametro λ otteniamo la formula cercata.

Se $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ sono legate dalla dipendenza lineare $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, si può calcolare analogamente in modo esplicito sia la variazione $\delta\mathcal{F}$ che la grandezza $\mathcal{F}$ stessa. Abbiamo

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \frac{\mathbf{ED} - \mathfrak{E}^2}{8\pi}\, dV.$$

Riscriviamo questa espressione nella forma

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{E} + \mathfrak{E})(\mathbf{D} - \mathfrak{E})\, dV - \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}(\mathbf{D} - \mathbf{E})\, dV.$$

Il primo termine a destra dell'uguaglianza si annulla, il che si prova facilmente ponendo $\mathbf{E} + \mathfrak{E} = -\text{grad}\ (\varphi + \varphi_0)$ e attuando una trasformazione analoga a quella suindicata. Perciò otteniamo

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 (V,\ T) = -\frac{1}{2} \int \mathfrak{E}\mathbf{P}\, dV. \tag{11,7}$$

In particolare, nel campo omogeneo esterno

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 (V,\ T) = -\,{}^1/_2\, \mathfrak{E}\mathcal{P}. \tag{11,8}$$

L'ultima uguaglianza si potrebbe ottenere anche integrando direttamente la relazione (11,3) se si tiene conto che in virtù della linearità di tutte le equazioni del campo (per $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$) il momento elettrico $\mathcal{P}$ deve essere funzione lineare di $\mathfrak{E}$.

La dipendenza lineare tra le componenti di $\mathcal{P}$ e $\mathfrak{E}$ si può scrivere nella forma

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{11,9}$$

così come è stato fatto nel caso dei conduttori (§ 2). Tuttavia, a differenza dei conduttori, la «polarizzabilità» di un corpo dielettrico dipende non soltanto dalla sua forma, ma anche dalla sua costante dielettrica. La simmetria del tensore α_{ik} (menzionata già nel § 2) deriva immediatamente dalla relazione (11,6); è sufficiente osservare che la derivata seconda

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathfrak{E}_k\, \partial \mathfrak{E}_i} = -\frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial \mathfrak{E}_k} = -V\alpha_{ik}$$

è indipendente dall'ordine della derivazione.

La formula (11,7) è ancora più semplice nel caso importante in cui ε sia vicina a 1, cioè quando la suscettività dielettrica $\varkappa = (\varepsilon - 1)/4\pi$ è piccola. In questo caso, nel calcolare l'energia si può trascurare la deformazione del campo causata dal corpo ponendo

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E} \approx \varkappa\mathfrak{E}.$$

Allora

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{\varkappa}{2} \int \mathfrak{E}^2\, dV, \tag{11,10}$$

dove l'integrale è esteso al volume del corpo. Nel campo omogeneo il momento di dipolo $\mathcal{P} = V\varkappa\mathfrak{E}$ e l'energia libera vale

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = -\frac{\varkappa V}{2}\, \mathfrak{E}^2. \tag{11,11}$$

Nel caso generale di dipendenza arbitraria di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{E}$ le formule semplici (11,7) e (11,8) non hanno senso. Per il calcolo di $\mathcal{F}$, in questo caso, può essere utile la formula

$$\mathcal{F} = \int \left(F - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\right) dV = \int \left[F - \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathfrak{E}\right] dV, \tag{11,12}$$

la cui deduzione usando i calcoli precedenti è ovvia. Infatti, le espressioni integrande in ambedue gli integrali differiscono per la grandezza

$$-\frac{\mathbf{ED}}{8\pi}-\frac{\mathfrak{E}\mathbf{P}}{2}+\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}=-\frac{1}{8\pi}(\mathbf{D}-\mathfrak{E})\,(\mathbf{E}+\mathfrak{E});$$

sostituendo in essa $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, $\mathfrak{E} = -\nabla\varphi_0$ e integrando su tutto lo spazio questa espressione si annulla. È da notare che nella formula (11,12) (così come nella (11,7)) l'espressione integranda (nel secondo integrale) si annulla all'esterno del corpo (ove $\mathbf{P} = 0$, $F = E^2/8\pi$) così che l'integrazione risulta estesa solo al suo volume.

Problema

Dedurre una formula che sostituisca la (11,7) per un corpo sito non nel vuoto ma in un mezzo di permettività dielettrica $\varepsilon^{(e)}$.

Soluzione. Ripetendo per questo caso le trasformazioni attuate nel testo, otteniamo

$$\mathcal{F}-\mathcal{F}_0=-\frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{E}\,(\mathbf{D}-\varepsilon^{(e)}\mathbf{E})\,dV.$$

§ 12. *Elettrostrizione dei dielettrici isotropi*

Per un dielettrico solido che si trovi in un campo elettrico è impossibile introdurre la nozione di pressione come si fa per un corpo isotropo in assenza di campo, poiché le forze agenti nel dielettrico (saranno determinate nei §§ 15, 16) variano lungo il corpo e sono anisotrope anche se il corpo di per se stesso è isotropo. La determinazione precisa della deformazione (*elettrostrizione*) di questo corpo richiede la soluzione di un problema complesso della teoria dell'elasticità.

Tuttavia, il problema è più semplice se ci si interessa alla sola variazione del volume totale del corpo. Come è stato già notato nel § 5, in questo caso si può supporre invariata la forma del corpo, cioè considerare la deformazione come una compressione o una estensione uniforme onnilaterale.

Trascureremo le proprietà dielettriche del mezzo esterno (dell'atmosfera, per esempio) in cui si trova il corpo in esame, porremo cioè $\varepsilon = 1$. Il ruolo del mezzo si riduce semplicemente alla creazione di una pressione uniforme agente sulla superficie del corpo. In seguito denoteremo con P questa pressione esterna. Se $\mathcal{F}$ è l'energia libera totale del corpo, allora in accordo con la ben nota relazione termodinamica abbiamo

$$P=-\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial V}\right)_T$$

e di conseguenza all'espressione per il differenziale $d\mathcal{F}$ si deve aggiungere il termine $-P\,dV$. Così, nel campo omogeneo esterno al posto della (11,5) abbiamo

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S}\,dT - P\,dV - \mathcal{P}d\mathfrak{E}.$$

In accordo con la definizione termodinamica ordinaria, introduciamo il potenziale termodinamico totale del corpo

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} + PV. \tag{12,1}$$

Per il differenziale di questa grandezza (nel campo omogeneo esterno) abbiamo la seguente relazione:

$$d\mathcal{G} = -\mathcal{S}\,dT + V\,dP - \mathcal{P}d\mathfrak{E}. \tag{12,2}$$

La variazione delle grandezze termodinamiche nel campo elettrico esterno è, di solito, relativamente esigua. Secondo il teorema delle piccole correzioni (cfr. V (15,12)), una piccola variazione dell'energia libera (per T e V dati) e una piccola variazione del potenziale termodinamico (per T e P date) sono uguali. Perciò, accanto all' (11,8), si può scrivere una relazione analoga

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 - {}^1/_2\mathfrak{E}\mathcal{P} \tag{12,3}$$

per il potenziale termodinamico del corpo nel campo omogeneo esterno. Qui $\mathcal{G}_0$ si riferisce al corpo in assenza di campo per P e T date (mentre $\mathcal{F}_0$ nella formula (11,8) è l'energia libera del corpo in assenza di campo per V e T dati).

Esprimendo esplicitamente la dipendenza del momento di dipolo da V e $\mathfrak{E}$ secondo la (11,9), riscriviamo l'espressione (12,3) nella forma

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(P, T) - {}^1/_2 V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_i\mathfrak{E}_k, \tag{12,4}$$

dove il termine di correzione deve essere espresso come funzione della temperatura e della pressione secondo l'equazione di stato del corpo in assenza di campo. Questa formula diventa particolarmente semplice nel caso di piccola suscettività dielettrica della sostanza:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(P, T) - \frac{\varkappa V}{2}\mathfrak{E}^2 \tag{12,5}$$

(cfr. l'(11,11)).

La variazione cercata del volume $V - V_0$ in un campo esterno si può ottenere ora per derivazione diretta di $\mathcal{G}$ rispetto alla pressione (per T e $\mathfrak{E}$ costanti). Dalla (12,5) ricaviamo così

$$V - V_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial P}\right)_T \mathfrak{E}^2. \tag{12,6}$$

Questa grandezza può essere sia positiva che negativa (contrariamente all'elettrostrizione dei conduttori il cui volume in un campo aumenta sempre).

Analogamente si può calcolare anche la quantità di calore Q assorbita dal dielettrico per l'applicazione isotermica di un campo elettrico esterno (mantenendo costante la pressione esterna)[1].

Derivando $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}_0$ rispetto alla temperatura si ha variazione dell'entropia del corpo, e moltiplicandola per T, otteniamo la quantità di calore cercata. Così, dalla (12,5) si ottiene

$$Q = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial T}\right)_P \mathfrak{E}^2. \tag{12,7}$$

Valori positivi di Q corrispondono all'assorbimento di calore.

Problemi

1. Determinare la variazione del volume e l'effetto elettrocalorifico per un ellissoide dielettrico sito in un campo elettrico esterno parallelo a uno dei suoi assi.

Soluzione. In accordo con le formule (12,3) e (8,10) abbiamo

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 - \frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon + 1 - n}\mathfrak{E}^2.$$

Per la variazione del volume troviamo [2]

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{(n\varepsilon + 1 - n)K} - \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right],$$

e per l'effetto elettrocalorifico

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon - 1)}{n\varepsilon + 1 - n} + \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

dove $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ è il coefficiente di compressibilità del corpo e $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ il coefficiente di dilatazione termica.

In particolare, per una lamina a facce parallele in un campo ad essa perpendicolare $n = 1$ così che

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon K} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right],$$

$$Q = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

---

[1]) Se il corpo è termoisolato, l'applicazione di un campo implica una variazione della temperatura uguale a $\Delta T = -Q/\mathscr{C}_P$ ove $\mathscr{C}_P$ è il calore specifico del corpo a pressione costante.

[2]) Ponendo $\varepsilon \to \infty$, otteniamo per la variazione del volume di un ellissoide conduttore $(V - V_0)/V = \mathfrak{E}^2/8\pi K n$. Per una sfera $n = 1/3$ e riotteniamo il risultato del problema 4 al § 5.

Per la stessa lamina (o qualsiasi corpo cilindrico) in un campo longitudinale $n = 0$ e

$$\frac{V-V_0}{V}=\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{K}-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right], \qquad Q=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\alpha(\varepsilon-1)+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

2. Determinare la differenza tra il calore specifico $\mathscr{C}_\varphi$ di una lamina a facce parallele posta in un campo ad essa perpendicolare, a differenza di potenziale costante tra le sue facce e il calore specifico $\mathscr{C}_D$ a induzione costante; in ambedue i casi la pressione esterna è mantenuta costante [1]).

Soluzione. Secondo i risultati del problema 1 l'entropia della lamina è

$$\mathscr{S}=-\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial T}\right)_{P,\,\mathfrak{E}}=\mathscr{S}_0(P,T)+\frac{V\mathfrak{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\alpha+\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right].$$

L'induzione del campo all'interno della lamina coincide con il campo esterno: $D = \mathfrak{E}$. Quindi, per il calcolo del calore specifico $\mathscr{C}_D$ si deve derivare $\mathscr{S}$ a $\mathfrak{E}$ costante. La differenza di potenziale tra le facce della lamina è $\varphi = El = \mathfrak{E}l/\varepsilon$, ove l è lo spessore della lamina. Per compressione o una dilatazione uniforme del corpo l varia proporzionalmente a $V^{1/3}$. Perciò il calcolo del calore specifico $\mathscr{C}_\varphi$ richiede che $\mathscr{S}$ sia derivata a prodotto $\mathfrak{E}V^{1/3}/\varepsilon$ costante. Come risultato per la differenza cercata troviamo

$$\mathscr{C}_\varphi-\mathscr{C}_D=\frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\varepsilon}\left[(\varepsilon-1)\alpha+\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P-\frac{\alpha}{3}\right].$$

3. Determinare l'effetto elettrocalorifico in un dielettrico omogeneo il cui volume totale è mantenuto costante.

Soluzione. A rigore, per l'applicazione di un campo esterno la densità del corpo varia (diventando non omogenea lungo il corpo) anche se il suo volume totale è mantenuto costante. Tuttavia, nel calcolare la variazione dell'entropia totale si può trascurare questa circostanza e supporre la densità ρ costante in ogni punto del corpo [2]).

In accordo con la formula (10,18) l'entropia totale del corpo è

$$\mathscr{S}=\mathscr{S}_0'(\rho,T)+\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\int E^2\,dV,$$

ove l'integrazione è estesa al volume del corpo. La quantità di calore assorbito è

$$Q=\frac{T}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\int E^2\,dV.$$

4. Determinare la differenza $\mathscr{C}_\varphi-\mathscr{C}_D$ (cfr. problema 2) se il volume totale della lamina rimane costante.

Soluzione. Se il volume (e quindi, lo spessore) della lamina rimane costante la derivazione a differenza di potenziale costante è equivalente alla derivazione ad intensità E costante.

---

[1]) $\mathscr{C}_\varphi$ è il calore specifico della lamina collocata tra i rivestimenti di un condensatore piano inserito in circuito la cui forza elettromotrice è costante. Nel condensatore non inserito con cariche costanti sui rivestimenti il calore specifico della lamina sarà $\mathscr{C}_D$.

[2]) La variazione della densità $\delta\rho$ è una grandezza del secondo ordine rispetto al campo ($\sim E^2$), la corrispondente variazione dell'entropia totale è una grandezza del quarto ordine. Infatti, la variazione lineare rispetto a $\delta\rho$ dell'entropia totale è $\frac{\partial S_0}{\partial\rho}\int\delta\rho\,dV$, ma l'integrale $\int\delta\rho\,dV = 0$ in virtù del fatto che la massa totale del corpo non cambia.

Mediante la formula ottenuta nel problema 3 troviamo per l'entropia

$$\mathscr{C}_E - \mathscr{C}_D = \frac{TVE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2 = \frac{TV\mathfrak{E}^2}{4\pi\varepsilon^3}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2.$$

5. Sia dato un condensatore costituito da due superficie conduttrici che si trovano l'una dall'altra a distanza h piccola rispetto alle dimensioni delle armature; lo spazio tra i rivestimenti è occupato da una sostanza di permettività dielettrica ε_1. All'interno del condensatore è collocata una sferetta di raggio $a \ll h$ di permettività dielettrica ε_2. Determinare la variazione della capacità del condensatore.

Soluzione. Supponiamo che la sferetta sia introdotta nel condensatore in modo tale da lasciare invariata la differenza di potenziale φ tra i suoi rivestimenti. $\tilde{\mathscr{F}}$ indica l'energia libera per potenziali costanti dei conduttori. Senza sferetta $\tilde{\mathscr{F}} = -C_0\varphi^2/2$, ove C_0 è la capacità iniziale del condensatore. Poiché la sferetta è di piccole dimensioni si può supporre che sia introdotta in un campo omogeneo di intensità $\mathfrak{E} = \varphi/h$ e che la variazione d $\tilde{\mathscr{F}}$ sia piccola. Una piccola variazione di $\tilde{\mathscr{F}}$ a potenziali costanti è uguale a una piccola variazione di $\mathscr{F}$ a cariche costanti delle sorgenti del campo. Mediante la formula ottenuta nel problema al § 11 e l'espressione (8,2) troviamo

$$\tilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{2}C_0\varphi^2 - \frac{a^3\varphi^2}{2h^2}\,\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2},$$

da cui ricaviamo la capacità cercata

$$C = C_0 + \frac{a^3}{h^2}\,\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{2\varepsilon_1+\varepsilon_2}.$$

§ 13. *Proprietà dielettriche dei cristalli*

In un mezzo dielettrico anisotropo (monocristallo) la dipendenza lineare tra l'induzione e l'intensità del campo elettrico ha una forma più complicata che non si riduce a una semplice proporzionalità.

La forma più generale di questa dipendenza è data dall'espressione

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}E_k, \tag{13,1}$$

ove $\mathbf{D}_0$ è un vettore costante e l'insieme di grandezze ε_{ik} costituisce un tensore di secondo rango, ossia il *tensore di permettività dielettrica* (o, semplicemente, *tensore dielettrico*). Il termine libero $\mathbf{D}_0$ nella relazione (13,1), non necessariamente è presente in ogni cristallo. La maggioranza dei tipi di simmetria cristallina non consente l'esistenza di un vettore costante (si veda più avanti) e perciò si ha

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k. \tag{13,2}$$

Il tensore ε_{ik} è simmetrico:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \tag{13,3}$$

Per provarlo, è sufficiente ricorrere alla relazione termodinamica (10,10) e osservare che la derivata seconda

$$-4\pi \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial E_k \, \partial E_i} = \frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \varepsilon_{ik}$$

non dipende dall'ordine in cui si deriva.

Per la grandezza $\widetilde{F}$ (se è soddisfatta la (13,2)) abbiamo

$$\widetilde{F} = F_0 - \frac{\varepsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi}. \tag{13,4}$$

L'energia libera F vale

$$F = \widetilde{F} + \frac{E_i D_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\varepsilon_{ik}^{-1} D_i D_k}{8\pi} \tag{13,5}$$

Come ogni tensore simmetrico del secondo ordine, il tensore ε_{ik} può essere ridotto in forma diagonale con una scelta appropriata degli assi coordinati. Nel caso generale, quindi, il tensore ε_{ik} è definito da tre grandezze indipendenti, ossia dai tre valori principali $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$. Tutte queste grandezze sono sempre maggiori dell'unità, così come $\varepsilon > 1$ per un corpo isotropo (cfr. § 14).

A seconda di questa o quella simmetria del cristallo il numero di valori principali distinti del tensore ε_{ik} può essere minore di tre.

Nei cristalli dei sistemi triclino, monoclino e rombico tutti e tre i valori principali sono distinti; questi cristalli si dicono *biassici* [1]). Nei cristalli del sistema triclino le direzioni degli assi principali del tensore ε_{ik} non sono legate univocamente ad alcuna direzione cristallografica. Nei cristalli del sistema monoclino una direzione di uno degi assi principali è definita a priori: essa deve coincidere con l'asse di simmetria del secondo ordine o essere perpendicolare al piano di simmetria del cristallo. Nei cristalli del sistema rombico sono definiti cristallograficamente tutti e tre gli assi principali del tensore ε_{ik}.

Nei cristalli dei sistemi tetragonale, romboedrico ed esagonale due dei tre valori principali coincidono così che esistono in tutto due grandezze indipendenti; questi cristalli si dicono *uniassici*. Uno degli assi principali coincide, in questo caso, con l'asse cristallografico di simmetria del quarto, terzo o sesto ordine, mentre la direzione degli altri due assi principali può essere scelta in modo arbitrario.

Infine, nei cristalli del sistema cubico tutti e tre i valori principali del tensore ε_{ik} sono uguali mentre le direzioni degli assi principali sono arbitrarie. Questo vuol dire che il tensore ε_{ik} ha la forma $\varepsilon\delta_{ik}$, cioè è definito da uno scalare ε. In altre parole, rispetto alle loro proprietà dielettriche i cristalli di simmetria cubica non differiscono dai corpi isotropi.

---

[1]) Questo nome è dovuto alle proprietà ottiche dei cristalli (cfr. §§ 98, 99).

Tutte queste proprietà di simmetria assai evidenti del tensore ε_{ik} si possono derivare immediatamente ricorrendo ad un ente dell'algebra tensoriale, cioè quello dell'*ellissoide tensoriale*, la lunghezza dei semiassi del quale è proporzionale ai valori principali di un tensore simmetrico di secondo rango. La simmetria dell'ellissoide deve corrispondere quindi alla simmetria del cristallo. Così, nel cristallo uniassico l'ellissoide tensoriale degenera in ellissoide di rotazione completamente simmetrico rispetto all'asse longitudinale; sottolineiamo che per le proprietà fisiche del cristallo, definite dal tensore simmetrico di secondo rango, l'esistenza di un asse di simmetria del terzo ordine è equivalente all'isotropia totale in un piano perpendicolare a questo asse. Nei cristalli a simmetria cubica l'ellissoide tensoriale degenera in sfera.

Soffermiamoci ora sulle particolarità delle proprietà dielettriche dei cristalli con il termine costante $\mathbf{D}_0$ nell'espressione (13,1). L'esistenza di questo termine significa che il dielettrico è polarizzato spontaneamente anche in assenza di campo elettrico esterno; tali corpi portano il nome di *piroelettrici*. La grandezza di questa polarizzazione spontanea, tuttavia, è sempre molto piccola (rispetto ai campi molecolari). Questa circostanza è dovuta al fatto che grandi valori di $\mathbf{D}_0$ implicherebbero l'esistenza di campi intensi all'interno del corpo, il che è energeticamente assai svantaggioso e perciò non potrebbe corrispondere all'equilibrio termodinamico. Il fatto che $\mathbf{D}_0$ sia piccolo garantisce inoltre la legittimità dello sviluppo di $\mathbf{D}_0$ in potenze di $\mathbf{E}$, i primi due termini di questo sviluppo non sono altro che l'espressione (13,1).

Le grandezze termodinamiche di un corpo piroelettrico si trovano integrando la relazione

$$-4\pi \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial E_i} = D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k,$$

da cui

$$\widetilde{F} = F_0 - \frac{\varepsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} E_i D_{0i}. \tag{13,6}$$

L'energia libera è

$$F = \widetilde{F} + \frac{E_i D_i}{4\pi} = F_0 + \frac{\varepsilon_{ik} E_i E_k}{8\pi} =$$
$$= F_0 + \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ik}^{-1} (D_i - D_{0i})(D_k - D_{0k}). \tag{13,7}$$

È da notare che da F scompare il termine lineare rispetto a E_i che figura in $\widetilde{F}$ [1]).

[1]) Si deve notare che in queste formule abbiamo trascurato infatti il piezoeffetto (cioè l'influenza degli sforzi interni sulle proprietà elettriche del corpo, cfr. § 17). Perciò esse sono applicabili, a rigore, soltanto al caso di campi omogenei rispetto al volume del corpo quando gli sforzi nel corpo possono non esistere.

L'energia libera totale di un corpo piroelettrico si può calcolare secondo la formula (11,12) sostituendovi le espressioni (13,7) e (13,1). In assenza di campo esterno, $\mathfrak{E} = 0$, si ottiene il semplice risultato seguente:

$$\mathscr{F} = \int \left(F_0 - \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}_0}{8\pi}\right) dV. \qquad (13,8)$$

Notiamo che l'energia libera di un corpo piroelettrico in assenza di campo esterno dipende (assieme al campo **E**) non soltanto dal suo volume, ma anche dalla sua forma.

Come è stato già detto, il fenomeno della piroelettricità è possibile solo per alcune simmetrie del cristallo. Poiché per qualsiasi trasformazione di simmetria tutte le proprietà del cristallo devono restare invariate, è chiaro che piroelettrico può essere solo un cristallo, in cui esiste una direzione che resta invariata (e non trasformabile in quella inversa) per tutte le trasformazioni di simmetria; in questa direzione giace il vettore costante $\mathbf{D}_0$.

Questa condizione è soddisfatta solo dai gruppi di simmetria composti da un asse e dai piani di simmetria passanti per esso. Elenchiamo quelle delle 32 classi cristalline nelle quali esiste la piroelettricità:

sistema triclino: C_1,
sistema monoclino: C_s, C_2,
sistema rombico: C_{2v},
sistema tetragonale: C_4, C_{4v},
sistema romboedrico: C_3 C_{3v},
sistema esagonale: C_6, C_{6v}.

Tra le classi cubiche è ovvio che in generale non esistono cristalli piroelettrici. In un cristallo della classe C_1 la direzione del vettore piroelettrico $\mathbf{D}_0$ non è legata a nessuna direzione cristallografica, in un cristallo della classe C_s questa direzione deve giacere nel piano di simmetria. In tutte le altre classi suindicate la direzione di $\mathbf{D}_0$ coincide con la direzione dell'asse di simmetria [1]).

Si deve notare che in condizioni ordinarie i cristalli piroelettrici non hanno momento di dipolo elettrico totale benché la polarizzazione in essi non sia nulla. Il fatto è che all'interno di un dielettrico polarizzato spontaneamente l'intensità del campo **E** è diversa da

[1]) Parlando delle condizioni di simmetria, consideriamo un mezzo cristallino come illimitato. Per un cristallo finito il valore preciso del suo momento di dipolo totale può dipendere (nel cristallo ionico) dai piani cristallini attraverso i quali passano le sue facce, cioè dal fatto che questi piani contengano ioni di medesimo segno o siano elettricamente neutri. Ma nei limiti dell'elettrodinamica macroscopica che suppone il calcolo della media rispetto a volumi fisicamente infinitesimi è naturale intendere con media anche la posizione delle facce rispetto al reticolo cristallino. In seguito a tale media il valore di $\mathbf{D}_0$ sarà nullo in qualsiasi cristallo finito non piroelettrico e indipendente dal modo in cui è faccettato il cristallo piroelettrico.

zero. Poiché il campione in realtà ha, di solito, una conduttività benché piccola non nulla, la presenza del campo implica la comparsa di una corrente che fluirà finché la comparsa di cariche libere sulla superficie del corpo non produrrà la scomparsa del campo nel campione. Nella stessa direzione agiscono gli ioni dell'aria che si depositano sulla superficie del campione. Sperimentalmente le proprietà piroelettriche si osservano riscaldando il corpo quando il valore della sua polarizzazione spontanea varia e questo cambiamento viene rivelato.

Problemi

1. Determinare il campo creato nel vuoto da una sfera piroelettrica.

Soluzione. All'interno della sfera esiste un campo omogeneo in cui intensità e induzione sono legate dalla relazione $2\mathbf{E} = -\mathbf{D}$ (come segue dalla formula (8,1) per $\mathfrak{E} = 0$, cioè in assenza di campo esterno applicato). Sostituendo nella (13,1) otteniamo l'equazione $2E_i + \varepsilon_{ik}E_k = -D_{0i}$. Consideriamo gli assi coordinati coincidenti con gli assi principali del tensore ε_{ik}. Allora da questa equazione ricaviamo

$$E_i = -\frac{D_{0i}}{2+\varepsilon^{(i)}}; \qquad P_i = \frac{D_i - E_i}{4\pi} = \frac{3D_{0i}}{4\pi(2+\varepsilon^{(i)})}.$$

Il campo all'esterno della sfera è il campo di un dipolo elettrico con momento elettrico $\mathcal{P} = \mathbf{P}V$.

2. Determinare il campo di una carica puntiforme in un mezzo omogeneo anisotropo [1]).

Soluzione. Il campo di una carica puntiforme è descritto dall'equazione $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r})$ (la carica è sita nell'origine delle coordinate). Nel mezzo anisotropo $D_i = \varepsilon_{ik}E_k = -\varepsilon_{ik}\partial\varphi/\partial x_k$; considerando gli assi x, y, z coincidenti con gli assi principali del tensore ε_{ik}, per il potenziale otteniamo l'equazione

$$\varepsilon^{(x)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \varepsilon^{(y)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \varepsilon^{(z)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi e\delta(\mathbf{r}).$$

Mediante l'introduzione delle nuove variabili secondo

$$x = x'\sqrt{\varepsilon^{(x)}}, \quad y = y'\sqrt{\varepsilon^{(y)}}, \quad z = z'\sqrt{\varepsilon^{(z)}} \tag{1}$$

questa equazione diventa

$$\Delta'\varphi = -\frac{4\pi e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\,\delta(\mathbf{r}')$$

che formalmente differisce dall'equazione del campo nel vuoto per la sola sostituzione di e con $e' = e\,[\varepsilon^{(x)}\,\varepsilon^{(y)}\,\varepsilon^{(z)}]^{-1/2}$. Perciò

$$\varphi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-1/2}.$$

---

[1]) Nei problemi 2-6 il mezzo dielettrico anisotropo è supposto non piroelettrico.

Nelle notazioni tensoriali che non predeterminano la scelta del sistema di coordinate abbiamo

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon|\,\varepsilon_{ik}^{-1} x_i x_k}},$$

dove $|\varepsilon|$ è il determinante del tensore ε_{ik}.

3. Determinare la capacità di una sfera conduttrice (di raggio a) immersa in un mezzo dielettrico anisotropo.

Soluzione. Mediante la trasformazione (1) la determinazione del campo di una sfera di carica e in un mezzo anisotropo si riduce alla determinazione del campo generato nel vuoto dalla carica e' distribuita sulla superficie dell'ellissoide

$$\varepsilon_{ik} x_i' x_k' = \varepsilon^{(x)} x'^2 + \varepsilon^{(y)} y'^2 + \varepsilon^{(z)} z'^2 = a^2.$$

Ricorrendo alla formula (4,14) per il potenziale del campo dell'ellissoide, otteniamo per la capacità cercata la seguente espressione:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}} \int_0^\infty \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(x)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(y)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(z)}}\right)\right]^{-1/2} d\xi.$$

4. Determinare il campo in una lamina a facce parallele anisotropa collocata in un campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$.

Soluzione. Dalla condizione di continuità della componente tangente dell'intensità segue che

$$\mathbf{E} = \mathfrak{E} + A\mathbf{n},$$

dove $\mathbf{E}$ è l'intensità del campo omogeneo all'interno della lamina, $\mathbf{n}$ il vettore unitario della normale alla sua superficie e A una costante. Quest'ultima si determina dalla condizione di continuità della componente normale dell'induzione: $\mathbf{nD} = \mathbf{n}\mathfrak{E}$, o

$$n_i \varepsilon_{ik} E_k = n_i \varepsilon_{ik} \mathfrak{E}_k + A\,\varepsilon_{ik} n_i n_k = \mathfrak{E}_i n_i.$$

Di qui

$$A = -\frac{(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik})\, n_i \mathfrak{E}_k}{\varepsilon_{lm} n_l n_m}.$$

In particolare, se il campo esterno è diretto lungo la normale alla lamina (asse z), allora

$$A = \mathfrak{E}\,(1 - \varepsilon_{zz})/\varepsilon_{zz}.$$

Se il campo è parallelo alla lamina e diretto lungo l'asse x si ha

$$A = -\mathfrak{E}\varepsilon_{zx}/\varepsilon_{zz}.$$

5. Determinare il momento delle forze agenti su una sfera dielettrica anisotropa collocata (nel vuoto) in un campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$.

Soluzione. Secondo la formula (8,2) per l'intensità del campo all'interno della sfera abbiamo

$$E_x = \frac{3}{2 + \varepsilon^{(x)}}\,\mathfrak{E}_x$$

(e analogamente per E_y, E_z), scegliendo gli assi x, y, z coincidenti con gli assi principali del tensore ε_{ik}. Di qui otteniamo le componenti del momento di dipolo della sfera (di raggio a)

$$\mathcal{P}_x = \frac{4\pi}{3} a^3 P_x = \frac{\varepsilon^{(x)} - 1}{\varepsilon^{(x)} + 2} a^3 \mathfrak{E}_x.$$

La componente del momento delle forze agenti sulla sfera è

$$K_z = [\mathcal{P}\mathfrak{E}]_z = 3a^3 \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y \frac{\varepsilon^{(x)} - \varepsilon^{(y)}}{(\varepsilon^{(x)} + 2)(\varepsilon^{(y)} + 2)}$$

e analogamente per K_x, K_y.

6. Sia data una cavità sferica in un mezzo anisotropo illimitato. Esprimere il campo all'interno della cavità in funzione del campo omogeneo $E^{(e)}$ presente nel mezzo lontano dalla cavità.

Soluzione. Mediante la trasformazione (1) del problema 2 l'equazione per il potenziale del campo in un mezzo si riduce all'equazione di Laplace per il campo nel vuoto. Quanto all'equazione per il potenziale del campo nella cavità, viceversa, essa si trasforma nell'equazione per il potenziale in un mezzo con permettività dielettriche $1/\varepsilon^{(x)}$, $1/\varepsilon^{(y)}$, $1/\varepsilon^{(z)}$. Inoltre, la sfera (di raggio a) si trasforma in un ellissoide di semiassi $a/\sqrt{\varepsilon^{(x)}}$, $a/\sqrt{\varepsilon^{(y)}}$, $a/\sqrt{\varepsilon^{(z)}}$. Siano $n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ i coefficienti di depolarizzazione di questo ellissoide (definiti secondo le formule (4,25)). Applicando al campo dell'ellissoide in questione la formula (8,7), otteniamo la relazione

$$(1 - n^{(x)}) \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\varepsilon^{(x)}} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x'}$$

(e analogamente lungo gli assi y' e z'). Tornando alle vecchie coordinate abbiamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sqrt{\varepsilon^{(x)}} = -E_x \sqrt{\varepsilon^{(x)}}$$

cosicché per il campo nella cavità otteniamo infine

$$E_x^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(x)} - n^{(x)}(\varepsilon^{(x)} - 1)} E_x^{(e)}.$$

§ 14. *Positività della suscettività dielettrica*

Per chiarire il carattere della dipendenza delle grandezze termodinamiche di un dielettrico in un campo dalla sua permettività dielettrica, consideriamo il problema formale della variazione della componente elettrica dell'energia libera totale del corpo per una variazione infinitesima di ε.

Per un dielettrico isotropo (non necessariamente omogeneo) abbiamo secondo la (10,20)

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_0 = \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} dV.$$

Al variare di ε l'induzione del campo varia anch'essa. Perciò la variazione dell'energia libera in esame è

$$\delta\mathscr{F} = \int \frac{\mathbf{D}\,\delta\mathbf{D}}{8\pi\varepsilon}\,dV - \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\,\delta\varepsilon\,dV.$$

Il primo termine al secondo membro dell'uguaglianza coincide con l'espressione (10,12) del lavoro compiuto per una variazione infinitesima delle sorgenti del campo (le cariche dei conduttori). Ma nel caso in questione studiamo la variazione del campo quando le sue sorgenti rimangono costanti; perciò questo termine si annulla e otteniamo così

$$\delta\mathscr{F} = -\int \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon^2}\,\frac{D^2}{8\pi}\,dV = -\int \delta\varepsilon\,\frac{E^2}{8\pi}\,dV. \qquad (14,1)$$

Da questa formula segue che ogni aumento della permettività dielettrica del mezzo, anche solo in una certa zona (a sorgenti del campo invariate), conduce a una diminuzione della sua energia libera. In particolare, si può affermare che l'energia libera diminuisce sempre quando vengono introdotti nel mezzo dielettrico dei conduttori non carichi poiché questi ultimi si possono supporre (in elettrostatica) come corpi con ε infinita. Questa affermazione generalizza il teorema (enunciato al § 2) sulla diminuzione dell'energia del campo elettrostatico nel vuoto per l'introduzione in esso di un conduttore non carico.

L'energia libera totale diminuisce anche quando una carica viene avvicinata dall'infinito a un corpo dielettrico (ciò si può interpretare come un aumento di ε nel volume del campo attorno alla carica). Per concludere da ciò che ogni carica è attratta dal dielettrico si dovrebbe dimostrare a rigore che $\mathscr{F}$ non può avere un minimo per nessun valore finito della distanza tra carica e corpo. Non ci soffermiamo qui sulla dimostrazione di questa proposizione in quanto, fra l'altro, la comparsa di forze d'attrazione tra carica e dielettrico si può ritenere come un risultato evidente dell'interazione della carica stessa con il momento di dipolo del dielettrico da essa polarizzato.

Dalla formula (14,1) si può concludere immediatamente in quale direzione si muove il corpo dielettrico in un campo quasi-omogeneo, cioè in un campo che può essere supposto costante su distanza dell'ordine di dimensioni del corpo. In questo caso E^2 esce dal segno di integrale e la differenza $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ è una grandezza negativa proporzionale a E^2. Il corpo tende ad occupare una posizione in cui la sua energia libera sia minima e, quindi, si sposta nella direzione in cui E cresce.

Indipendentemente dalla formula (14,1) si può mostrare che la variazione totale dell'energia libera di un corpo dielettrico, qualora

sia collocato in un campo elettrico, è negativa [1]). A questo fine si può fare uso della teoria termodinamica delle perturbazioni, considerando la variazione dell'energia libera del corpo come risultato della perturbazione dei suoi livelli quantistici di energia causata dal campo elettrico esterno. In accordo con questa teoria abbiamo

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0= \\ =\overline{V}_{nn}-\frac{1}{2}\sum_n\sum_m{}'\frac{|V_{nm}|^2(w_m-w_n)}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}-\frac{1}{2T}\overline{(V_{nn}-\overline{V}_{nn})^2} \qquad (14,2)$$

(cfr. V, la formula (32,6)). Qui $E_n^{(0)}$ sono i livelli imperturbati, V_{mn} gli elementi di matrice dell'energia di perturbazione e il trattino indica la media statistica calcolata mediante la distribuzione di Gibbs:

$$w_n=\exp\left\{\frac{\mathscr{F}_0-E_n^{(0)}}{T}\right\}.$$

Il termine $\overline{V}_{nn}$ nella formula (14,2) è lineare rispetto al campo e non nullo soltanto nei mezzi piroelettrici. Quanto alla variazione dell'energia libera quadratica rispetto al campo, essa è data dagli altri termini che figurano in questa formula; il fatto che siano negativi è evidente.

D'altra parte, dalla deduzione stessa della formula (14,2) risulta con chiarezza che in essa l'energia libera $\mathscr{F}$ deve essere intesa nel senso indicato al § 11, cioè da essa è esclusa l'energia del campo che esisterebbe se non vi fosse il corpo. Perciò la differenza $\mathscr{F}-\mathscr{F}_0$ è determinata dalla formula termodinamica (11,7). Consideriamo un corpo cilindrico lungo, disposto secondo la direzione di un campo omogeneo esterno $\mathfrak{E}$. In questo caso il campo all'interno del cilindro coincide con $\mathfrak{E}$ e la sua polarizzazione è $\mathbf{P}=(\varepsilon-1)\,\mathfrak{E}/4\pi$ in modo che

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0=-\frac{\varepsilon-1}{8\pi}V\mathfrak{E}^2.$$

Di qui risulta che la differenza $\mathscr{F}-\mathscr{F}_0$ sarà negativa solo per $\varepsilon>1$. Così siamo arrivati al risultato già menzionato nel § 7 e usato precedentemente che la permettività dielettrica di qualsiasi corpo è maggiore di 1, vale a dire che la sua suscettività dielettrica $\varkappa=(\varepsilon-1)/4\pi$ è positiva.

Allo stesso modo si dimostrano le disuguaglianze $\varepsilon^{(i)}>1$ per i valori principali del tensore ε_{ik} del mezzo dielettrico anisotropo. A tale scopo è sufficiente considerare l'energia del campo diretto lungo ciascuno dei tre assi principali.

[1]) Si tratta della variazione proporzionale al quadrato del campo. Ricordiamo che nei corpi piroelettrici la variazione dell'energia libera contiene anche un termine lineare rispetto al campo, termine che in questo caso non presenta interesse.

§ 15. *Forze elettriche in un dielettrico liquido*

Il calcolo delle forze (dette *ponderomotrici*) agenti su dielettrico in un campo elettrico non omogeneo qualsiasi è molto complicato e la sua soluzione richiede uno studio a sé per corpi liquidi (o gassosi) e solidi. Cominciamo dal caso più semplice dei dielettrici liquidi.

Indichiamo con $\mathbf{f}dV$ la forma agente su un elemento di volume dV del mezzo, e il vettore $\mathbf{f}$ si può chiamare densità di volume delle forze.

Come è noto, le forze agenti su un volume finito del corpo si possono ridurre alle forze applicate alla superficie di questo volume (cfr. VII, § 2). Questa circostanza è una conseguenza della legge di conservazione dell'impulso. La forza agente su una sostanza nell'unità di volume dV rappresenta la variazione del suo impulso per unità di tempo. Questa variazione deve essere pari alla quantità d'impulso affluente durante lo stesso tempo in questo volume attraverso la sua superficie. Indicando con $-\sigma_{ik}$ il flusso d'impulso, avremo

$$\int f_i\, dV = \oint \sigma_{ik}\, df_k, \tag{15,1}$$

dove l'integrazione nel secondo termine dell'uguaglianza è estesa alla superficie del volume V. Il tensore σ_{ik} si chiama *tensore degli sforzi*. È evidente che

$$\sigma_{ik}\, df_k = \sigma_{ik} n_k\, df$$

è l'i-esima componente della forza agente sull'elemento di superficie df ($\mathbf{n}$ è il vettore unitario della normale alla superficie, esterna rispetto al volume in questione).

Analogamente il momento delle forze totale agente sul volume in esame si riduce anch'esso ad un integrale di superficie, questo garantisce che la legge di conservazione dell'impulso sia soddisfatta. Come è noto, questa riduzione è dovuta alla simmetria del tensore degli sforzi ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); quest'ultima è, quindi, espressione della legge di conservazione dell'impulso.

Trasformando l'integrale di superficie nella formula (15,1) in integrale di volume otteniamo

$$\int f_i\, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\, dV$$

e di qui poiché il volume di integrazione è arbitrario, abbiamo

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{15,2}$$

Questa formula assai nota esprime le forze volumetriche in funzione del tensore degli sforzi.

Passiamo ora al calcolo del tensore degli sforzi. Ogni piccolo tratto della superficie si può considerare piano e il corpo così come il campo elettrico nelle vicinanze omogenei. Quindi, per rendere più semplice la deduzione possiamo considerare, senza perdere di generalità, uno strato pianoparallelo (di spessore h) di sostanza che si trova nel campo elettrico omogeneo [1]). Questo campo si può supporre come generato da piani conduttori (rivestimenti di un condensatore) applicati alle superfici dello strato in esame.

Seguendo il metodo generale di determinazione delle forze, sottomettiamo uno dei rivestimenti («superiore») ad uno spostamento virtuale parallelo di un infinitesimo ξ; la direzione ξ è arbitraria e non coincide necessariamente con la direzione della normale $\mathbf{n}$. Supponiamo che il potenziale del conduttore (in ogni suo punto) resti invariato per uno spostamento e che la deformazione omogenea dello strato dielettrico causata da questo spostamento sia isotermica.

Sull'unità di superficie agisce una forza $-\sigma_{ik}n_k$ da parte del corpo stesso (strato). Questa forza per uno spostamento virtuale compie un lavoro $-\sigma_{ik}n_k\xi_i$. D'altra parte, il lavoro compiuto per una deformazione isotermica e potenziali dei conduttori costanti è uguale alla diminuzione della grandezza $\int \widetilde{F}\, dV$ o (per unità di superficie dello strato) della grandezza $h\widetilde{F}$. In tal modo,

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \delta\,(h\widetilde{F}) = h\delta\widetilde{F} + \widetilde{F}\,\delta h. \qquad (15,3)$$

Le grandezze termodinamiche di un liquido dipendono (a temperatura e intensità del campo date) soltanto dalla sua densità; le deformazioni che non incidono sulla densità (deformazioni di scorrimento) non influiscono sullo stato termodinamico. Perciò nel caso della variazione isotermica $\delta\widetilde{F}$ nel liquido scriviamo

$$\delta\widetilde{F} = \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho}\delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho = -\frac{\mathbf{D}\,\delta\widetilde{\mathbf{E}}}{4\pi} + \left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho. \qquad (15,4)$$

La variazione della densità dello strato di sostanza è legata alla variazione del suo spessore mediante la relazione $\delta\rho = -\rho\delta h/h$. Quanto alla variazione del campo, essa si calcola nel modo seguente.

In un punto dello spazio (di raggio vettore $\mathbf{r}$) va a finire per uno spostamento la sostanza dal punto $\mathbf{u} - \mathbf{r}$, ove $\mathbf{u}$ è il vettore di spostamento delle particelle nel volume dello strato. Poiché nelle condizioni considerate (deformazione omogenea e potenziale costante sulle

[1]) Con ciò omettiamo nel tensore degli sforzi termini che potrebbero dipendere dai gradienti della temperatura, del campo ecc. Questi termini tuttavia, sono piccoli rispetto ai termini che non contengono derivate nello stesso senso in cui sono piccoli termini con derivate che potrebbero figurare nella dipendenza di $\mathbf{D}$ de $\mathbf{E}$.

armature) ogni particella della sostanza si sposta assieme al proprio valore del potenziale, la variazione di quest'ultimo in un dato punto dello spazio è

$$\delta\varphi = \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\nabla\varphi = \mathbf{uE},$$

ove **E** è il campo omogeneo all'interno dello strato non deformato. Ma in seguito alla deformazione omogenea abbiamo

$$\mathbf{u} = \frac{z}{h}\boldsymbol{\xi}, \tag{15,5}$$

ove z è la distanza dalla superficie inferiore. Perciò la variazione dell'intensità del campo è

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\boldsymbol{\xi}). \tag{15,6}$$

Sostituendo tutte le espressioni testé ottenute nella formula (15,4) e tenendo anche conto che $\delta h = \xi_z = \boldsymbol{\xi}\mathbf{n}$, otteniamo

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{nD})(\boldsymbol{\xi}\mathbf{E}) - (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho} + (\boldsymbol{\xi}\mathbf{n})\widetilde{F} =$$

$$= \left\{\frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\delta_{ik} + \widetilde{F}\delta_{ik}\right\}\xi_i n_k.$$

Di qui ricaviamo infine la seguente espressione per il tensore degli sforzi:

$$\sigma_{ik} = \left[\widetilde{F} - \rho\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},\,T}\right]\delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \tag{15,7}$$

Nei mezzi isotropi, di cui ci stiamo occupando, le direzioni di **E** e di **D** coincidono. Perciò, $E_i D_k = E_k D_i$ e il tensore (15,7), come deve, è simmetrico [1]).

Per la relazione lineare $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ abbiamo

$$\widetilde{F} = F_0(\rho, T) - \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \tag{15,8}$$

(cfr. la (10,17)); F_0 è l'energia libera per unità di volume della sostanza in assenza di campo. Secondo la nota relazione termodinamica la derivata dell'energia libera di 1 g di sostanza rispetto al volume specifico è la pressione

$$\left(\frac{\partial}{\partial\frac{1}{\rho}}\frac{F_0}{\rho}\right)_T = F_0 - \rho\left(\frac{\partial F_0}{\partial\rho}\right)_T = -P_0;$$

[1]) È inessenziale il fatto che nella deduzione esposta la direzione di **E** coincide con **n** poiché è evidente a priori che σ_{ik} può dipendere esclusivamente dalla direzione di **E** e non da quella di **n**.

$P_0 = P_0\ (\rho,\ T)$ è la pressione che esisterebbe nel mezzo se per valori dati di ρ e T non vi fosse campo. Perciò sostituendo la (15,8) nella (15,7) abbiamo

$$\sigma_{ik} = -P_0(\rho,\ T)\,\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi}. \qquad (15,9)$$

Nel vuoto questa espressione si trasforma nel noto tensore degli sforzi di Maxwell del campo elettrico [1]).

Le forze con le quali due mezzi attigui distinti agiscono sulla superficie di separazione devono essere uguali e opposte: $\sigma_{ik}n_k = -\sigma'_{ik}n'_k$, ove le grandezze con apice e meno si riferiscono rispettivamente a questi due mezzi. I vettori delle normali $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'$ hanno direzioni mutuamente opposte, cosicché si può scrivere

$$\sigma_{ik}n_k = \sigma'_{ik}n_k. \qquad (15,10)$$

Sulla frontiera di due mezzi isotropi l'uguaglianza tra le componenti tangenziali delle forze è identicamente soddisfatta. Sostituendo infatti la (15,7) nella (15,10) e considerando la componente tangenziale, otteniamo

$$\mathbf{E}_t D_n = \mathbf{E}'_t D'_n.$$

Ma questa uguaglianza è soddisfatta già in virtù delle condizioni di continuità sulla frontiera di $\mathbf{E}_t$ e D_n. Quanto alla condizione di uguaglianza delle componenti normali delle forze, essa è data da una condizione non banale imposta alla differenza delle pressioni in ambedue i mezzi.

Consideriamo, ad esempio la frontiera tra un liquido e l'atmosfera (per quest'ultima si può porre $\varepsilon = 1$) denotando con un apice le grandezze riferite all'atmosfera e usando per σ_{ik} la formula (15,9), otteniamo

$$-P_0(\rho,\ T) + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{\varepsilon}{8\pi}(E_n^2 - E_t^2) = -P_{\text{atm}} + \frac{1}{8\pi}(E_n'^2 - E_t'^2).$$

Tenendo conto delle condizioni di frontiera $E_t = E'_t$, $D_n = \varepsilon D_n = D'_n = E'_n$, riscriviamo questa uguaglianza nella forma

$$P_0(\rho,\ T) - P_{\text{atm}} = \frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}(\varepsilon E_n^2 + E_t^2). \qquad (15,11)$$

Questa relazione si deve intendere come equazione che definisce la densità ρ del liquido in prossimità della sua superficie in funzione dell'intensità del campo nel liquido.

---

[1]) Cfr. la nota alla pag. 50.

Determiniamo ora le forze di volume agenti nel mezzo dielettrico. Derivando l'espressione (15,9) secondo la formula (15,2) otteniamo

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[-P_0 + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}E^2 + \frac{\partial}{\partial x_k}(E_i D_k)\right].$$

Se teniamo conto dell'equazione div $\mathbf{D} \equiv \partial D_k/\partial x_k = 0$ l'espressione tra parentesi nell'ultimo termine si riduce alla somma

$$-\varepsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right)$$

che si annulla in quanto rot $\mathbf{E} = 0$. Quindi, otteniamo

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} P_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon \qquad (15,12)$$

(*H. Helmholtz*, 1881).

Se nel dielettrico esistono cariche estranee di densità per unità di volume ρ_{est}, allora alla forza $\mathbf{f}$ si aggiunge un termine $\mathbf{E}$ div $\mathbf{D}/4\pi$; poiché div $\mathbf{D} = 4\pi\rho_{est}$, questo termine vale

$$\rho_{est}\mathbf{E}; \qquad (15,13)$$

non si deve pensare però che questo risultato sia di per sé evidente (cfr. problema 3 al § 16).

In un gas, come è stato detto nel § 7, la differenza $\varepsilon - 1$ si può supporre proporzionale alla sua densità. Allora $\rho\partial\varepsilon/\partial\rho = \varepsilon - 1$ e la formula (15,12) diventa più semplice

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\operatorname{grad} E^2. \qquad (15,14)$$

La formula (15,12) è valida per mezzi sia omogenei che non omogenei rispetto alla composizione. Nel mezzo non omogeneo ε è una funzione non soltanto di ρ e T, ma anche della concentrazione di miscela variabile lungo il mezzo. Nel mezzo di composizione omogenea ε è funzione soltanto di ρ, T e grad ε si può sviluppare come

$$\nabla\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \nabla T + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \nabla\rho.$$

Allora la formula (15,12) diventa

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0(\rho, T) + \frac{\rho}{8\pi}\nabla\left[E^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \nabla T. \qquad (15,15)$$

Se la temperatura è anch'essa costante lungo il corpo, il terzo termine si annulla e nel primo si può sostituire ∇P_0 con $\rho\nabla\zeta_0$ (secondo la

nota relazione termodinamica per il potenziale chimico in assenza di campo: $\rho d\zeta_0 = dP_0 - S_0 dT$) e

$$\mathbf{f} = -\rho\nabla\left[\zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right] = -\rho\nabla\zeta, \qquad (15,16)$$

ove ζ è il potenziale chimico della sostanza nel campo elettrico (cfr. la (10,19)).

In particolare, la condizione di equilibrio meccanico $\mathbf{f} = 0$ se la temperatura è costante richiede che

$$\zeta = \zeta_0 - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \text{cost} \qquad (15,17)$$

in accordo con la condizione termodinamica generale di equilibrio. Di solito, questa condizione può essere scritta in forma più semplice. La variazione della densità del mezzo sotto l'azione del campo è proporzionale a E^2. Perciò, se in assenza di campo la densità del mezzo è omogenea, anche in presenza di campo negli ultimi due termini della formula (15,15) si deve porre ρ = costante; se tenessimo conto della variazione di ρ nelle formule in cui si è supposta la dipendenza lineare $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, questo andrebbe oltre la loro precisione. Annullando $\mathbf{f}$ nella formula (15,15), a temperatura costante otteniamo la condizione di equilibrio nella forma

$$P_0(\rho, T) - \frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T = \text{cost} \qquad (15,18)$$

che differisce dalla (15,17) per il fatto che in essa al posto di ζ_0 figura P_0/ρ.

Per concludere, mostriamo in che modo si può dedurre immediatamente dalla formula (14,1) un'espressione per la forza (15,12), senza calcolare il tensore degli sforzi.

Consideriamo un mezzo dielettrico non omogeneo illimitato soggetto a una piccola deformazione isotermica che si annulla all'infinito. La variazione $\delta\varepsilon$ è composta di due parti: 1) della variazione

$$\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\nabla\varepsilon,$$

dovuta al fatto che a causa della deformazione in un dato punto $\mathbf{r}$ arriva una particella della sostanza dal punto $\mathbf{r} - \mathbf{u}$, e 2) della variazione

$$-\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \rho \operatorname{div}\mathbf{u},$$

dovuta alla variazione della densità della sostanza nel punto r: come è noto (cfr. VII, § 1), div $\mathbf{u}$ è una variazione relativa dell'ele-

ento di volume e perciò la variazione della densità è $\delta\rho = -\rho \times$ $\times$ div $\mathbf{u}$. Quindi, la variazione dell'energia libera

$$\delta \mathscr{F} = \delta \mathscr{F}_0 - \int \delta\varepsilon \frac{E^2}{8\pi} dV = -\int P_0 \operatorname{div} \mathbf{u}\, dV + \\ + \int \frac{E^2}{8\pi} \left[\mathbf{u} \nabla\varepsilon + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right] dV \qquad (15,19)$$

(il primo termine è la variazione dell'energia libera in assenza di campo). Integrando per parti i termini della (15,19) contenenti div $\mathbf{u}$ e confrontando il risultato con l'espressione $\delta\mathscr{F} = -\int \mathbf{u}\mathbf{f}\, dV$ per la variazione dell'energia libera in funzione del lavoro compiuto dalle forze $\mathbf{f}$, riotteniamo la (15,12).

§ 16. *Forze elettriche nei solidi*

Le proprietà dielettriche di un corpo solido cambiano non soltanto col variare della sua densità (come nei liquidi), ma anche per deformazioni che non cambiano la densità (scorrimenti). Consideriamo dapprima corpi isotropi in assenza di campo. In generale, una deformazione elimina l'isotropia di un corpo, come risultato diventano anisotrope anche le sue proprietà dielettriche, mentre la permettività dielettrica scalare ε si deve sostituire con il tensore dielettrico ε_{ik}.

Lo stato di un corpo debolmente deformato è descritto, come è noto, dal tensore di deformazione

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

ove $\mathbf{u}$ (x, y, z) è il vettore di spostamento dei punti del corpo. Poiché sono piccole queste grandezze, nella variazione delle componenti di ε_{ik} è sufficiente limitarsi ai soli termini del primo ordine rispetto a u_{ik}. Ciò premesso, rappresentiamo il tensore dielettrico di un corpo deformato nella forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll} \delta_{ik}. \qquad (16,1)$$

Qui ε_0 è la permettività dielettrica del corpo non deformato e gli ultimi due termini (con le due costanti scalari a_1, a_2) rappresentano la forma più generale di un tensore di secondo rango che può essere costituito da una combinazione lineare delle componenti del tensore u_{ik}.

Vediamo ora in che modo deve essere modificata la dimostrazione esposta nel paragrafo precedente. Poiché nei solidi $\tilde{F}$ dipende da tutte

le componenti del tensore di deformazione, al posto della (15,4) si deve scrivere

$$\delta\widetilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{\delta\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\delta u_{ik}.$$

Per lo spostamento virtuale in esame il vettore **u** è dato dalla formula (15,5) in modo che il tensore di deformazione si scrive

$$u_{ik} = \frac{1}{2h}(\xi_i n_k + \xi_k n_i).$$

Sostituendo questa espressione in $\delta\widetilde{F}$ e tenendo conto della simmetria del tensore u_{ik} (quindi, anche delle derivate $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$) otteniamo

$$\delta\widetilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} + \frac{1}{h}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\xi_i n_k. \tag{16,2}$$

Ora è chiaro che per il tensore degli sforzi avremo al posto della (15,7) la seguente espressione [1])

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\,\mathbf{E}} + \frac{E_i D_k}{4\pi}. \tag{16,3}$$

Questa formula è applicabile qualunque sia la dipendenza di **D** da **E**. Per un corpo non piroelettrico (e non piezoelettrico) in cui $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$ la grandezza $\widetilde{F}$ è data dalla formula (13,4) e otteniamo così le derivate necessarie

$$\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} = \frac{\partial F_0}{\partial u_{ik}} - \frac{1}{8\pi}(a_1 E_i E_k + a_2 E^2\delta_{ik}).$$

Dopo questa operazione poniamo ovunque nella formula (16,3) $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik}$ e troviamo la seguente espressione per il tensore degli sforzi:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \frac{2\varepsilon_0 - a_1}{8\pi}E_i E_k - \frac{\varepsilon_0 + a_2}{8\pi}E^2\delta_{ik}; \tag{16,4}$$

---

[1]) La grandezza $\widetilde{F}$ in questa formula, come ovunque in precedenza è l'energia libera riferita all'unità di volume del corpo. Nella teoria dell'elasticità, tuttavia, si suole usare un'altra definizione; le grandezze termodinamiche vanno riferite alla quantità di sostanza per unità di volume del corpo non deformato che dopo deformazione può occupare un volume un po' diverso. Il passaggio da una definizione all'altra si realizza facilmente esprimendo la variazione relativa del volume per deformazione mediante il tensore u_{ik} (poiché nella formula (16,3) figura la derivata rispetto a u_{ik}, ciò si fa a meno dei termini del secondo ordine). Come risultato, ambedue i primi termini nella formula (16,3) si riducono a uno solo della forma $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$ secondo la formula ordinaria della teoria dell'elasticità.

$\sigma_{ik}^{(0)}$ è il tensore degli sforzi in assenza di campo elettrico, definito in funzione dei moduli di scorrimento e di compressione mediante le formule ordinarie della teoria dell'elasticità.

Passiamo ora ai calcoli analoghi per i corpi solidi anisotropi [1]. Le modifiche da portare alla deduzione precedente consistono in quanto segue. Per una deformazione virtuale di uno strato di sostanza i suoi assi cristallografici subiscono una rotazione per cui la loro orientazione rispetto al campo elettrico cambia. Questa circostanza a causa della anisotropia delle proprietà dielettriche del cristallo conduce a una variazione complementare di $\widetilde{F}$ della quale non è stato tenuto conto nella formula (16,2). Nel calcolare questa variazione è equivalente supporre che siano gli assi del cristallo a ruotare di un angolo $\delta\varphi$ rispetto al campo $\mathbf{E}$ o che sia il campo a ruotare rispetto agli assi di angolo $-\delta\varphi$, tuttavia il secondo metodo è più comodo.

In tal modo, alla variazione del campo (15,6) studiata precedentemente si deve aggiungere la variazione di $\mathbf{E}$ per la rotazione di un angolo $-\delta\varphi$, ossia

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\xi) - [\delta\varphi\cdot\mathbf{E}].$$

L'angolo $\delta\varphi$ è legato al vettore di spostamento $\mathbf{u}$, nel caso di una deformazione, mediante $\delta\varphi = 1/2 \operatorname{rot} \mathbf{u}$ (è facile ottenere questa uguaglianza osservando che per la rotazione del corpo di un angolo $\delta\varphi$ i suoi punti si spostano di $\mathbf{u} = [\delta\varphi\cdot\mathbf{r}]$). Sostituendovi $\mathbf{u}$ dalla formula (15,5) otteniamo

$$\delta\varphi = \frac{1}{2h}[\nabla z\cdot\xi] = \frac{1}{2h}[\mathbf{n}\xi],$$

e in seguito

$$\delta\mathbf{E} = -\frac{1}{h}\mathbf{n}(\mathbf{E}\xi) + \frac{1}{2h}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\xi]] = -\frac{1}{2h}\{\mathbf{n}(\mathbf{E}\xi) + \xi(\mathbf{n}\mathbf{E})\}.$$

Il primo termine nella formula (16,2) assume la forma

$$-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\delta\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi h}\{(\mathbf{n}\mathbf{D})(\xi\mathbf{E}) + (\xi D)(\mathbf{n}\mathbf{E})\} = \frac{\xi_i n_k}{4\pi h}\,\frac{E_i D_k + E_k D_i}{2}.$$

Si vede di qui che il prodotto $E_i D_k$ nella (16,3) deve essere sostituito con la semisomma che figura

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} + \frac{1}{8\pi}(E_i D_k + E_k D_i). \qquad (16,5)$$

[1]) Vedremo al § 17 che il fenomeno di elettrostrizione nei cristalli, per determinati tipi di simmetria, può differire notevolmente dall'elettrostrizione dei corpi isotropi. Cristalli di questo tipo si dicono *piezoelettrici*. Nel presente paragrafo tratteremo il fenomeno della elettrostrizione nei cristalli non piezoelettrici.

È da notare che l'espressione ottenuta risulta come deve essere automaticamente simmetrica rispetto agli indici i e k.

Quanto al tensore dielettrico del cristallo deformato, al posto dell'espressione (16,1) con due costanti scalari avremo nel caso generale un'espressione della forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + a_{iklm} u_{lm}, \tag{16,6}$$

dove a_{iklm} è un tensore costante del quarto ordine simmetrico rispetto alle coppie di indici i, k e l, m (ma asimmetrico rispetto alla permutazione della coppia i, k con la coppia l, m). Il numero di componenti indipendenti non nulle di questo tensore dipende dalla simmetria del cristallo, cioè dalla sua classe di simmetria.

Non scriviamo qui la formula per il tensore degli sforzi (analoga alla (16,4)) che si ottiene usando la formula (16,6).

Le formule dedotte determinano gli sforzi all'interno di un dielettrico solido. Tuttavia, non avremo bisogno di esse se vogliamo determinare la forza totale **F** o il momento di forze totale **K** agenti sul corpo da parte del campo esterno. Consideriamo un corpo immerso in un mezzo liquido (o gassoso) e mantenuto immobile in questo mezzo. La forza totale a cui il corpo è soggetto è pari all'integrale $\oint \sigma_{ik} n_k \times df$ esteso alla sua superficie. In virtù della continuità delle forze $\sigma_{ik} n_k$ non importa che l'integrale venga calcolato rispetto ai valori di σ_{ik} relativi alla formula (16,4) o alla (15,9) che si riferisce al mezzo in cui si trova il corpo. Supponiamo che questo mezzo si trovi in equilibrio meccanico o termico. Allora il calcolo si rende più semplice ancora se teniamo conto della condizione di equilibrio (15,18). Grazie a questa condizione parte del tensore degli sforzi (15,9) diventa una pressione di compressione (o estensione) uniforme, costante lungo il mezzo che non porta nessun contributo alla forza totale **F** e al momento totale delle forze **K** agenti sul corpo. Per calcolare quest'ultime grandezze si può scrivere, quindi, σ_{ik} nella semplice forma

$$\sigma_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_i E_k - \frac{E^2}{2} \delta_{ik} \right), \tag{16,7}$$

ove **E** è il campo nel liquido e ε la sua permettività dielettrica; questa espressione differisce per il solo fattore ε dal tensore degli sforzi di Maxwell del campo elettrico nel vuoto. In tal modo,

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{nE}) - \frac{1}{2} E^2 \mathbf{n} \right\} df, \tag{16,8}$$

$$\mathbf{K} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint \left\{ [\mathbf{rE}](\mathbf{nE}) - \frac{1}{2} E^2 [\mathbf{rn}] \right\} df. \tag{16,9}$$

È da notare un altro fatto. Poiché il liquido è in equilibrio, in queste formule si può integrare rispetto a qualsiasi superficie chiusa

che delimiti il corpo in esame (ma, ovviamente, non contenente in sé corpi carichi quali sorgenti del campo).

Il problema del calcolo della forza totale agente su un dielettrico in un campo elettrico (nel vuoto) si può trattare sotto un altro punto di vista, esprimendola cioè non in funzione del campo realmente esistente, bensì in funzione del campo $\mathfrak{E}$ che sarebbe generato da sorgenti date in assenza del dielettrico; questo è il «campo esterno» nel quale si introduce il corpo. In questo caso si suppone che la distribuzione delle cariche che generano il campo non cambi con l'introduzione del corpo nel campo. Questa condizione può non essere soddisfatta se, ad esempio, le cariche sono distribuite sulla superficie di un conduttore lungo e il dielettrico si trova a una distanza finita da esso.

Per una traslazione parallela virtuale del corpo come un insieme di una distanza infinitesima $\mathbf{u}$ l'energia libera totale del corpo varia secondo l'(11,3) di

$$\delta\mathcal{F} = -\int \mathbf{P}\delta\mathfrak{E}\, dV,$$

ove

$$\delta\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(\mathbf{r}+\mathbf{u}) - \mathfrak{E}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E}$$

è la variazione del campo $\mathfrak{E}$ rispetto al punto considerato del corpo. Poiché $\mathbf{u}$ = costante e rot $\mathfrak{E} = 0$, abbiamo

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}\nabla)\mathfrak{E} = (\mathbf{P}\nabla)(\mathbf{u}\mathfrak{E}) = \mathbf{u}(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E},$$

in modo che

$$\delta\mathcal{F} = -\mathbf{u}\int (\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}\, dV.$$

D'altra parte, $\delta\mathcal{F} = -\mathbf{uF}$, e otteniamo così la seguente formula per la forza cercata [1]:

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}\, dV. \tag{16,10}$$

In modo analogo si può determinare il momento totale delle forze agenti sul corpo. Senza soffermarci sui calcoli necessari ne diamo il risultato:

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{P}\mathfrak{E}]\, dV + \int [\mathbf{r}\cdot(\mathbf{P}\nabla)\mathfrak{E}]\, dV. \tag{16,11}$$

[1]) Sottolineiamo, tuttavia, che l'espressione integranda in questo integrale non si può interpretare come densità di volume delle forze. Il fatto è che le forze locali nel dielettrico sono legate non soltanto al campo $\mathfrak{E}$, ma anche ai propri campi interni, i quali, secondo la legge della conservazione dell'impulso, non danno nessun contributo alla forza totale ma incidono sulla distribuzione delle forze nel volume del corpo.

In un campo quasi-omogeneo, che può essere supposto costante lungo il corpo, la formula (16,10) in prima approssimazione dà

$$\mathbf{F} = \left(\int \mathbf{P}\, dV \nabla \right) \mathfrak{E} = (\mathscr{P}\nabla)\, \mathfrak{E}, \tag{16,12}$$

ove $\mathscr{P}$ è il momento di dipolo totale del dielettrico polarizzato, ciò si sarebbe potuto ottenere, ovviamente, derivando direttamente $\mathscr{F}$ nella (11,8). Nella formula (16,11) trascuriamo in prima approssimazione, in generale il secondo termine rispetto al primo e otteniamo il risultato naturale

$$\mathbf{K} = [\mathscr{P}\mathfrak{E}]. \tag{16,13}$$

Problemi

1. Una sfera dielettrica (di raggio a) sita in un campo esterno omogeneo $\mathfrak{E}$ è tagliata in due semisfere da un piano perpendicolare alla direzione del campo. Determinare la forza d'attrazione tra le due semisfere.

Soluzione. Supponiamo che le semisfere siano separate da una fessura infinitamente sottile e calcoliamo la forza cercata per mezzo della formula (16,8) con $\varepsilon = 1$, integrando sulla superficie di una semisfera e tenendo conto che $\mathbf{E}$ è l'intensità del campo nel vuoto in prossimità della superficie. Secondo la formula (8,2) il campo all'interno della sfera è omogeneo e vale $E^{(i)} = 3\mathfrak{E}/(2+\varepsilon)$ (ε è la permettività dielettrica della sfera). Il campo nella fessura è perpendicolare alla superficie e vale

$$\mathbf{E} = \mathbf{D}^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\, \mathfrak{E}.$$

Sulla superficie esterna della sfera abbiamo

$$E_r = D_r^{(i)} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\, \mathfrak{E} \cos\theta, \quad E_\theta = E_\theta^{(i)} = -\frac{3}{2+\varepsilon}\, \mathfrak{E} \operatorname{sen}\theta,$$

ove θ è l'angolo tra il raggio vettore e la direzione $\mathfrak{E}$.

Il calcolo dell'integrale conduce alla forza d'attrazione che vale [1])

$$[F = \frac{9(\varepsilon-1)^2}{16(\varepsilon+2)^2}\, a^2 \mathfrak{E}^2.$$

2. Determinare la variazione della forma di una sfera dielettrica in un campo elettrico omogeneo esterno.

La *soluzione* è analoga a quella del problema 4 nel § 5. Per trovare la variazione della forma supponiamo costante il volume della sfera [2]). Per la parte elastica dell'energia libera otteniamo la stessa espressione del problema 4 nel § 5.

---

[1]) La coincidenza del limite di questa espressione per $\varepsilon \to \infty$ con il risultato del problema 3 nel § 5 per la sfera conduttrice è casuale (in realtà queste forze sono persino di segno opposto). La non equivalenza fisica dei due casi risulta evidente dal fatto che nella fessura fra le due semisfere conduttrici (che si trovano al medesimo potenziale) non esiste campo, mentre in questo problema tale campo esiste.

[2]) La variazione del volume è stata determinata nel problema 1 nel § 12.

La parte elettrica è data dall'espressione

$$-\frac{1}{2}\mathcal{P}\mathfrak{E}=-\frac{V}{8\pi}\,\frac{\varepsilon^{(x)}-1}{1+n\,(\varepsilon^{(x)}-1)}\,\mathfrak{E}^2$$

(cfr. l'(8,9)), inoltre, secondo la formula (16,1) la permettività dielettrica lungo l'asse x è

$$\varepsilon^{(x)}=\varepsilon_0+a_1u_{xx}=\varepsilon_0+\frac{2a_1}{3}\,(u_{xx}-u_{yy})=\varepsilon_0+\frac{2a_1}{3}\,\frac{a-b}{R}.$$

Dalla condizione di minimo dell'energia libera totale ricaviamo (tenendo conto della piccolezza della grandezza cercata)

$$\frac{a-b}{R}=\frac{9\mathfrak{E}^2}{40\pi\mu}\,\frac{(\varepsilon_0-1)^2+5a_1/2}{(\varepsilon_0+2)^2}.$$

Per $\varepsilon_0\to\infty$ questa espressione coincide con il risultato per la sfera conduttrice.

3. Determinare le forze di volume in un dielettrico solido isotropo contenente cariche estranee; il corpo è supposto omogeneo.

Soluzione. Supponendo costanti ε_0, a_1, a_2 e usando l'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}\approx\varepsilon_0\ \operatorname{div}\mathbf{E}=4\pi\rho_{\text{est}},$$

dalla (16,4) ricaviamo

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial\sigma_{ik}^{(0)}}{\partial x_k}-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{a_1}{2}+a_2\right)\frac{\partial E^2}{\partial x_i}+\left(1-\frac{a_1}{2\varepsilon_0}\right)\rho_{\text{est}}E_i.$$

§ 17. *Corpi piezoelettrici*

Gli sforzi interni che compaiono in un dielettrico isotropo immerso in un campo elettrico rappresentano un effetto quadratico rispetto al campo. Lo stesso effetto si verifica nei cristalli appartenenti ad alcune classi cristalline. Ma per alcuni tipi di simmetria le proprietà di elettrostrizione dei cristalli hanno carattere notevolmente diverso. Gli sforzi interni che compaiono in questi corpi (*piezoelettrici*) in un campo elettrico sono proporzionali alla prima potenza del campo. D'altra parte, si verifica anche l'effetto inverso, vale a dire che la deformazione del piezoelettrico si accompagna alla comparsa in esso di campo proporzionale al valore della deformazione.

Se trattiamo in un piezoelettrico solo l'effetto fondamentale, quello lineare possiamo trascurare nella formula generale (16,5) i termini quadratici rispetto al campo. In questo caso

$$\sigma_{ik}=\widetilde{F}\delta_{ik}+\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\,\mathbf{E}}.$$

In seguito nel presente paragrafo useremo le grandezze termodinamiche riferendole alla quantità di sostanza per unità di volume del

corpo non deformato (cfr. la nota alla pag. 102). Intendendo $\widetilde{F}$ in questo senso, avremo

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial u_{ik}}\right)_{T,\,\mathbf{E}}. \tag{17,1}$$

La relazione termodinamica per il differenziale $d\widetilde{F}$ sarà

$$d\widetilde{F} = -S\,dT + \sigma_{ik}\,du_{ik} - \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \tag{17,2}$$

Quanto all'ultimo termine, si deve fare la seguente osservazione: questo termine così scritto (proveniente dall'espressione (10,9)) si riferisce, esattamente, all'unità di volume del corpo deformato. Se non teniamo conto di questo fatto, commettiamo un errore che, tuttavia, nel caso considerato (per un corpo piezoelettrico) è una grandezza infinitesima d'ordine superiore rispetto agi altri termini nella formula (17,2).

Nella (17,2) fungono da variabili indipendenti le componenti del tensore u_{ik}. Talvolta è più comodo usare invece le componenti del tensore σ_{ik}. A tale scopo bisogna introdurre il potenziale termodinamico definito come

$$\widetilde{\Phi} = \widetilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik}. \tag{17,3}$$

Il differenziale di questa grandezza è

$$d\widetilde{\Phi} = -S\,dT - u_{ik}\,d\sigma_{ik} - \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{D}\,d\mathbf{E}. \tag{17,4}$$

Sottolineiamo che l'introduzione in elettrodinamica del potenziale termodinamico $\widetilde{\Phi}$ secondo le formule (17,3) e (17,4) richiede che si verifichi la relazione (17,1) e, quindi, è possibile soltanto per corpi piezoelettrici.

Dopo avere definito in questo modo le grandezze termodinamiche di cui abbiamo bisogno, passiamo alla descrizione delle proprietà piezoelettriche dei cristalli. Scegliendo le grandezze σ_{ik} e E_k come variabili indipendenti dobbiamo considerare l'induzione $\mathbf{D}$ quale loro funzione e nel suo sviluppo conservare i termini del primo ordine rispetto alle variabili indicate. I termini lineari dello sviluppo delle componenti di un vettore in potenze delle componenti di un tensore del secondo ordine, nel caso generale, si possono scrivere nella forma $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$ ove l'insieme delle costanti $\gamma_{i,kl}$ costituisce un tensore del terzo ordine (il fattore 4π è introdotto per comodità). Poiché il tensore σ_{kl} è simmetrico rispetto ai suoi indici, è chiaro che il tensore $\gamma_{i,kl}$ si può ritenere anche simmetrico rispetto ai due indici corrispondenti:

$$\gamma_{i,\,kl} = \gamma_{i,\,lk}; \tag{17,5}$$

per maggiore evidenza separiamo con la virgola la coppia di indici simmetrici kl dal terzo indice. Il tensore $\gamma_{i,kl}$ si chiama tensore piezoelettrico. Con la sua assegnazione si definiscono completamente le proprietà piezoelettriche di un cristallo.

Aggiungendo i termini piezoelettrici all'espressione (13,1) per l'induzione elettrica nel cristallo, scriviamo

$$D_i = D_{i0} + \varepsilon_{ik} E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}. \tag{17,6}$$

I termini supplementari corrispondenti compariranno anche nelle grandezze termodinamiche. Il potenziale termodinamico di un cristallo non piezoelettrico in assenza di un campo è

$$\tilde{\Phi} = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm},$$

ove Φ_0 si riferisce al corpo non deformato e il secondo termine rappresenta l'energia elastica ordinaria definita dal tensore delle costanti elastiche μ_{iklm} [1]. Per un corpo piezoelettrico abbiamo

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{i0} - \gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}. \tag{17,7}$$

La forma dei tre ultimi termini è dovuta al fatto che le derivate di $\tilde{\Phi}$ rispetto a E_i (a sforzi interni e temperatura dati) in accordo con la formula

$$D_i = -4\pi\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial E_i}$$

devono dare le espressioni (17,6).

---

[1]) Il tensore μ_{iklm} stabilisce un legame tra gli sforzi e le deformazioni secondo l'espressione

$$u_{ik} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ik}} = \mu_{iklm}\sigma_{lm}.$$

Nel VII § 10 abbiamo scritto la dipendenza inversa

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}.$$

È chiaro che tutte le proprietà di simmetria del tensore μ_{iklm} coincidono completamente con le proprietà di simmetria del tensore λ_{iklm}.

Nell'energia libera F l'energia elastica figura con il segno positivo:

$$F_{\text{elast}} = 1/2\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}.$$

Quanto al potenziale termodinamico, esso si ottiene da F sottraendo $\sigma_{ik}u_{ik}$ e perciò

$$\Phi_{\text{elast}} = F_{\text{elast}} - \sigma_{ik}u_{ik} = -1/2\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm} = -1/2\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm}.$$

Conoscendo $\widetilde{\Phi}$, è possibile ottenere mediante la (17,4) una formula che esprima il tensore di deformazione in funzione dello sforzo σ_{ik} e del campo **E**:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \sigma_{ik}}\right)_{T,\,\mathbf{E}} = \mu_{iklm}\sigma_{lm} + \gamma_{l,\,ik}E_l. \tag{17,8}$$

Sottolineiamo che il significato delle grandezze μ_{iklm} e ε_{ik} come costanti elastiche e permettività dielettrica nei piezoelettrici è, in un certo senso, convenzionale. Con le definizioni considerate queste grandezze determinano, rispettivamente la dipendenza della deformazione dagli sforzi elastici e la dipendenza dell'induzione dall'intensità del campo per sforzi dati. Se la deformazione si verifica per induzione del campo data o se si considera la dipendenza dell'induzione dall'intensità per una deformazione data, a svolgere il ruolo di coefficienti elastici e di permettività dielettrica saranno altre grandezze che si possono esprimere (anche se in modo assai complicato) in funzione delle componenti tensoriali μ, ε e γ.

Il campo nel corpo piezoelettrico deve essere determinato contemporaneamente alla sua deformazione, ossia si tratta di un problema comune all'elettrostatica e alla teoria dell'elasticità. Infatti, si deve cercare una soluzione comune delle equazioni elettrostatiche

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \tag{17,9}$$

con **D** definita dalla formula (17,6) e delle equazioni imposte dall'equilibrio elastico

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{17,10}$$

con le condizioni di frontiera corrispondenti sulla superficie del corpo e tenendo conto del legame tra σ_{ik} e la deformazione dato dalle formule (17,8). Nel caso generale questa impostazione del problema presenta notevoli difficoltà.

Il problema si semplifica molto per un corpo di forma ellissoidale con la superficie libera (cioè tale cui non sono applicate forze meccaniche esterne di nessun tipo). In questo caso (§ 8) il campo all'interno del corpo è omogeneo, quindi la sua deformazione è omogenea e tutti gli sforzi elastici tali che $\sigma_{ik} = 0$.

Vediamo infine quali tipi di simmetria cristallina ammettono l'esistenza della piezoelettricità. In altre parole, si devono considerare le restrizioni imposte dalle condizioni di simmetria sulle componenti del tensore $\gamma_{i,kl}$. Nel caso generale questo tensore (simmetrico rispetto agli indici k e l) ha 18 componenti indipendenti non nulle, ma di fatto il numero di componenti indipendenti è di solito notevolmente inferiore.

Per tutte le trasformazioni di simmetria di un cristallo tutte le componenti del suo tensore $\gamma_{i,kl}$ devono restare di grandezza immu-

tata. Ne segue che il corpo in ogni caso non può essere piezoelettrico se gode di un centro di simmetria (compreso, ovviamente, corpo isotropo). Infatti, per una riflessione rispetto al centro (tutte e tre le coordinate cambiano di segno) tutte le componenti di un tensore del terzo ordine cambiano di segno.

Delle 32 classi cristalline sono in tutto 20 ad ammettere la piezoelettricità. Ne fanno parte principalmente le 10 classi elencate nel § 13 che ammettono la piroelettricità (tutti i corpi piroelettrici sono al tempo stesso anche piezoelettrici). Inoltre, piezoelettrici sono i cristalli delle 10 classi seguenti:

sistema rombico: D_2,
sistema tetragonale: D_4, D_{2d}, S_4,
sistema romboedrico: D_3,
sistema esagonale: D_6, C_{3h}, D_{3h},
sistema cubico: T, T_d.

Le componenti non nulle del tensore piezoelettrico per tutte le classi sono date nei problemi del presente paragrafo.

Ricordiamo qui un fenomeno parente della piezoelettricità che compare per « deformazione » di un cristallo liquido; a questo proposito tratteremo i cristalli *nematici*. Ricordiamo (V, § 140) che questi mezzi liquidi sono caratterizzati dall'esistenza di una direzione prevalente dell'orientazione delle molecole. Questa direzione è data in ogni punto dal vettore unitario **d**, detto *direttore* del cristallo. Nel cristallo liquido non deformato **d** è costante in tutto il volume del corpo, nel cristallo deformato è invece una funzione delle coordinate. Lo sviluppo (17,6) corrisponde in un cristallo liquido all'espressione dell'induzione sotto la forma

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k + 4\pi e_1 d_i \operatorname{div} \mathbf{d} + 4\pi e_2 [\operatorname{rot} \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}]_i, \qquad (17,11)$$

ove e_1, e_2 sono coefficienti scalari (*R. B. Meyer*, 1969) [1]. I due ultimi termini, che descrivono l'effetto in questione, rappresentano un vettore polare più generale che può essere composto dal vettore **d** e delle sue derivate prime rispetto alle coordinate. È da notare che l'espressione (17,11) è automaticamente invariante rispetto al cambiamento di segno di **d**.

Quanto al tensore della permettività dielettrica nei cristalli nematici, a causa della propria simmetria esso coincide con l'analogo tensore per i cristalli uniassici, inoltre l'asse di simmetria è costituito dalla direzione locale (in ogni punto del mezzo) del direttore. Il tensore ε_{ik} si può rappresentare nella forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + \varepsilon_a d_i d_k \qquad (17,12)$$

con due costanti indipendenti ε_0 e ε_a.

[1]) La piroelettricità nei cristalli nematici è di fatto sconosciuta, perciò poniamo $\mathbf{D}_0 = 0$.

Problemi

1. Determinare le componenti non nulle del tensore $\gamma_{i,kl}$ per le classi cristalline non piroelettriche che ammettono la piezoelettricità.

Soluzione. La classe D_2 contiene tre assi di simmetria mutuamente perpendicolari del secondo ordine che consideriamo essere gli assi x, y, z. Le rotazioni di 180° attorno a questi assi fanno cambiare di segno due delle tre coordinate. Poiché le componenti di $\gamma_{i,kl}$ si trasformano come i prodotti $x_i x_k x_l$, non nulle possono essere soltanto quelle con tutti e tre gli indici distinti:

$$\gamma_{x\,yz},\quad \gamma_{z,\,xy},\quad \gamma_{y,\,zx};$$

le altre componenti non nulle sono uguali a queste in virtù della proprietà $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk}$. Di conseguenza, la parte piezoelettrica del potenziale termodinamico [1]) è

$$\widetilde{\Phi}_{\text{piezo}} = -2\left(\gamma_{x,\,yz}E_x\sigma_{yz} + \gamma_{y,\,xz}E_y\sigma_{xz} + \gamma_{z,\,xy}E_z\sigma_{xy}\right). \tag{1}$$

La classe D_{2d} si ottiene aggiungendo agli assi della classe D_2 altri due piani di simmetria passanti per uno degli assi (supponiamo che sia l'asse z) e dimezzando gli angoli tra gli assi x e y. La riflessione in uno di questi piani corrisponde alla trasformazione $x \to y$, $y \to x$, $z \to z$. Perciò le componenti di $\gamma_{i,kl}$ differenti per permutazioni degli indici x e y devono essere uguali così che dei tre coefficienti nell'espressione (1) solo due restano indipendenti:

$$\gamma_{z\;xy},\quad \gamma_{x\;yz} = \gamma_{y\;xz}.$$

La classe T si ottiene dalla classe D_2 aggiungendo quattro assi diagonali di simmetria del terzo ordine, le rotazioni su questi assi realizzano una permutazione ciclica degli assi x, y, z, per esempio, $x \to z$, $y \to x$, $z \to y$. Perciò i tre coefficienti nella formula (1) diventano uguali:

$$\gamma_{x\;yz} = \gamma_{y\;zx} = \gamma_{z\;xy}.$$

Lo stesso risultato si ottiene per la classe cubica T_d.

La classe D_4 contiene un asse di simmetria del quarto ordine (asse z) e quattro assi del secondo ordine giacenti nel piano xy. Assieme agli elementi di simmetria della classa D_2 è sufficiente considerare qui la rotazione di 90° attorno all'asse z, cioè la trasformazione $x \to y$, $y \to -x$, $z \to z$. In virtù di questa trasformazione uno degli coefficienti nella (1) si annulla ($\gamma_{z,\,xy} = -\gamma_{z,yx} = -\gamma_{z,\,xy}$ e di cui $\gamma_{z,\,xy} = 0$) e gli altri due differiscono per il solo segno:

$$\gamma_{x\,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Lo stesso risultato si ottiene per la classe D_6.

La classe S_4 contiene le trasformazioni $x \to y$, $y \to -x$, $z \to -z$ e $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to z$. Sono non nulle solo le componenti

$$\gamma_{z,\,xy},\quad \gamma_{x,\,yz} = \gamma_{y,\,xz},\quad \gamma_{z\;xx} = -\gamma_{z,\,yy},\quad \gamma_{x,zx} \to -\gamma_{y\;zy}.$$

---

[1]) A scanso di equivoco ricordiamo quanto segue: se le componenti del tensore di deformazione u_{ik} si calcolano derivando un'espressione concreta di $\widetilde{\Phi}$ rispetto a σ_{ik} le derivate rispetto alle componenti di σ_{ik} con $i \neq k$ daranno valori doppi delle corrispondenti componenti di u_{ik}. Ciò accade poiché le espressioni $u_{ik} = -\partial\Phi/\partial\sigma_{ik}$ hanno senso soltanto se esprimono il fatto che $d\widetilde{\Phi} = -u_{ik}d\sigma_{ik}$; ma nella somma $u_{ik}d\sigma_{ik}$ entrano due volte i differenziali non diagonali delle componenti del tensore simmetrico σ_{ik}.

Scegliendo in modo appropriato le direzioni degli assi x, y si può annullare una di queste grandezze.

La classe D_3 contiene un asse di simmetria del terzo ordine (asse z) e tre assi di simmetria del secondo ordine nel piano xy di cui uno supponiamo sia diretto lungo l'asse x. Per determinare le condizioni imposte dall'esistenza di un asse del terzo ordine è comodo realizzare una trasformazione formale introducendo le « coordinate » complesse

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy;$$

lasciamo invariata la coordinata z. Sottoponiamo anche il tensore $\gamma_{i,kl}$ a questa trasformazione. Ora, gli indici delle sue componenti descrivono i valori ξ, η, z. Per una rotazione di 120° attorno all'asse z queste coordinate sono soggette alla trasformazione

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/3}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, \quad z \to z.$$

In questo caso restano invariate e perciò possono essere non nulle le seguenti componenti del tensore $\gamma_{i,kl}$: $\gamma_{z,\eta\xi}$, $\gamma_{\eta,z\xi}$, $\gamma_{\xi,z\eta}$, $\gamma_{\xi,\xi\xi}$, $\gamma_{\eta,\eta\eta}$, $\gamma_{z,zz}$. La rotazione di 180° attorno all'asse x corrisponde alla trasformazione $x \to x$, $y \to -y$, $z \to -z$ cioè $\xi \to \eta$, $\eta \to \xi$, $z \to -z$. In questo caso $\gamma_{z,\eta\xi}$ e $\gamma_{z,zz}$ cambiano di segno e perciò si annullano, mentre le altre componenti suindicate si trasformano a coppie le une nelle altre, questo conduce alle uguaglianze: $\gamma_{\eta,z\xi} = -\gamma_{\xi,z\eta}$, $\gamma_{\xi,\xi\xi} = \gamma_{\eta,\eta\eta}$. Per scrivere l'espressione per $\widetilde{\Phi}_{\text{piezo}}$ si deve formare la somma $-\gamma_{i,kl} E_i \sigma_{kl}$ nella quale gli indici assumono i valori ξ, η, z:

$$\widetilde{\Phi}_{\text{piezo}} = -2\gamma_{\eta,z\xi}(E_\eta \sigma_{z\xi} - E_\xi \sigma_{z\eta}) - \gamma_{\xi,\xi\xi}(E_\xi \sigma_{\xi\xi} + E_\eta \sigma_{\eta\eta}).$$

Qui bisogna esprimere anche le componenti E_i e σ_{ik} nelle coordinate ξ, η, z in funzione delle componenti nelle coordinate iniziali x, y, z. Ciò è facile ricorrendo al fatto che le componenti di un tensore si trasformano come i prodotti delle coordinate corrispondenti. Perciò, ad esempio, da

$$\xi\xi = xx - yy + 2ixy$$

segue che

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}.$$

Come risultato otteniamo

$$\widetilde{\Phi}_{\text{piezo}} = 2a(E_y \sigma_{zx} - E_x \sigma_{zy}) + b[2E_y \sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})], \tag{2}$$

ove $a = 2i\gamma_{\eta,z\xi}$ $b = 2\gamma_{\xi,\xi\xi}$ sono costanti reali. Le relazioni tra le componenti di $\gamma_{i,kl}$ nelle coordinate x, y, z mostrano, come si vede dalla formula (2) [1]):

$$\gamma_{y,zx} = -\gamma_{x,zy} \equiv -a, \quad \gamma_{y,xy} = -\gamma_{x,xx} = \gamma_{x,yy} \equiv -b.$$

La classe D_{3h} si ottiene aggiungendo alla classe D_3 un piano di simmetria perpendicolare all'asse del terzo ordine (piano xy). La riflessione in questo piano corrisponde al cambiamento di segno di z e perciò anche $\gamma_{\eta,z\xi} = 0$, cosicché nell'espressione (2) resta soltanto un termine con un solo coefficiente b.

---

[1]) Nel caso di coordinate non ortogonali, tali sono ξ, η, z si devono distinguere, come è noto, le componenti co- e controvarianti dei tensori. Questa circostanza dovrebbe essere considerata anche nel passaggio alle coordinate iniziali x, y, z: se le componenti E_i e σ_{kl} si trasformano come controvarianti, le componenti del tensore $\gamma_{i,kl}$ vanno trasformate come covarianti. Tuttavia, evitiamo questa questione determinando il legame tra le componenti diverse di $\gamma_{i,kl}$ nelle coordinate x, y, z in modo immediato sulla base della forma della combinazione scalare (2).

La classe C_{3h} contiene oltre ad un asse del terzo ordine un piano di simmetria perpendicolare a questo asse. La riflessione in quest'ultimo equivale al cambiamento di segno di z e perciò devono essere nulle tutte le componenti di $\gamma_{i,kl}$ i cui indici contengono z un numero dispari di volte. Tenendo anche conto delle condizioni considerate precedentemente imposte da un asse di simmetria del terzo ordine, troviamo che sono non nulle le sole due componenti $\gamma_{\eta,\eta\eta}$ e $\gamma_{\xi,\xi\xi}$. Queste grandezze devono essere complesse coniugate in modo che $\widetilde{\Phi}$ sia reale. Indicando

$$2\gamma_{\xi,\xi\xi} = a + ib, \qquad 2\gamma_{\eta,\eta\eta} = a - ib,$$

otteniamo

$$\widetilde{\Phi}_{\text{piezo}} = a\,[2E_y\sigma_{xy} - E_x(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})] + b\,[2E_x\sigma_{xy} + E_y(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})]. \qquad (3)$$

Con scelta appropriata delle direzioni degli assi x, y si può annullare a o b.

2. Risolvere il problema 1 per le classi cristalline che ammettono la piroelettricità.

Soluzione. Supponiamo che l'asse z coincida con un'asse di simmetria del secondo, terzo, quarto o sesto ordine e che nella classe C_s esso sia perpendicolare al piano di simmetria. Nelle classi C_{nv} il piano xz coincide con uno dei piani di simmetria.

Diamo più avanti tutte le componenti non nulle di $\gamma_{i,kl}$ per ciascuna delle seguenti classi cristalline:

Classe C_1: tutte le componenti di $\gamma_{i,kl}$.

Classe C_s: tutte le componenti che non contengono l'indice z o lo contengono due volte.

Classe C_{2v}:

$$\gamma_{z,xx},\quad \gamma_{z,yy},\quad \gamma_{z,zz},\quad \gamma_{x,xz},\quad \gamma_{y,yz}.$$

Classe C_2: le stesse componenti della classe C_{2v} e anche

$$\gamma_{x,yz},\quad \gamma_{y,xz},\quad \gamma_{z,xy}.$$

Classe C_{4v}:

$$\gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy},\quad \gamma_{z,zz},\quad \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}.$$

Classe C_4: le stesse che per la classe C_{4v} e anche

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Classe C_{3v}:

$$\gamma_{z,zz},\quad \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz},\quad \gamma_{x,xx} = -\gamma_{x,yy} = -\gamma_{y,xy},\quad \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}.$$

Classe C_3: le stesse che per C_{3v}, e anche

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz},\quad \gamma_{y,xx} = -\gamma_{y,yy} = \gamma_{x,xy}.$$

Classe C_{6v}:

$$\gamma_{z,zz},\quad \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz},\quad \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}.$$

Classe C_6: le stesse che per C_{6v} e anche

$$\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}.$$

Se scegliamo in modo appropriato le direzioni degli assi x, y, z nella classe C_1 possiamo annullare ancora tre componenti; scegliendo in modo opportuno gli assi x, y nelle classi C_s, C_2, C_3 si può annullare una componente (nelle classi C_4 e C_6 l'espressione $\gamma_{i,kl}E_i\,\sigma_{kl}$ è invariante rispetto alle rotazioni di un qualsiasi angolo attorno all'asse z, perciò è impossibile un'ulteriore diminuzione delle componenti non nulle di $\gamma_{i,kl}$).

3. Determinare il modulo di Young (coefficiente di proporzionalità tra sforzo di trazione e allungamento relativo) per una lamina pianoparallela di un corpo piezoelettrico non piroelettrico nei seguenti casi: a) la lamina è soggetta a trazione da parte dei rivestimenti di un condensatore corto cirsuitato, b) la lamina è soggetta a trazione da parte dei rivestimenti di un condensatore non carico, c) la lamina è soggetta a trazione parallelamente al suo piano in assenza di campo esterno.

Soluzione. a) In questo caso l'intensità del campo all'interno della lamina $\mathbf{E} = 0$. L'unica componente non nulla del tensore σ_{ik} è lo sforzo di trazione σ_{zz} (l'asse z è perpendicolare al piano della lamina [1]). Dall'espressione (17,8) abbiamo $u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz}$ e di qui per il modulo di Young E otteniamo

$$1/E = \mu_{zzzz}.$$

b) In questo caso $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$. Dalle espressioni (17,6) e (17,8) ricaviamo

$$D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,\,zz}\sigma_{zz} = 0, \quad u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz} + \gamma_{z,\,zz}E_z.$$

Escludendo E_z da queste due uguaglianze abbiamo

$$\frac{1}{E} = \mu_{zzzz} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{zz}}\gamma^2_{z,\,zz}.$$

c) In questo caso anche $E_x = E_y = 0$, $D_z = 0$ e supponiamo che la trazione si verifichi lungo l'asse z. Abbiamo

$$D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,\,xx}\sigma_{xx} = 0, \quad u_{xx} = \mu_{xxxx}\sigma_{xx} + \gamma_{z,\,xx}E_z.$$

Eliminando E_z troviamo

$$\frac{1}{E} = \mu_{xxxx} - \frac{4\pi}{\varepsilon_{zz}}\gamma^2_{z,\,xx}.$$

4. Ottenere un'equazione che definisca la velocità del suono in un mezzo piezoelettrico.

Soluzione. In questo problema è più comodo usare come variabili indipendenti le grandezze u_{ik} al posto delle σ_{ik}. Scriviamo $\widetilde{F}$ nella forma

$$\widetilde{F} = F_0 + \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{i0} + \beta_{i,\,kl}E_iu_{kl},$$

di qui

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm}u_{lm} + \beta_{l,\,ik}E_l.$$

Le equazioni del moto nella teoria dell'elasticità sono

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{l,\,ik}\frac{\partial E_l}{\partial x_k}, \tag{4}$$

ove ρ è la densità del mezzo e $\mathbf{u}$ il vettore di scorrimento legato a u_{ik} mediante la relazione

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

---

[1]) Non è supposto che esso coincida con qualche direzione cristallografica.

L'equazione div $\mathbf{D} = 0$ dà

$$\varepsilon_{ik} \frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi\beta_{i,\,kl} \frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0, \tag{5}$$

e esprimiamo così l'intensità del campo in funzione del suo potenziale

$$E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

il che soddisfa l'equazione rot $\mathbf{E} = 0$.

Nell'onda acustica piana $\mathbf{u}$ e φ sono proporzionali a $e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ e dalle equazioni testé scritte ricaviamo

$$\rho\omega^2 u_i = \lambda_{iklm} k_k k_l u_m - \beta_{l,\,ik} k_k k_l \varphi,$$
$$\varepsilon_{ik} k_i k_k \varphi + 4\pi\beta_{i,\,kl} k_i k_k u_l = 0.$$

Escludendo da queste φ scriviamo la condizione di compatibilità delle equazioni che si ottengono per u_l

$$\det \left| \rho\omega^2 \delta_{ik} - \lambda_{ilkm} k_l k_m - 4\pi \frac{(\beta_{l,\,mi} k_l k_m)(\beta_{p,\,qk} k_p k_q}{\varepsilon_{rs} k_r k_s} \right| = 0.$$

Per ogni direzione considerata del vettore d'onda $\mathbf{k}$ questa equazione definisce tre velocità di fase del suono ω/k, in generale, distinte. È caratteristica di un mezzo piezoelettrico la dipendenza complessa della velocità dalla direzione dell'onda.

5. Un cristallo piezoelettrico appartenente alla classe C_{6v} è delimitato da una superficie piana (piano xz) passante per l'asse di simmetria (asse z). Trovare la velocità delle onde superficiali che si propagano perpendicolarmente all'asse di simmetria (lungo l'asse x); nell'onda sono soggetti ad oscillazioni lo scorrimento u_z e il potenziale del campo elettrico φ (*J. L. Bleustein* 1968; *J. V. Gulyaev*, 1969).

Soluzione. Sotto le condizioni considerate dal sistema di equazioni (4)-(5) si separano due equazioni non contenenti altro che u_z e φ; queste grandezze dipendono dalle coordinate x, y (e dal tempo t), ma non da z. Le componenti non nulle del tensore degli sforzi e del vettore di induzione sono

$$\sigma_{zx} = \beta E_x + 2\lambda u_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \beta E_y + 2\lambda u_{zy},$$
$$D_x = -8\pi\beta u_{zx} + \varepsilon E_x, \quad D_y = -8\pi\beta u_{zy} + \varepsilon E_y,$$

ove

$$u_{zx} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad u_{zy} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

e per brevità sono introdotte le notazioni seguenti:

$$\beta_{x,\,xz} = \beta_{y,\,yz} \equiv \beta, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yz\,yz} \equiv \lambda, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon;$$

la costante piroelettrica di induzione $D_z = D_0$ non figura nell'equazione e nelle condizioni di frontiera.

L'equazione (5) e la componente z dell'equazione (4) danno le seguenti espressioni per il dominio occupato dal mezzo piezoelettrico (il semispazio $y > 0$):

$$4\pi\beta\Delta u_z + \varepsilon\Delta\varphi^{(i)} = 0, \quad \rho\ddot{u}_z = -\beta\Delta\varphi^{(i)} + \lambda\Delta u_z,$$

ove $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; riscriviamo questa equazione nella forma

$$\rho \ddot{u}_z = \lambda \Delta u_z, \quad \Delta\psi = 0, \tag{6}$$

ove

$$\bar{\lambda} = \lambda + \frac{4\pi\beta^2}{\varepsilon}, \quad \psi = \frac{4\pi\beta}{\varepsilon} u_z + \varphi^{(i)}.$$

Nel vuoto invece (il semispazio $y < 0$) il potenziale $\varphi^{(e)}$ soddisfa l'equazione

$$\Delta\varphi^{(e)} = 0. \tag{7}$$

Queste equazioni vanno risolte sotto le seguenti condizioni di frontiera sulla superficie del mezzo:

$$\varphi^{(i)} = \varphi^{(e)}, \quad \sigma_{zy} = 0, \quad D_y^{(i)} = -\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial y} \text{ per } y = 0, \tag{8}$$

e nelle condizioni

$$u_z \to 0 \text{ per } y \to \infty; \quad \varphi \to 0 \text{ per } y \to \pm\infty$$

lontano dalla superficie. Cerchiamo la soluzione nella forma

$$u_z = Ae^{-\varkappa y} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \psi = Be^{-ky} e^{i(kx-\omega t)}, \quad \varphi^{(e)} = Ce^{ky} e^{i(kx-\omega t)},$$

quando

$$\rho\omega^2 = \bar{\lambda}(k^2 - \varkappa^2). \tag{9}$$

Le equazioni (6), (7) e le condizioni all'infinito sono già soddisfatte mentre le condizioni (8) danno tre equazioni omogenee lineari per A, B, C e la loro condizione di risoluzione conduce alla relazione

$$\varkappa = k \frac{4\pi\beta^2}{\bar{\lambda}\varepsilon(1+\varepsilon)} \equiv \Lambda k.$$

Infine, sostituendola nella (9) troviamo la velocità di fase delle onde

$$\frac{\omega}{k} = \left[\frac{\bar{\lambda}}{\rho}(1-\Lambda^2)\right]^{1/2}.$$

La propagazione superficiale di queste onde è specifica per un mezzo piezoelettrico. Per $\beta \to 0$ la profondità di penetrazione è $1/\varkappa \to \infty$, val a dire che l'onda diventa volumetrica.

§ 18. *Disuguaglianze termodinamiche*

Secondo le formule date al § 10 l'energia libera totale è rappresentabile sotto la forma dell'integrale

$$\mathscr{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D})\, dV, \tag{18,1}$$

esteso a tutto lo spazio Supponiamo che la funzione $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ nell'espressione integranda soddisfi la sola equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \tag{18,2}$$

all'interno del dielettrico e la condizione

$$\oint \mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 4\pi e \tag{18,3}$$

sulla superficie del conduttore che porta la carica data; queste uguaglianze stabiliscono un legame tra il campo e le sue sorgenti. Per il resto considereremo la funzione $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ arbitraria, in particolare, non si chiede che essa soddisfi la seconda equazione del campo rot $\times$ $\times\, \mathbf{E} = 0$ (ove $\mathbf{E} = 4\pi\partial F/\partial\mathbf{D}$) e la condizione di frontiera $\varphi =$ costante sulla superficie dei conduttori. Mostriamo che queste equazioni mancanti si possono ottenere, in questo caso, dalla condizione di minimo dell'integrale (18,1) rispetto alle variazioni della funzione $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ che verifica le equazioni (18,2) e (18,3). Sottolineiamo che questa deduzione non è immediata a priori in quanto le distribuzioni del campo concorrenti nel determinare il minimo dell'integrale (18,1) non corrispondono a stati fisicamente possibili (poiché per esse non tutte le equazioni del campo sono soddisfatte); nella condizione termodinamica di minimo dell'energia libera si confrontano mutuamente diversi stati fisicamente possibili.

Il problema della ricerca del minimo dell'integrale (18,1) sotto le condizioni supplementari (18,2) e (18,3) si risolve con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Seguendo questo metodo, moltiplichiamo la variazione della condizione (18,2) per una certa funzione delle coordinate per il momento incognita (indichiamola con $-\varphi/4\pi$) e la variazione della condizione (18,3) per un fattore costante indeterminato (indichiamolo con $\varphi_0/4\pi$) ed uguagliamo a zero la somma delle variazioni:

$$\int \delta F\, dV - \frac{1}{4\pi}\int \varphi \operatorname{div} \delta\mathbf{D}\, dV + \frac{\varphi_0}{4\pi}\oint \delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 0.$$

Nel primo termine scriviamo [1])

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}}\right)_{T,\rho} \delta\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\delta\mathbf{D},$$

e il secondo lo trasformiamo in parti

$$\int \varphi \operatorname{div} \delta\mathbf{D}\, dV = \oint \varphi\delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} - \int \delta\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi\, dV.$$

Come risultato otteniamo

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad}\varphi)\, \delta\mathbf{D}\, dV + \oint (\varphi_0 - \varphi)\, \delta\mathbf{D}\, d\mathbf{f} = 0.$$

---

[1]) L'energia libera ha un minimo a temperatura data. Si deve variare rispetto a due grandezze indipendenti: $\mathbf{D}$ e ρ. Qui presenta interesse la sola variazione rispetto a $\mathbf{D}$, mentre la variazione dell'integrale (18,1) rispetto alla densità (sotto condizione complementare di costanza della massa totale del corpo) dà una delle condizioni ordinarie di equilibrio termico, ossia la costanza del potenziale chimico ζ.

Di qui concludiamo che in tutto il volume deve essere $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \times \varphi$ (e perciò rot $\mathbf{E} = 0$) e sulla superficie del conduttore $\varphi = \varphi_0 =$ = costante. Queste sono le equazioni corrette per l'intensità del campo e il moltiplicatore di Lagrange φ ne diventa il potenziale.

Si può mostrare analogamente che le equazioni per l'induzione elettrica si ottengono dalla condizione di massimo dell'integrale

$$\tilde{\mathscr{F}} = \int \tilde{F}(T, \rho, \mathbf{E})\, dV,$$

nel quale si deve variare la funzione $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ sotto le condizioni supplementari che $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ e $\varphi =$ costante sulla superficie del conduttore [1]). Abbiamo infatti

$$\delta\tilde{\mathscr{F}} = \int \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathbf{E}} \delta\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{D}\nabla\delta\varphi\, dV = \frac{1}{4\pi} \oint \delta\varphi \mathbf{D}\, d\mathbf{f} - \\ - \frac{1}{4\pi} \int \delta\varphi \operatorname{div} \mathbf{D}\, dV = 0.$$

Il primo integrale è nullo poiché $\delta\varphi = 0$ sulla superficie, e dal secondo ricaviamo, essendo $\delta\varphi$ arbitraria nel volume, l'equazione cercata div $\mathbf{D} = 0$.

Se il corpo non si trova in un campo elettrico esterno (in particolare, non esistono conduttori carichi), risulta possibile formulare la condizione di equilibrio termodinamico come condizione di minimo assoluto (incondizionato) dell'energia libera totale (18,1). Questa condizione di riduce a quella di minimo della densità dell'energia libera F quale funzione della variabile indipendente $\mathbf{D}$:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\mathbf{E}}{4\pi} = 0,$$

---

[1]) Il fatto che il potenziale termodinamico $\tilde{\mathscr{F}}$ ha esattamente un massimo rispetto alla variabile $\mathbf{E}$ (o $\mathbf{D}$) e non minimo come $\mathscr{F}$ ha un carattere generale e si spiega con le considerazioni seguenti. Supponiamo che il valore d'equilibrio di una variabile x (per fissare le idee, sia $x = 0$) sia definito dalla condizione di equilibrio termodinamico. Allora l'energia libera $\mathscr{F}$ ha per T e V determinati un minimo per $x = 0$. In altre parole, nel punto $x = 0$ abbiamo $X \equiv (\partial\mathscr{F}/\partial x)_{V,T} = 0$ e nell'intorno di questo punto

$$X = \alpha x, \quad \mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \frac{\alpha}{2} x^2, \quad \alpha > 0.$$

Se introduciamo ora il potenziale termodinamico $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} - xX$, avremo

$$\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_0 - \frac{\alpha}{2} x^2 = \mathscr{F}_0 - \frac{1}{2\alpha} X^2,$$

vale a dire che $\tilde{\mathscr{F}}$ ha in equilibrio un massimo rispetto a x o X. Rispetto ad altre variabili y, indipendenti da x, un minimo hanno sia $\mathscr{F}$ che $\tilde{\mathscr{F}}$.

vale a dire che l'intensità del campo deve essere nulla in tutto lo spazio. Se inoltre è possibile indicare la distribuzione dell'induzione soddisfacente alla condizione div $\mathbf{D} = 0$, lo stato così ottenuto corrisponderà all'equilibrio termodinamico [1]).

Uguagliando a zero la prima variazione dell'energia libera troviamo le condizioni di minimo necessarie ma non sufficienti. Per ottenere le condizioni sufficienti si deve studiare la seconda variazione. Queste condizioni hanno la forma di disuguaglianze (le cosiddette disuguaglianze termodinamiche) e sono, come è noto, condizioni che garantiscono la stabilità dello stato del corpo (cfr. V § 21).

Per $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ tutte le relazioni si semplificano e la disuguaglianza termodinamica cercata (legata alle proprietà dielettriche del corpo) è immediata. L'energia libera totale è

$$\mathscr{F}_0 + \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV.$$

È ovvio che essa può avere un minimo soltanto se $\varepsilon > 0$; in caso contrario si potrebbe diminuire infinitamente l'integrale e dare all'induzione $\mathbf{D}$ valori grandi a piacere. In tal modo, in questo caso non otteniamo niente di nuovo poiché sappiamo già che la permettività dielettrica deve essere in realtà non soltanto positiva ma anche superiore all'unità (cfr. § 14).

Nel caso generale di un legame qualsiasi tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$, invece, è indispensabile considerare la seconda variazione dell'integrale (18,1), per di più, si devono anche far variare contemporaneamente $\mathbf{D}$ e ρ (lasciando costante la sola temperatura). In un corpo isotropo $F(T, \rho, \mathbf{D})$ dipende unicamente dal valore assoluto del vettore $\mathbf{D}$, mentre le sue tre componenti variano indipendentemente. Scegliamo la direzione del vettore non variato $\mathbf{D}$ come asse z. Allora la variazione del valore assoluto del vettore $\mathbf{D}$ si esprime in funzione della variazione delle sue componenti a meno di termini del secondo ordine mediante la relazione

$$\delta D = \delta D_z + \frac{1}{2D}\left[(\delta D_x)^2 + (\delta D_y)^2\right].$$

La prima e la seconda variazione dell'integrale (18,1) sono entrambe contenute nell'espressione

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D}\,\delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho}\,\delta\rho + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}\,\delta D^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D\,\delta\rho}\,\delta D\,\delta\rho + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\,\delta\rho^2 \right\} dV.$$

---

[1]) Qui intendiamo corpi in cui può essere $\mathbf{D} \neq 0$ per $\mathbf{E} = 0$ (si veda il paragrafo seguente). In caso contrario, avremmo risultato banale $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = 0$ in tutto lo spazio.

Sostituendovi δD e riunendo i termini del secondo ordine, troviamo la seconda variazione

$$\int \frac{1}{2D}\frac{\partial F}{\partial D}(\delta D_x^2+\delta D_y^2)\,dV+$$
$$+\int\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}\delta D_z^2+\frac{\partial^2 F}{\partial D\delta\rho}\delta D_z\delta\rho+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\delta\rho^2\right\}dV. \qquad (18,4)$$

Ambedue i termini qui scritti sono mutuamente indipendenti. Il primo di essi è positivo se $\frac{1}{D}\frac{dF}{\partial D}>0$. Ma $\partial F/\partial\mathbf{D}=\mathbf{E}/4\pi$ in modo che la derivata $\partial F/\partial D$ è positiva o negativa a seconda che il vettore $\mathbf{D}$ abbia la stessa direzione del vettore $\mathbf{E}$ o quella opposta. Quindi, i vettori $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ devono essere diretti allo stesso modo.

Le condizioni di positività del secondo termine nell'espressione (18,4) sono contenute nelle disuguaglianze

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}>0, \qquad (18,5)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\,\partial D}\right)^2>0. \qquad (18,6)$$

Poiché $\partial F/\partial\rho=\zeta$ e $\partial F/\partial D=E/4\pi$, la prima di esse dà

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_{D,\,T}>0, \qquad (18,7)$$

e la seconda si può riscrivere nella forma jacobiana

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial F}{\partial D},\,\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)}{\partial(D,\,\rho)}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\,\zeta)}{\partial(D,\,\rho)}>0.$$

Passando dalle variabili D, ρ alle variabili D, ζ abbiamo

$$\frac{\partial(E,\,\zeta)}{\partial(D,\,\rho)}=\frac{\partial(E,\,\zeta)}{\partial(D,\,\zeta)}\frac{\partial(D,\,\zeta)}{\partial(D,\,\rho)}=\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_\zeta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_D>0;$$

in virtù della (18,7) questa disuguaglianza è equivalente alla condizione

$$\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_{\zeta,\,T}>0. \qquad (18,8)$$

Abbiamo trovato così le disuguaglianze termodinamiche cercate. In assenza di campo la disuguaglianza (18,7) diventa la condizione ordinaria di positività della compressibilità isotermica: $(\partial P/\partial\rho)_T>0$ [1].

[1]) Ricordiamo che in assenza di campo ζ è il potenziale termodinamico dell'unità di massa della sostanza e, in accordo con le relazioni termodinamiche ordinarie, il suo differenziale è

$$d\zeta=\frac{1}{\rho}dP-\frac{S}{\rho}dT,$$

in modo che $(\partial\zeta/\partial\rho)_T=(\partial P/\partial\rho)_T/\rho$. Nella deduzione esposta è rimasta in disparte la seconda delle disuguaglianze termodinamiche ordinarie, ossia la condizione di positività del calore specifico.

La disuguaglianza (18,8) dà, invece, $\varepsilon > 0$ poiché per $E \to 0$ l'induzione $D \to \varepsilon E$.

Tra le disuguaglianze (18,5) e (18,6) quest'ultima è più forte: essa può essere violata prima che sia violata la disuguaglianza (18,5), mentre l'inverso è impossibile. L'uguaglianza

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \rho\, \partial D}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(D, \rho)} = 0$$

corrisponde allo *stato critico* (cfr. V § 83). È più comodo scriverla, questa condizione, in un'altra forma, moltiplicandola per un fattore $\partial(D, \rho)/\partial(E, \rho)$ non nullo:

$$\frac{\partial(E, \zeta)}{\partial(E, \rho)} - \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\right)_{E, T} = 0. \qquad (18,9)$$

Nel piano E, T gli stati critici descrivono una linea. Questa linea è singolare per le funzioni termodinamiche del corpo, così come è singolare il punto critico in assenza di campo.

§ 19. *Corpi ferroelettrici*

Fra le diverse modificazioni cristalline di una medesima sostanza alcune possono essere piroelettriche e altre non piroelettriche. Se una transizione tra due di queste modificazioni avviene mediante la transizione di fase di seconda specie, in prossimità del punto di transizione la sostanza manifesta alcune proprietà particolari che la distinguono da un corpo piroelettrico ordinario. Corpi che godono di queste proprietà si chiamano *ferroelettrici*.

In un cristallo piroelettrico ordinario la variazione della direzione della polarizzazione spontanea è dovuta a una ristrutturazione sostanziale del reticolo cristallino. Anche se il risultato finale di questa ristrutturazione fosse energeticamente vantaggioso, la sua realizzazione potrebbe tuttavia essere impossibile in quanto essa potrebbe richiedere il superamento di « barriere energetiche » molto elevate.

In un corpo ferroelettrico, invece, la situazione è notevolmente diversa grazie al fatto che in prossimità del punto di transizione di fase di seconda specie la disposizione degli atomi nel reticolo cristallino della fase piroelettrica differisce poco dalla loro disposizione nel reticolo non piroelettrico (per cui è piccola anche la polarizzazione spontanea). Questa è la ragione per cui una variazione della direzione della polarizzazione spontanea richiede in questo caso una piccola ristrutturazione del reticolo e può verificarsi in modo abbastanza facile.

Le proprietà ferroelettriche concrete del corpo dipendono notevolmente dalla sua simmetria cristallina. La direzione della polarizzazione spontanea (che chiameremo asse ferroelettrico) è già prede-

terminata dalla struttura della fase non piroelettrica dell'altro lato del punto di transizione. In alcuni casi questa predeterminazione è univoca nel senso che l'asse ferroelettrico compare esclusivamente in una direzione cristallografica ben determinata; la direzione della polarizzazione spontanea, in questo caso, è predeterminata a meno del segno poiché nella fase non piroelettrica le due direzioni opposte parallele all'asse ferroelettrico devono essere equivalenti (in caso contrario, questa modificazione cristallina ammetterebbe anch'essa la piroelettricità). In altri casi la simmetria della fase non piroelettrica può essere tale da consentire la comparsa della polarizzazione spontanea in alcune direzioni cristallografiche equivalenti [1]. La comparsa della polarizzazione è sempre legata ad una diminuzione della simmetria del cristallo. Perciò si può parlare della fase non piroelettrica (secondo la terminologia introdotta nel V capitolo § 142) come della fase simmetrica, e della fase piroelettrica come asimmetrica.

Mostriamo in che modo è costruita la teoria della ferrroelettricità nell'ambito della teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie di Landau (questa teoria è stata originariamente costruita da *V. L. Ginzburg*, 1945) [2].

Supponiamo che il vettore di polarizzazione dielettrica della sostanza **P** sia un parametro d'ordine la cui grandezza determina il grado di deviazione della struttura del reticolo cristallino della fase asimmetrica da quella simmetrica. Ciò vuol dire che **P** sarà considerato come una variabile termodinamica indipendente il cui valore di fatto (quale funzione della temperatura, del campo ecc.) sarà definito in seguito mediante la condizione di equilibrio termico, ossia dal minimo di potenziale termodinamico.

Consideriamo inizialmente il caso di disposizione univoca dell'asse ferroelettrico che facciamo coincidere con l'asse z. Le proprietà dielettriche del cristallo nelle direzioni degli assi x e y, in questo caso, non

---

[1]) Di esempio del primo tipo serve il sale di Seignette la cui fase non piroelettrica gode della simmetria rombica. L'asse ferroelettrico compare in esso in una direzione cristallografica ben determinata (uno degli assi del secondo ordine) e il reticolo diventa monoclino.

L'esempio di secondo tipo è fornito dal titanato di bario. La sua modificazione non piroelettrica ha il reticolo cubico e ciascuno dei tre assi cubici può essere ferroelettrico. Dopo la comparsa della polarizzazione spontanea nel punto di transizione queste tre direzioni, ovviamente, cessano di essere equivalenti: il solo asse ferroelettrico resta quello del quarto ordine e il reticolo diventa tetragonale.

[2]) La teoria di Landau diventa inapplicabile a priori in prossimità sufficiente al punto di transizione. La ragione di questo fatto nel caso dei ferroelettrici richiede un'analisi concreta dei dati sperimentali e supera i limiti del presente libro. È da notare che numerose transizioni ferroelettriche sono di fatto transizioni non di seconda specie ma di prima, vicine a quelle di seconda specie. Probabilmente, ciò è dovuto all'effetto di fluttuazione menzionata alla fine del V § 146.

manifestano nessuna anomalia, e per lo studio delle proprietà lungo l'asse z è sufficiente considerare nel potenziale termodinamico i soli termini contenenti P_z. In prossimità del punto di transizione il parametro d'ordine P_z è piccolo e il potenziale termodinamico Φ può essere sviluppato nelle sue potenze. Poiché ambedue le direzioni dell'asse z sono equivalenti, lo sviluppo non può dipendere dal segno di P_z, vale a dire che esso contiene le sole potenze pari. A meno dei termini del quarto ordine abbiamo:

$$\Phi = \Phi_0 + AP_z^2 + BP_z^4. \tag{19,1}$$

Nella fase simmetrica $A > 0$ e per il minimo di potenziale termodinamico si ha $P_z = 0$. Affinché possa comparire la polarizzazione spontanea il coefficiente A deve essere negativo; di conseguenza, nel punto di transizione di fase esso si annulla. Nella teoria di Landau è supposto che la funzione $A\ (T)$ sia sviluppabile in potenze intere di $T - T_c$, ove T_c è la temperatura del punto di transizione; nell'intorno di questo punto poniamo $A = a\ (T - T_c)$ dove a è una costante (indipendente dala temperatura); per fissare le idee, supponiamo che $a > 0$ in modo che alla fase asimmetrica corrispondono temperature $T < T_c$. La condizione di stabilità nel punto stesso $T = T_c$ richiede che il coefficiente B sia positivo in questo punto e, quindi, ovunque nelle sue adiacenze; in seguito con B indicheremo il suo valore $B\ (T_c)$.

Se il campo elettrico nel corpo è non nullo nel potenziale termodinamico compaiono termini addizionali. Per trovarli partiamo dalla relazione

$$4\pi \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{E}} = -\mathbf{D} = -\mathbf{E} - 4\pi \mathbf{P}. \tag{19,2}$$

Integrandola per un determinato valore della variabile $\mathbf{P}$ (e tenendo conto che per $\mathbf{E} = 0$ i potenziali Φ e $\tilde{\Phi}$ coincidono) troviamo

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{P}, \mathbf{E}) = \Phi(\mathbf{P}, 0) - \mathbf{EP} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}.$$

Scegliendo il campo elettrico diretto lungo l'asse z e sostituendo $\Phi\ (\mathbf{P}, 0)$ dalla (19,1) abbiamo

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + a\,(T - T_c)\,P_z^2 + BP_z^4 - E_z P_z - \frac{E_z^2}{8\pi}. \tag{19,3}$$

La presenza del termine $-E_z P_z$ fa sì che per un valore del campo E_z piccolo a piacere il parametro d'ordine P_z diventa non nullo in tutto il dominio delle temperature; il campo polarizza la fase non piroelettrica diminuendone così la simmetria. In tal modo, la differenza qualitativa tra le due fasi scompare e, corrispondentemente

anche, il punto discreto di transizione di fase scompare, vale a dire che la transizione è « smussata » [1]).

Il potenziale termodinamico $\widetilde{\Phi}$ deve avere in equilibrio un minimo per un dato valore dell'intensità **E**. Derivando l'espressione (19,3) per E_z costante troviamo

$$2P_z a(T-T_c)+4BP_z^3=E_z. \tag{19,4}$$

Questa à la relazione fondamentale che stabilisce un legame tra l'intensità del campo e la polarizzazione in un corpo ferroelettrico [2]).

Per $T > T_c$ (nella fase non piroelettrica) P_z si annulla assieme a E_z. Con il crescere di E_z la polarizzazione aumenta inizialmente secondo la legge lineare $P_z = \varkappa E_z$ con la suscettività

$$\varkappa = 1/2\, a\,(T - T_c), T > T_c \tag{19,5}$$

che cresce infinitamente per $T \to T_c$. Con P_z cresce linearmente anche l'induzione $D_z = (1 + 4\pi\varkappa)\, E_z$. Nelle adiacenze del punto di transizione $\varkappa$ è grande e, con la stessa precisione, abbiamo

$$\varepsilon \approx 4\pi\varkappa = \frac{2\pi}{a\,(T-T_c)}. \tag{19,6}$$

Nei campi abbastanza forti la polarizzazione, invece, cresce secondo la legge $P_z = (E_z/4B)^{1/3}$.

Per $T < T_c$ (fase piroelettrica) il valore $P_z = 0$, in generale, non può corrispondere ad uno stato stabile. Per $E_z = 0$ dalla (19,4) troviamo la polarizzazione spontanea della fase piroelettrica:

$$P_{z0} = \pm\sqrt{\frac{a\,(T_c-T)}{2B}}. \tag{19,7}$$

La suscettività dielettrica di questa fase si può definire come il valore della derivata dP_z/dE_z per $E_z \to 0$. Dalla (19,4) abbiamo

$$[-2\,(T_c-T)\,a+12BP_z^2]\,\frac{dP_z}{dE_z}=1 \tag{19,8}$$

e, sostituendovi la (19,7), otteniamo

$$\varkappa = \frac{dP_z}{dE_z}\Big|_{E_z=0} = \frac{1}{4a\,(T_c-T)}, \quad T < T_c. \tag{19,9}$$

---

[1]) Cfr. V § 144. L'esposizione successiva ripete in misura notevole ciò che là è stato già detto.

[2]) Esprimendo **P** (E) dalla (19,4) e sostituendola nella (19,3), otteniamo il potenziale $\widetilde{\Phi}$ (E) come funzione esclusivamente di **E**. Osserviamo che in virtù della condizione $\partial\widetilde{\Phi}$ (**P**, **E**)/∂**P** = 0 l'uguaglianza **D** = $-4\pi\partial\widetilde{\Phi}/\partial$**E** si verifica sia per la funzione $\widetilde{\Phi}$ (E) che per la funzione $\widetilde{\Phi}$ (**P**, **E**) (derivabile per **P** costante).

Notiamo il fatto che questa grandezza è di due volte inferiore alla suscettività della fase non piroelettrica per uno stesso valore $|T_c - T|$. Nei campi abbastanza deboli la polarizzazione è $P_z = P_{z0} + \varkappa E_z$, l'induzione $D_z = D_{z0} + \varepsilon E_z$ ove $D_{z0} = 4\pi P_{z0}$ e la permettività dielettrica

$$\varepsilon = 4\pi\varkappa = \frac{\pi}{a(T_c - T)}. \tag{19,10}$$

Nella fig. 14 è rappresentato il grafico della funzione $P_z(E_z)$ determinata dall'equazione (19,4) (per $T < T_c$). Notiamo prima di tutto che il tratto cc' della curva (tratteggiato) non corrisponde, in generale, a stati stabili; infatti, dall'uguaglianza (19,8) scritta nella forma

$$\frac{dP_z}{dE_z}\left(\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial P_z^2}\right)_{E_z} = 1$$

si vede che per $dP_z/dE_z < 0$ si avrà che anche $\partial^2\tilde{\Phi}/\partial P_z^2 < 0$, vale a dire che il potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ ha un massimo e non un minimo. Le ordinate dei punti c e c' sono definite dall'uguaglianza $dE_z/dP_z = 0$ e possiamo così concludere che i valori possibili di $|P_z|$ nella fase piroelettrica sono limitati inferiormente dalla condizione

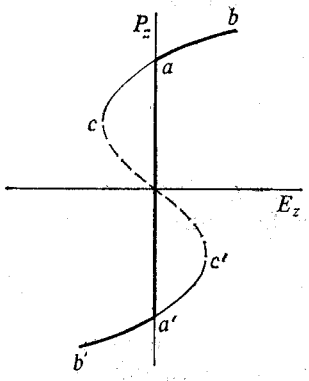


Fig. 14

$$P_z^2 > \frac{(T_c - T)\,a}{6B}. \tag{19,11}$$

Se consideriamo gli stati di un corpo ferroelettrico per valori di E_z dati, nel dominio tra le ascisse dei punti c e c' restano ancora due valori possibili di P_z e sorge la questione sul significato fisico di ambedue le possibilità. Immaginiamo il corpo ferroelettrico in questo caso come una lamina pianoparallela omogenea (con l'asse ferroelettrico perpendicolare al piano della lamina) collocata tra rivestimenti di un condensatore mantenuti a dei potenziali assegnati, che creano cioè un campo omogeneo di intensità data $E = E_z$.

Per dei potenziali dei conduttori assegnati la condizione di stabilità richiede che il potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ sia minimo. In particolare, per $E = 0$ esistono due stati che differiscono per il segno di P_z (i punti a e a' sulla curva della fig. 14) ma corrispondono al medesimo valore $\tilde{\Phi}$ ($= \Phi$). Questi due stati, quindi, sono stabili in misura uguale, rappresentano cioè due fasi che possono esistere contemporaneamente ed essere in contatto l'una con l'altra.

Di qui già è evidente che i tratti ac e $a'c'$ della curva corrispondono a stati che non sono assolutamente stabili ma metastabili. È facile provare immediatamente che i valori di $\tilde{\Phi}$ nei tratti ac e $a'c'$ sono veramente superiori a quelli sui rami $a'b'$ e ab per gli stessi valori E_z. Le ordinate dei punti a e a' sono date dalla formula (19,7). In tal modo, il dominio di metastabilità giace nell'intervallo

$$\frac{(T_c-T)\,a}{6B} < P_z^2 < \frac{(T_c-T)\,a}{2B}. \qquad (19,12)$$

L'esistenza di due fasi con $\mathbf{E} = 0$ è un fatto importante in quanto conduce alla possibilità di separazione di un corpo ferroelettrico in una serie di zone (*domini*) separate differenti per la direzione della polarizzazione. Sulle superficie di separazione tra questi domini devono essere soddisfatte le condizioni di continuità della componente normale di $\mathbf{D}$ e della componente tangente di $\mathbf{E}$. La seconda di queste condizioni è identicamente soddisfatta poiché in generale $\mathbf{E} = 0$). Dalla prima condizione, invece, segue che le frontiere tra i domini devono essere parallele all'asse z. La forma e le dimensioni concrete dei domini sono definite dalla condizione di minimo assoluto del potenziale termodinamico totale del corpo [1]).

Se i dettagli di questa struttura non ci interessano e consideriamo delle porzioni del corpo grandi rispetto alle dimensioni dei domini, si può introdurre la polarizzazione media $\bar{\mathbf{P}}$ rispetto ai volumi delle porzioni considerati. La sua componente $\bar{P}_z$ può assumere, evidentemente, valori nell'intervallo tra le ordinate dei punti a e a', cioè

$$-\sqrt{\frac{(T_c-T)\,a}{2B}} < \bar{P}_z < \sqrt{\frac{(T_c-T)\,a}{2B}}. \qquad (19,13)$$

In altre parole, se nel grafico della fig. 14 con P_z si intende la polarizzazione media nel senso suindicato, alla struttura a domini corrisponde il tratto verticale aa' mentre la curva in grassetto $baa'b'$ si riferisce a tutti gli stati stabili descritti dal corpo.

---

[1]) Sottolineiamo che si tratta dell'equilibrio termodinamico totale. Lo si può realizzare nei corpi ferroelettrici, ma esso non si ottiene di fatto mai nei corpi piroelettrici ordinari in seguito alla già menzionata difficoltà di riorientamento della polarizzazione in essi (e perciò di formazione dei domini). La questione sulle forma e dimensioni dei domini sarà studiata al § 44 per il caso (in molto analogo) di ferromagnetici. Non ci soffermiamo qui sulle particolarità specifiche della struttura a domini dei ferroelettrici. Queste particolarità sono condizionate, soprattutto, dalla rigidità del legame tra direzione della polarizzazione e determinati assi cristallografici, dalla grande suscettività dielettrica (rispetto alla suscettività magnetica dei ferromagnetici) e dal ruolo più grande della strizione.

Passiamo ora ai corpi ferroelettrici appartenenti (nella fase non piroelettrica) al sistema cubico [1]). La simmetria cubica ammette l'esistenza di due grandezze invarianti indipendenti del quarto ordine formate con le componenti del vettore **P**; scegliamo ad esempio:

$$(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^2 \text{ e } (P_x^2P_y^2 + P_x^2P_z^2 + P_y^2P_z^2).$$

Allora lo sviluppo del potenziale termodinamico in prossimità del punto di transizione (per $\mathbf{E} = 0$) ha la forma

$$\Phi = \Phi_0 + a\,(T - T_c)\,(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + \\ + B\,(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)^2 + C\,(P_x^2P_y^2 + P_x^2P_z^2 + P_y^2P_z^2), \qquad (19,14)$$

ove a, B, C sono costanti e gli assi x, y, z sono diretti lungo i tre assi di simmetria del quarto ordine.

L'insieme dei termini del quarto ordine nella (19,14) deve rappresentare un'espressione essenzialmente positiva. A tale scopo deve essere

$$B > 0,\ 3B + C > 0. \qquad (19,15)$$

La polarizzazione spontanea di un corpo ferroelettrico (per $\mathbf{E} = 0$) è determinata dalla condizione di minimo assoluto del potenziale Φ quale funzione di **P**. In particolare, poiché il termine del secondo ordine e il primo dei termini del quarto ordine non dipendono dalla direzione **P**, la direzione della polarizzazione spontanea è determinata dalla condizione di minimo dell'ultimo termine nella (19,14) per un valore assoluto P dato. Allora sono possibili due casi. Se $C > 0$, al valore minimo di questo termine corrispondono le direzioni di **P** lungo gli assi x, y, z, cioè lungo uno dei tre spigoli del cubo. Se, invece, $C < 0$, al valore minimo corrispondono le direzioni lungo le diagonali spaziali del cubo, cioè $P_x^2 = P_y^2 = P_z^2 = P^2/3$. Nel primo caso la fase piroelettrica dei corpi ferroelettrici gode della simmetria tetragonale e nel secondo caso della simmetria romboedrica.

Consideriamo in dettaglio, ad esempio, il primo caso ($C > 0$) e supponiamo che la direzione della polarizzazione spontanea coincida con l'asse z sotto il punto di transizione. La grandezza P_0 della polarizzazione spontanea è determinata (per $\mathbf{E} = 0$) dal minimo dell'espressione

$$-a\,(T_c - T)\,P^2 + BP^4,$$

da cui

$$P_0^2 = \frac{(T_c - T)\,a}{2B}. \qquad (19,16)$$

[1]) Si tratta delle classi cristallografiche T_h e O_h. Le classi cubiche T e T_d ammettono anche l'esistenza dell'invariante del terzo ordine $P_xP_yP_z$; in queste condizioni lo stato con $\mathbf{P} = 0$ non può soddisfare a priori la condizione di stabilità (un minimo di Φ), cosicché la transizione di fase di seconda specie è impossibile). La simmetria della classe O (così come della classe T) ammette l'esistenza dell'invariante **P** rot **P** lineare rispetto alle derivate; ciò implica la comparsa di una struttura non commensurabile (cfr. § 52).

Per determinare la dipendenza tra la polarizzazione e il campo **E** si deve aggiungere alla (19,14) il termine $-\mathbf{PE}$ (passando così al potenziale $\widetilde{\Phi}$) ed uguagliare a zero la derivata $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{P}$.

Per un campo **E** debole sono piccole anche P_x, P_y, $P_z - P_0$. Omettendo nelle equazioni i termini del secondo e di ordine superiore e sostituendovi $P_{0z} = P_0$ dalla (19,16) otteniamo per la polarizzazione longitudinale

$$P_z - P_0 = \frac{1}{4a(T_c - T)} E_z \tag{19,17}$$

e per la polarizzazione trasversale

$$P_x = \frac{B}{aC(T_c - T)} E_x \tag{19,18}$$

(analogamente per P_y). Sopra il punto di transizione, nella fase non piroelettrica, la suscettività dielettrica di un corpo ferroelettrico cubico è la stessa in tutte le direzioni:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2a(T - T_c)} \mathbf{E}. \tag{19,19}$$

Soffermiamoci in breve sulle proprietà elastiche dei ferroelettrici.

A seconda della sua classe cristallina la fase non piroelettrica può godere o meno delle proprietà piezoelettriche [1]). Consideriamo da principio il primo caso, supponendo che la simmetria ammetta un legame piezoelettrico (lineare) tra le deformazioni e la polarizzazione lungo l'asse ferroelettrico (asse z). Tali sono le classi cristalline D_2, D_{2d}, S_4; in tutti questi casi la polarizzazione P_z entra nella parte piezoelettrica del potenziale termodinamico nella forma seguente

$$-\gamma_{z,\,xy} P_z \sigma_{xy}.$$

Quanto all'energia elastica dei cristalli a simmetria suindicata, la componente σ_{xy} del tensore degli sforzi entra in essa sotto la forma

$$-\mu_{xyxy}\sigma_{xy}^2.$$

In tal modo, per il potenziale termodinamico in prossimità del punto di transizione abbiamo (per brevità, indichiamo $\gamma_{z,xy} = \gamma$, $\mu_{xy\,xy} = \mu$) [2])

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c) P_z^2 + BP_z^4 - \gamma P_z \sigma_{xy} - \mu\sigma_{xy}^2 - E_z P_z - \frac{E_z^2}{8\pi}. \tag{19.20}$$

[1]) La fase non piroelettrica dei ferroelettrici, che gode delle proprietà piezoelettriche, può riferirsi alle otto delle dieci classi elencate alla pag. 111:

$$\mathbf{D}_2,\ \mathbf{D}_4,\ \mathbf{D}_{2d},\ \mathbf{S}_4,\ \mathbf{D}_3,\ \mathbf{D}_6,\ \mathbf{C}_{3h},\ \mathbf{D}_{3h}.$$

[2]) Poiché lo sviluppo è di carattere diverso, le definizioni dei tensori $\gamma_{i,kl}$ e μ_{iklm} non coincidono qui con i tensori indicati con gli stessi simboli introdotti nel § 17, ma le loro proprietà di simmetria sono, ovviamente, uguali.

Trascuriamo i termini con le altre componenti di **P** e σ_{ik} in quanto essi non implicano anomalie delle proprietà piezoelettriche in prossimità del punto di transizione.

Uguagliando a zero la derivata $\partial\tilde{\Phi}/\partial P_z$ per $E_z =$ costante, otteniamo l'equazione

$$E_z = 2a\,(T - T_c)\,P_z + 4BP_z^3 - \gamma\sigma_{xy}. \qquad (19,21)$$

Le componenti del tensore di deformazione si ottengono derivando il potenziale termodinamico (19,20) rispetto alle componenti corrispondenti di σ_{ik} (crf. la (17.4)) [1])

$$u_{xy} = {}^1/_2\gamma P_z + \mu\sigma_{xy}. \qquad (19,22)$$

Nella fase non piroelettrica per un campo E debole si può trascurare nell'espressione (19,21) il termine con P_z^3:

$$E_z = 2a\,(T - T_c)\,P_z - \gamma\sigma_{xy}.$$

Sostituendo di qui P_z nell'espressione (19,22) abbiamo

$$u_{xy} = \frac{\gamma}{4a\,(T-T_c)}\,E_z + \left[\mu + \frac{\gamma^2}{4a\,(T-T_c)}\right]\sigma_{xy}.$$

Il coefficiente di σ_{xy} in questa formula funge da modulo di elasticità per le deformazioni nelle quali si mantiene costante l'intensità del campo E_z, mentre μ nella formula (19,22) è il modulo di elasticità per la deformazione a polarizzazione P_z costante. Perciò si può scrivere

$$\mu^{(E)} = \mu^{(P)} + \frac{\gamma^2}{4a\,(T-T_c)}, \qquad (19,23)$$

ove gli indici superiori indicano il carattere della deformazione. Si vede che questi due coefficienti si comportano in modo diverso: mentre $\mu^{(P)}$ è una grandezza costante finita, il modulo $\mu^{(E)}$ cresce infinitamente in prossimità del punto di transizione [2]).

Nella fase piroelettrica la formula (19,22) mostra che la polarizzazione spontanea implica una deformazione del corpo. Se non esistono sforzi interni e si ha che $\mathbf{E} = 0$, la deformazione u_{xy} è proporzionale a P_{z0}, cioè varia con la temperatura come $\sqrt{T_c - T}$.

Se la simmetria (cubica, per esempio) della fase non piroelettrica del corpo ferroelettrico non ammette un effetto piezoelettrico lineare, allora i primi termini diversi da zero nello sviluppo del potenzia-

---

[1]) Su derivazione rispetto alle componenti tensoriali si veda la nota alla pag. 112.

[2]) È grandezza costante anche il modulo $\mu^{(D)} = \mu + \gamma^2/8\pi$ che determina la deformazione per induzione costante D_z.

le termodinamico in potenze di σ_{ik} e **P** sono quadratici rispetto a **P**, cioè hanno la forma

$$-\gamma_{ik\,lm}P_iP_k\sigma_{lm}, \tag{19,24}$$

ove $\gamma_{ik\,lm}$ è un tensore del quarto ordine simmetrico rispetto alle coppie di indici ik e lm. In questi casi, la deformazione che compare nella fase piroelettrica sotto l'influenza della polarizzazione spontanea rappresenta un effetto quadratico (rispetto a $\mathbf{P}_0$) per cui varia con la temperatura come $T_c - T$.

Possono sorgere dei dubbi sulla legittimità di usare l'espressione (19,24) nel potenziale termodinamico poiché nel § 17 è stato indicato che quest'ultimo può essere usato a condizione di trascurare gli effetti quadratici. Tuttavia, i corpi ferroelettrici sono in questo senso un'eccezione poiché (in prossimità del punto di transizione) l'intensità **E** è piccola rispetto alla polarizzazione **P** (o all'induzione **D**), a causa della crescita infinita della suscettività dielettrica. L'introduzione del potenziale termodinamico era legata al fatto che erano trascurate le grandezze di ordine EDu_{ik}(o, il che è lo stesso, $ED\sigma_{ik}$); l'espressione (19,24), invece, è di ordine di $D^2\sigma_{ik}$.

§ 20. Corpi ferroelettrici impropri

La teoria della ferroelettricità esposta nel § 19 è basata sull'identificazione del vettore di polarizzazione del cristallo con il parametro d'ordine che determina il cambiamento della simmetria cristallina per una transizione di fase. Questa ipotesi, tuttavia, non sempre è applicabile; può succedere che la comparsa della polarizzazione spontanea di per se stessa non determini completamente il carattere del cambiamento della struttura cristallina.

Ricordiamo (cfr. V § 145) che il parametro d'ordine nella transizione di fase di seconda specie è una grandezza o un insieme di grandezze che si trasformano secondo una delle rappresentazioni irriducibili (non unitarie) del gruppo di simmetria della fase iniziale (simmetrica). Sono esattamente le proprietà di trasformazione del parametro d'ordine a determinare il caratterie del cambiamento (della diminuzione) della simmetria per una transizione di fase, mentre il suo significato fisico concreto è inessenziale. Da parametro d'ordine possono fungere varie grandezze fisiche a condizione che esse siano legate mutuamente da relazioni lineari e perciò identiche rispetto alle loro proprietà di trasformazione.

La scelta del vettore **P** come parametro d'ordine è equivalente all'ipotesi che quest'ultimo si trasformi secondo la stessa rappresentazione delle componenti di un vettore (polare). Se la transizione di fase procede senza cambiamento della cella elementare del reticolo (piú precisamente, soltanto con la sua deformazione), allora si tratta delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi puntiformi di

simmetria, ossia delle classi cristalline. Nelle classi cristalline appartenenti alla categoria biassica (§ 13) ciascuna componente del vettore si trasforma secondo una delle rappresentazioni unidimensionali. Lo stesso si può dire della componente del vettore lungo l'asse di simmetria principale (del terzo, quarto o sesto ordine) dei cristalli uniassici. Per tutte queste rappresentazioni può fare da parametro d'ordine una componente corrispondente del vettore **P**, e ad esse si riferisce la teoria basata sul potenziale termodinamico (19,1). Le componenti di **P** nel piano perpendicolare all'asse di simmetria principale di un cristallo uniassico si trasformano secondo la rappresentazione irriducibile bidimensionale e possono servire da parametro d'ordine per questa rappresentazione. Infine, nei cristalli con simmetria cubica tutte e tre le componenti del vettore si trasformano secondo una rappresentazione tridimensionale; a questo caso si riferisce la teoria della ferroelettricità basata sul potenziale termodinamico (19,14).

Ma esistono anche transizioni ferroelettriche in cui il parametro d'ordine si trasforma secondo una rappresentazione irriducibile della fase « simmetrica », non corrispondente alle componenti del vettore. In questi casi da parametro d'ordine funge non la polarizzazione ma grandezza di altra natura fisica; la polarizzazione spontanea, invece, compare in un certo senso come effetto secondario (si suppone, ovviamente, che la simmetria della fase « asimmetrica » ammetta la piroelettricità). Corpi ferroelettrici di questo tipo si chiamano *impropri* e differiscono notevolmente per il carattere delle anomalie dielettriche dai corpi ferroelettrici ordinari [1]). A questa categoria si riferiscono tutte le transizioni ferroelettriche in cui cambia la cella elementare, cioè in cui cambia la simmetria di traslazione del reticolo (le rappresentazioni irriducibili corrispondenti non possono essere realizzate a priori da grandezze vettoriali invarianti rispetto alle traslazioni) [2], ma queste possono essere anche transizioni in cui la simmetria di traslazione del reticolo non cambia (il parametro d'ordine si trasforma secondo una rappresentazione irriducibile del gruppo puntiforme non corrispondente alle componenti del vettore).

In una transizione ferroelettrica ordinaria, quando il cambiamento della simmetria è determinato completamente dal vettore di polarizzazione, si passa a un sottogruppo superiore (tra quelli che ammettono la piroelettricità) del gruppo spaziale della fase iniziale (non piroelettrica). Per una transizione ferroelettrica impropria la fase piroelettrica fa parte di un sottogruppo di simmetria più bassa.

Le proprietà termodinamiche concrete dei ferroelettrici impropri possono essere le più diverse relativamente alla varietà delle proprie-

[1]) La possibilità di esistenza di questi corpi ferroelettrici è stata indicata da *V. L. Indenbom* (1960).

[2]) Tali sono infatti tutti i ferroelettrici impropri noti.

tà di trasformazione delle grandezze che si trasformano secondo le rappresentazioni irriducibili più disparate dei gruppi spaziali. Consideriamo qui (sempre nei limiti della teoria delle transizioni di fase di Landau) un solo esempio formale per illustrare alcuni punti di principio.

Consideriamo la transizione (senza cambiamento della cella elementare) di un cristallo non piroelettrico della classe C_{3h} nella classe C_1 che consente la polarizzazione spontanea, mentre il parametro d'ordine è a due componenti (η_1, η_2) e si trasforma secondo la rappresentazione irriducibile E_u del gruppo C_{3h}; le componenti P_x, P_y del vettore di polarizzazione (nel piano perpendicolare all'asse C_3) si trasformano invece secondo la rappresentazione E_g.

Il potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ in prossimità del punto di transizione deve essere sviluppato in potenze del parametro d'ordine η_1, η_2 e della polarizzazione P_x, P_y. In questo caso per la comparsa della ferroelettricità è necessario che esistano invarianti misti composti di entrambe queste grandezze, e lineari rispetto al vettore **P**. Nel caso in esame esistono due invarianti di questo tipo: le parti reale e immaginaria del prodotto $(\eta_1 + i\eta_2)^2 (P_x + iP_y)$. Come risultato otteniamo sviluppo della forma

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c)\eta^2 + B\eta^4 + \varkappa \mathbf{P}^2 + C_1\eta^2 [P_x(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - 2P_y\gamma_1\gamma_2] +$$
$$+ C_2\eta^2 [P_y(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) + 2P_x\gamma_1\gamma_2] - \mathbf{EP} - \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi}$$

($\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $\gamma_i = \eta_i/\eta$ e i vettori **E**, **P** giacciono nel piano xy).

Il parametro d'ordine e la polarizzazione sono definiti dalla condizione di minimo di $\tilde{\Phi}$ (per **E** = costante). Diamo i soli risultati caratteristici che sono evidenti senza dover sviluppare i calcoli relativi. Il parametro d'ordine nella fase asimmetrica risulta essere proporzionale, come per ogni transizione di seconda specie (nella teoria di Landau), a $(T_c - T)^{1/2}$. Quanto alla polarizzazione, essa compare come effetto del secondo ordine rispetto a η e perciò è proporzionale a $T_c - T$. Per $T \to T_c$ la suscettività dielettrica non tende all'infinito (come nei corpi ferroelettrici ordinari) poiché, in questo caso, essa non è definita dal coefficiente di η^2 tendente a zero. Tuttavia, essa è soggetta ad una discontinuità finita nel punto di transizione. Ciò è dovuto al fatto che nella fase simmetrica il parametro d'ordine $\eta \equiv 0$ non cambia sotto influsso del campo **E**, mentre esso cambia nella fase asimmetrica, il che dà un contributo supplementare alla suscettività.

È da notare che una transizione ferroelettrica impropria è possibile soltanto per parametri d'ordine a più componenti. Infatti, per

il parametro d'ordine η a una componente l'invariante misto lineare rispetto a **P** non potrebbe essere che ηP_z, ove P_z è una delle componenti del vettore **P** (poiché per una rappresentazione unidimensionale il quadrato η^2 è già esso stesso invariante). Ma ciò significherebbe che η e P_z sarebbero identici rispetto alle loro proprietà di trasformazione così che P_z potrebbe fungere da parametro d'ordine.

Capitolo III

CORRENTE CONTINUA

§ 21. *Densità di corrente e conducibilità*

Dallo studio dei campi elettrici generati da cariche immobili passiamo ora a considerare il moto stazionario delle cariche nei conduttori (corrente elettrica continua).

Indichiamo con $\mathbf{j}$ la densità media del flusso di cariche che viene detta *densità di corrente elettrica* [1]). Nel caso di una corrente continua la distribuzione spaziale di $\mathbf{j}$ è indipendente dal tempo e soddisfa l'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{21,1}$$

che esprime la costanza della carica media totale contenuta in qualsiasi parte del volume conduttore.

Il campo elettrico esistente all'interno del conduttore attraverso il quale passa la corrente continua è anch'esso costante e perciò verifica l'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{21,2}$$

vale a dire che il campo deriva da un potenziale.

Alle equazioni (21,1) e (21,2) deve essere associata un'altra equazione che esprime il legame tra le grandezze $\mathbf{j}$ e $\mathbf{E}$. Questo legame dipende dalle proprietà della sostanza conduttrice e nella maggioranza dei casi lo si può ritenere lineare (*legge di Ohm*).

Se il conduttore è omogeneo e isotropo, la dipendenza lineare si riduce alla semplice proporzionalità

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{21,3}$$

ove il coefficiente σ dipende dalla natura e dallo stato del conduttore e viene chiamato *coefficiente di elettroconducibilità* o, semplicemente, *conducibilità* del corpo.

Nel conduttore omogeneo σ = costante e la sostituzione della (21,3) nella (21,1) dà $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Perciò, in questo caso, il potenziale del campo elettrico verifica l'equazione di Laplace $\Delta\varphi = 0$.

---

[1]) Nel presente capitolo non consideriamo il campo magnetico generato dalla corrente e, quindi, non teniamo conto dell'influsso inverso esercitato da questo campo sulla corrente. Per tenerne conto è indispensabile precisare la definizione di densità di corrente, ciò che sarà fatto al § 30.

Sulla frontiera di separazione tra due mezzi conduttori la componente normale della densità di corrente deve essere, evidentemente, continua. Inoltre, secondo la condizione generale di continuità della componente tangenziale dell'intensità (derivante dall'equazione rot $\mathbf{E} = 0$, cfr. le (1,7) e (6,9)), il rapporto $\mathbf{j}/\sigma$ deve essere parimenti continuo. Quindi, le condizioni di frontiera per la densità di corrente sono:

$$j_{n1} = j_{n2}, \ \mathbf{j}_{t1}/\sigma_1 = \mathbf{j}_{t2}/\sigma_2 \tag{21,4}$$

o per l'intensità del campo

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \ \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \tag{21,5}$$

Sulla frontiera tra conduttore e mezzo non conduttore abbiamo semplicemente $j_n = 0$ o $E_n = 0$ [1]).

Il campo elettrico che mantiene la corrente compie un lavoro meccanico sulle particelle cariche (portatrici di corrente) che si muovono nel conduttore; il lavoro compiuto per secondo e per unità di volume è uguale, evidentemente, al prodotto $\mathbf{jE}$. Questo lavoro è dissipato nella sostanza conduttrice e si trasforma in calore. In tal modo, la quantità di calore emanato per secondo per cm^3 di conduttore omogeneo vale

$$\mathbf{jE} = \sigma E^2 = j^2/\sigma \tag{21,6}$$

(*legge di Joule-Lenz*).

L'emanazione di calore implica un aumento dell'entropia del corpo. Per una emanazione di calore $dQ = \mathbf{jE}\, dV$ l'entropia dell'elemento di volume considerato aumenta di dQ/T. Perciò la velocità di variazione dell'entropia totale del corpo è

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{jE}}{T}\, dV. \tag{21,7}$$

In virtù della legge di crescita dell'entropia questa derivata deve essere positiva. Sostituendo in essa $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, vediamo che da questa condizione si può trarre la conclusione che la conducibilità σ deve essere positiva.

In un corpo anisotropo (monocristallo) le direzioni dei vettori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{E}$, in generale, non coincidono e la dipendenza lineare tra queste grandezze si esprime tramite formule del tipo

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \tag{21,8}$$

[1]) Badiamo al fatto che le equazioni rot $\mathbf{E} = 0$, div $(\sigma\mathbf{E}) = 0$ e le loro condizioni di frontiera (21,5) presentano un'analogia formale con le equazioni del campo elettrostatico nei dielettrici differendo da queste ultime per la sola sostituzione di ε con σ. Questa circostanza consente di trovare soluzioni dei problemi sulla distribuzione di corrente in un mezzo conduttore illimitato immediatamente secondo le soluzioni dei problemi elettrostatici analoghi. Se esistono frontiere tra conduttore e mezzo non conduttore questa analogia non serve perché nell'elettrostatica non esistono mezzi con $\varepsilon = 0$.

ove le grandezze σ_{ik} costituiscono un tensore simmetrico (si veda più avanti) di secondo rango (*tensore di conducibilità*).

Qui è indispensabile fare la seguente osservazione. La simmetria del cristallo di per sé potrebbe consentire la presenza di un termine libero nella relazione lineare tra **j** e **E**,

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + j_i^{(0)}$$

dove $\mathbf{j}^{(0)}$ è un vettore costante. La presenza di questo termine significherebbe che il conduttore è piroelettrico, cioè in assenza di corrente ($\mathbf{j} = 0$) in esso esisterebbe un campo non nullo. In realtà, tuttavia, ciò è impossibile in virtù della legge di crescita dell'entropia: il termine $\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ nell'espressione integranda della formula (21,7) potrebbe avere a priori sia segno positivo che segno negativo per cui la derivata $d\mathscr{S}/dt$ non sarebbe una grandezza sostanzialmente positiva.

Come in un mezzo isotropo la condizione $d\mathscr{S}/dt > 0$ implica la positività di σ, anche in un corpo anisotropo da questa deriva la positività dei valori principali del tensore σ_{ik}.

La dipendenza del numero di componenti indipendenti del tensore dalla simmetria del cristallo è la stessa che vale per ogni tensore simmetrico di secondo rango (cfr. § 13): nei cristalli biassici tutti e tre i valori principali sono distinti, in quelli uniassici due di questi valori sono uguali, nei cristalli cubici sono tutti e tre uguali, vale a dire che un cristallo cubico si comporta relativamente alle sue proprietà di conducibilità come un corpo isotropo.

La simmetria del tensore di conducibilità

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{21,9}$$

deriva dal *principio di simmetria dei coefficienti cinetici*. La formulazione di questo principio generale, dovuta a *L. Onsager*, comoda per le applicazioni qui e in seguito (§§ 26-28), consiste in quanto segue (cfr. V § 120).

Siano $x_1, x_2, \ldots$ alcune grandezze che caratterizzano lo stato di un corpo in ogni suo punto. Introduciamo inoltre le grandezze

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}, \tag{21,10}$$

ove S è l'entropia per unità di volume del corpo e la derivata si calcola a energia costante di questo volume. In uno stato vicino all'equilibrio le grandezze x_a sono prossime ai loro valori di equilibrio, e le grandezze X_a sono piccole. In questo caso nel corpo avvengono i processi tendenti a portarlo nello stato di equilibrio. Si può affermare in generale che le velocità di variazione delle grandezze x_a per questi processi sono funzioni in ogni punto del corpo dei soli valori delle grandezze x_a (o X_a) negli stessi punti. Sviluppando queste funzioni

in serie di potenze di X_a e limitandosi ai termini lineari dello sviluppo, si ottengono relazioni della forma

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = -\sum_b \gamma_{ab} X_b. \tag{21,11}$$

Allora si può affermare che i coefficienti γ_{ab} (*coefficienti cinetici*) sono simmetrici rispetto agli indici a e b [1]):

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}. \tag{21,12}$$

Per l'uso di questo principio è necessario, una volta scelte in modo appropriato le grandezze x_a (o direttamente le loro derivate $\dot{x}_a$), definire le X_a corrispondenti. Di solito, questo problema può essere risolto facilmente mediante la formula che determina la velocità di variazione con il tempo dell'entropia totale del corpo:

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV, \tag{21.13}$$

ove l'integrazione è estesa a tutto il volume del corpo.

Nel caso in esame quando la corrente passa per il conduttore la formula (21,7) esprime questa velocità. Confrontandola con la formula (21,13) vediamo che, considerando come grandezze $\dot{x}_a$ le componenti del vettore densità di corrente $\mathbf{j}$, le grandezze corrispondenti X_a saranno le componenti del vettore $-\mathbf{E}/T$. Il confronto delle formule (21,8) e (21,11) mostra, invece, che da coefficienti cinetici fungono le componenti del tensore di conducibilità, moltiplicate per T, la cui simmetria deriva, quindi, immediatamente dalle relazioni generali (21,12).

Problemi

1. In un mezzo conduttore è immerso un sistema di elettrodi mantenuti a potenziali φ_a costanti. Da ciascuno degli elettrodi esce una corrente J_a. Determinare il calore di Joule totale emesso nel mezzo in un secondo.

Soluzione. Il calore cercato Q è dato dall'integrale

$$Q = \int \mathbf{jE}\, dV = -\int \mathbf{j}\nabla\varphi\, dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})\, dV$$

esteso al volume del mezzo. Trasformiamo questo integrale in quello di superficie tenendo conto che sulla frontiera esterna del mezzo $j_n = 0$ e sulla superficie degli elettrodi $\varphi = \text{costante} \equiv \varphi_a$. Come risultato otteniamo

$$Q = \sum_a \varphi_a J_a.$$

---

[1]) È supposto che le grandezze x_a e x_b si comportino in modo uguale nei confronti del cambiamento di segno del tempo.

2. Determinare la distribuzione del potenziale in una sfera conduttrice nella quale la corrente J entra attraverso un polo e esce attraverso quello opposto.

Soluzione. In prossimità dei poli O e O' (fig. 15) il potenziale deve avere la forma, rispettivamente,

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma R_1} \text{ e } \varphi = -\frac{J}{2\pi\sigma R_2},$$

ove R_1, R_2 sono le distanze dai due poli. Queste funzioni verificano l'equazione di Laplace e gli integrali $-\sigma \int \varphi \cdot d\mathbf{j}$ estesi a semisferi infinitesimi attorno ai punti O e O' valgono $\pm J$. Cerchiamo il potenziale in un punto quasliasi P della sfera nella forma

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi\right\},$$

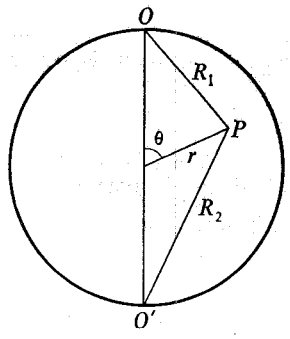


Fig. 15

ove ψ è una soluzione dell'equazione di Laplace non avente poli all'interno della sfera e sulla sua superficie. Dalla simmetria è evidente che ψ (come anche φ) è funzione delle sole coordinate sferiche r e θ.

Sulla superficie della sfera ($r = a$) deve essere $\partial\varphi/\partial\tau = 0$. Derivando di qui troviamo per ψ la condizione al contorno seguente:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{per } r = a.$$

Se $f(r, \theta)$ è una soluzione dell'equazione di Laplace, la funzione $\int_0^r r^{-1} f(r, \theta)\, dr$ è anch'essa una soluzione [1]). Confrontando con la condizione al contorno scritta precedentemente è facile concludere che la soluzione

$$\psi = \frac{1}{2}\int_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}.$$

la soddisfa. Sostituendovi $R_{1,2} = (a^2 + r^2 \mp 2ar\cos\theta)^{1/2}$ e integrando, infine otteniamo

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a}\left(\operatorname{Arsh}\frac{a + r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{Arsh}\frac{a - r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}\right)\right\}$$

(φ è calcolata a partire dal valore $\varphi = 0$ per $r = 0$).

3. Mostrare che la distribuzione di una corrente in un mezzo conduttore corrisponde a un minimo della dissipazione di energia.

---

[1]) È facile dimostrarlo con una verifica diretta e anche per il fatto che la soluzione cercata $f(r, \theta)$ dell'equazione di Laplace dipendente dalle sole variabili r, θ può essere rappresentata nella forma

$$f = \sum_n c_n r^n P_n(\cos\theta),$$

ove c_n sono costanti e P_n polinomi di Legendre.

Soluzione. Si tratta del minimo dell'integrale

$$\int \mathbf{jE}\, dV = \int \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}\, dV$$

con la condizione complementare div $\mathbf{j} = 0$ che esprime la conservazione della carica. Variando rispetto a $\mathbf{j}$ l'integrale

$$\int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - 2\varphi \operatorname{div} \mathbf{j} \right) dV$$

(2φ è un fattore di Lagrange indeterminato) e uguagliando la variazione a zero, otteniamo l'equazione $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \varphi$ o

$$\operatorname{rot} (\mathbf{j}/\sigma) = 0$$

coincidente con le equazioni (21,2) e (21,3).

§ 22. *Effetto Hall*

Se un conduttore si trova in un campo magnetico esterno $\mathbf{H}$, il legame tra la densità di corrente e l'intensità del campo elettrico è dato come prima dalle relazioni

$$j_i = \sigma_{ik} E_k$$

ma le componenti del tensore di conducibilità σ_{ik} sono funzioni di $\mathbf{H}$ e, che è più importante, non sono più simmetriche rispetto agli indici ik. La simmetria di questo tensore è stata dimostrata nel § 21 partendo dal principio di simmetria dei coefficienti cinetici. Ma in un campo magnetico, come è noto, la formulazione di questo principio cambia un po': simultaneamente alla permutazione degli indici nei coefficienti cinetici deve essere invertita la direzione del campo magnetico (cfr. V § 120). Perciò per le componenti del tensore $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ avremo ora le relazioni

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{22,1}$$

Le grandezze $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ e $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ non sono affatto uguali.

Come ogni tensore generale del secondo ordine il tensore σ_{ik} si può dividere in una parte simmetrica e una asimmetrica che indichiamo con s_{ik} e a_{ik}, rispettivamente:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}. \tag{22,2}$$

Per definizione,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}) \tag{22,3}$$

e dalla (22,1) segue che

$$\begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) &= s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) &= a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \tag{22,4}$$

In tal modo, le componenti del tensore s_{ik} sono funzioni pari del campo magnetico e quelle del tensore a_{ik} dispari.

Come è noto, ogni tensore asimmetrico del secondo ordine a_{ik} è equivalente (duale) a un vettore assiale al quale le sue componenti sono legate dalle relazioni

$$a_{xy} = a_z, \; a_{xz} = -a_y, \; a_{yz} = a_x. \tag{22,5}$$

Questo vettore permette di scrivere le componenti del prodotto $a_{ik}E_k$ sotto forma delle componenti del prodotto vettoriale [**Ea**]:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + [\mathbf{Ea}]_i. \tag{22,6}$$

Il calore di Joule emanato dal passaggio di una corrente è determinato dal prodotto **jE**. I vettori [**Ea**] e **E** sono perpendicolari, il loro prodotto si annulla identicamente in modo che

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_iE_k, \tag{22,7}$$

vale a dire che il calore di Joule è determinato (per intensità **E** assegnata) dalla sola parte simmetrica del tensore di conducibilità.

Se il campo magnetico è sufficientemente debole, le componenti del tensore di conducibilità si possono sviluppare secondo le potenze di tale campo. Poiché la funzione **a** (**H**) è dispari, nello sviluppo di questo vettore entreranno i soli termini con potenze dispari. I primi termini dello sviluppo sono lineari rispetto al campo, cioè hanno la forma

$$a_i = \alpha_{ik}H_k. \tag{22,8}$$

I vettori **a** e **H** sono entrambi assiali; perciò le costanti α_{ik} costituiscono un tensore ordinario (polare). Nello sviluppo delle funzioni pari s_{ik} (**H**) entrano i soli termini con potenze pari. Il primo termine dello sviluppo è la conducibilità $\sigma_{ik}^{(0)}$ in assenza di campo, e i primi termini di correzione sono quadratici rispetto al campo:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm}H_lH_m. \tag{22,9}$$

Il tensore β_{iklm} è simmetrico rispetto agli indici ik e rispetto agli indici lm.

Quindi, l'effetto principale dell'influenza del campo, lineare rispetto al campo magnetico è contenuto nel termine [**Ea**] (*effetto Hall*). Esso consiste, come si vede, nella comparsa di una corrente perpendicolare al campo elettrico e proporzionale all'intensità del campo magnetico. Si deve, tuttavia, tener conto che nel caso generale di un mezzo anisotropo arbitrario la corrente di Hall non è l'unica ad essere perpendicolare a **E**; può avere tali componenti la corrente $s_{ik}E_k$ non di Hall.

L'effetto Hall ha un altro aspetto derivante dalle formule inverse che esprimono il campo **E** in funzione della densità di corrente:

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1}j_k.$$

Il tensore inverso σ_{ik}^{-1}, così come σ_{ik}, si può dividere in una parte simmetrica (che indichiamo con ρ_{ik}) e una asimmetrica duale ad un certo vettore assiale **b**:

$$E_i = \rho_{ik} j_k + [\mathbf{jb}]_i. \tag{22,10}$$

Il tensore ρ_{ik} e il vettore **b** godono delle stesse proprietà di s_{ik} e **a**. In particolare, in campi deboli il vettore **b** è lineare rispetto al campo magnetico. Nelle formule (22,10) l'effetto Hall è rappresentato dal termine [**jb**], cioè dalla comparsa di un campo elettrico perpendicolare alla corrente e proporzionale al campo magnetico (e alla corrente **j**).

Tutte le relazioni precedenti si semplificano molto se il conduttore è isotropo. In questo caso, da considerazioni di simmetria, è evidente che il vettore **b** (o **a**) può essere diretto soltanto lungo il campo magnetico. Le uniche componenti non nulle del tensore ρ_{ik} sono $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ e ρ_{zz} ove l'asse z coincide con la direzione del campo. Indicando queste due grandezze con $\rho_\perp$, $\rho_\parallel$ e considerando il piano xz passante per la direzione della corrente avremo

$$E_x = \rho_\perp j_x, \; E_y = -b j_x, \; E_z = \rho_\parallel j_z. \tag{22,11}$$

Di qui si vede che in un conduttore isotropo il campo di Hall è l'unico campo elettrico perpendicolare simultaneamente alla corrente e al campo magnetico.

Nei campi magnetici deboli, il legame tra i vettori **b** e **H** è dato (in un corpo isotropo) da una semplice relazione

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H}. \tag{22,12}$$

La costante R (*costante di Hall*) può essere sia positiva che negativa. Per quanto riguarda i termini quadratici rispetto a **H** nella relazione tra **E** e **j** (che entrano mediante il tensore ρ_{ik}), la loro forma è chiara poiché gli unici vettori che si possono costruire con **j** e **H** (lineari rispetto a **j** e quadratici rispetto a **H**) sono **H** (**jH**) e $\mathbf{j}H^2$. Perciò la forma generale della relazione tra **E** e **j** in un corpo isotropo ed includendo i termini quadratici rispetto a **H** è data dalla formula

$$\mathbf{E} = \rho^{(0)}\mathbf{j} + R\,[\mathbf{Hj}] + \beta_1 \mathbf{j} H^2 + \beta_2 \mathbf{H}\,(\mathbf{Hj}). \tag{22,13}$$

Problema

Esprimere le componenti del tensore inverso σ_{ki}^{-1} in funzione delle componenti s_{ik} e **a**.

Soluzione. Per rendere più semplici i calcoli, consideriamo un sistema di coordinate x, y, z in cui il tensore s_{ik} è ridotto agli assi principali; in seguito, dal tipo di espressioni che si ottengono è facile avere un'idea sulla loro forma generica in un sistema di coordinate arbitrario. Il determinante del tensore è

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2.$$

Evidentemente, nel caso generale

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

Costruendo anche i minori di questo determinante, troviamo le componenti del tensore inverso

$$\sigma_{xx}^{-1} = \rho_{xx} = \frac{s_{yy}s_{zz} + a_x^2}{|\sigma|}, \quad \sigma_{xy}^{-1} = \rho_{xy} + b_z = \frac{a_x a_y - a_z s_{zz}}{|\sigma|}, \ldots$$

Le espressioni generali che si trasformano in queste, nel sistema di coordinate in esame, sono:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{|\sigma|}\{s_{ik}^{-1}|s| + a_i a_k\}, \quad b_i = -\frac{1}{|\sigma|} s_{ik}a_k,$$

il che risolve il problema posto.

§ 23. *Differenza di potenziale di contatto*

Per estrarre da un conduttore attraverso la sua superficie una particella carica è necessario compiere su quest'ultima un determinato lavoro. Viene detto *lavoro d'uscita* il lavoro da compiere sulla particella per estrarla in modo termodinamicamente reversibile. Questa grandezza è sempre positiva come segue immediatamente dal fatto che una carica puntiforme è attratta da ogni corpo neutro ivi compreso ogni conduttore (cfr. § 14). Indichiamo questo lavoro con eW ove e è la carica della particella; il segno del *potenziale d'uscita* W così definito coincide con il segno della carica della particella estratta.

Il lavoro d'uscita dipende sia dalla natura del conduttore (e dal suo stato termodinamico: temperatura, densità) che dalla natura della particella carica. In un medesimo metallo, ad esempio, il lavoro di uscita è diverso a seconda che la carica rimossa dalla sua superficie sia un elettrone di conduzione o uno ione. È necessario sottolineare anche che il lavoro di uscita è una grandezza che caratterizza la superficie del conduttore. Perciò esso dipende, ad esempio, dal modo di lavorazione e dal grado di « impurezza » della superficie. Se il conduttore è un monocristallo il lavoro di uscita è diverso anche per le sue facce diverse.

Per precisare la natura fisica della dipendenza del lavoro di uscita dalle proprietà della superficie, stabiliamo il suo legame con la struttura elettrica dello strato superficiale della sostanza. Indicando con $\rho(x)$ la densità delle cariche, non media rispetto agli elementi di lunghezza fisicamente infinitesimi lungo l'asse x (perpendicolare al piano dello strato), scriviamo l'equazione di Poisson nello strato superficiale:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Supponiamo che al dominio del conduttore corrisponda $x < 0$. Integrando una prima volta otteniamo

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi \int_{-\infty}^{x} \rho\, dx$$

effettuando per parti l'integrazione successiva:

$$\varphi - \varphi_{-\infty} = -4\pi x \int_{-\infty}^{x} \rho\, dx + 4\pi \int_{-\infty}^{x} x\rho\, dx.$$

Per $x \to \infty$ l'integrale $\int_{-\infty}^{x} \rho\, dx$ tende molto rapidamente a zero (in quanto la superficie del conduttore non carico è elettricamente neutra). Perciò

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho\, dx.$$

L'integrale che figura nel secondo termine dell'uguaglianza rappresenta il momento di dipolo delle cariche distribuite in prossimità della superficie del corpo. Questa distribuzione è caratteristica di un *doppio strato* in cui le cariche di segno opposto sono distribuite in modo tale che il momento di dipolo del sistema è diverso da zero. La struttura del doppio strato dipende, ovviamente, dalle proprietà della superficie (dalla sua direzione cristallografica, dall'impurezza ecc.). La differenza di potenziale di uscita dalle diverse superficie di uno stesso conduttore è determinata dalla differenza tra i loro momenti di dipolo.

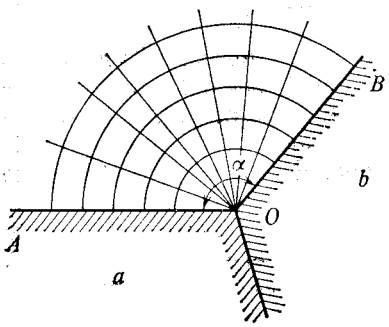


Fig. 16

Se due conduttori distinti si trovano a contatto fra essi, può avvenire uno scambio di particelle cariche. In questo caso le cariche passeranno dal corpo con lavoro di uscita minore a quello con lavoro di uscita maggiore finché tra i due conduttori non si sarà stabilita una differenza di potenziale che impedisca il passaggio di cariche, ossia la cosiddetta *differenza di potenziale di contatto*.

Nella fig. 16 è rappresentata la sezione trasversale di due conduttori a contatto (a e b) in prossimità delle loro superficie libere AO

e OB. Indichiamo i potenziali di queste superficie con φ_a e φ_b, rispettivamente; la differenza di potenziale di contatto è $\varphi_{ab} = \varphi_b - \varphi_a$. Il legame quantitativo tra questa differenza e i lavori di uscita si stabilisce dalla condizione di equilibrio termodinamico. Consideriamo il lavoro che dovrebbe essere compiuto su una particella di carica e per allontanarla dal conduttore a attraverso la superficie AO quindi portarla sulla superficie OB e, infine, introdurla all'interno del conduttore b; nello stato d'equilibrio termodinamico questo lavoro dovrebbe essere uguale a zero [1]). Il lavoro che si compie sulla particella in ciascuna delle tappe del cammino indicate sono uguali a eW_a, $e(\varphi_b - \varphi_a)$ e $-eW_b$, rispettivamente. Uguagliandone la somma a zero, otteniamo la relazione cercata

$$\varphi_{ab} = W_b - W_a. \tag{23,1}$$

Quindi, la differenza di potenziale di contatto tra le superficie libere vicine di due conduttori a contatto è uguale alla differenza dei loro potenziali di uscita.

L'esistenza della differenza di potenziale di contatto implica la comparsa di un campo elettrico nello spazio esterno ai conduttori. È facile determinare questo campo in prossimità del punto di contatto. In un piccolo dominio in prossimità della linea di contatto (il punto O della fig. 16) i lati intersecantisi dei conduttori si possono considerare come piani. Il potenziale del campo esterno ai conduttori verifica l'equazione

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

(r, θ sono le coordinate polari con O come origine), mentre sui lati AO e OB esso deve assumere valori dati costanti. In questo caso ci interessa trovare la soluzione contenente la potenza di r più piccola: essa rappresenterà il termine principale dello sviluppo del potenziale in potenze della distanza r sufficientemente piccola. Questa soluzione è $\varphi = \text{cost}\cdot\theta$. Calcolando l'angolo θ dal lato AO e ponendo il suo potenziale per convenzione nullo, otteniamo

$$\varphi = \frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\theta, \tag{23,2}$$

ove α è l'angolo AOB. Quindi, le linee equipotenziali (nel piano della figura) sono le semirette divergenti dal punto O. L'intensità del campo vale

$$E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\frac{1}{r}, \tag{23,3}$$

[1]) In realtà, ovviamente, il passaggio della particella da un conduttore all'altro può avvenire soltanto attraverso la superficie di contatto e non attraverso lo spazio circostante. Supponiamo, tuttavia, che il lavoro di questo passaggio sia indipendente dal percorso.

cioè decresce in modo inversamente proporzionale alla distanza dal punto O.

Come si è detto, le differenze di potenziale « di contatto » esistono anche tra diverse facce di un monocristallo metallico. Perciò il campo elettrico del tipo suindicato deve esistere anche in prossimità degli spigoli del cristallo [1]).

Se esiste un sistema di conduttori metallici collegati in serie (che si trovano a temperatura uguale), la differenza di potenziale tra i conduttori estremi è uguale (come è facile concludere sulla base della formula (23,1)) semplicemente alla differenza dei loro potenziali di uscita, come nel caso di due conduttori a contatto diretto. In particolare, se i due estremi del circuito sono del medesimo metallo, la differenza di potenziale tra questi estremi è nulla. Questa circostanza, d'altra parte, è già evidente a priori: se tra conduttori uguali esistesse una differenza di potenziale, chiudendo il circuito comparirebbe una corrente, il che contraddice il secondo principio della termodinamica.

§ 24. *Elemento galvanico*

L'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente non è valida se il circuito contiene conduttori nei qualii portatori di corrente sono di diversa natura (metalli e soluzioni elettrolitiche). Poiché il lavoro di uscita di un medesimo conduttore è diverso rispetto a differenti particelle cariche (elettroni e ioni), la somma di tutte le differenze di potenziale di contatto nel circuito in questione è diversa da zero anche se i conduttori alle estremità sono uguali. Questa somma si chiama *forza elettromotrice* del circuito; essa non rappresenta altro che la differenza di potenziale tra due conduttori uguali che si trovano agli estremi di un circuito aperto. Chiudendo questo circuito vi compare una corrente; su ciò è basato il funzionamento degli *elementi galvanici*. In questo caso sono le trasformazioni chimiche, che si verificano nell'elemento galvanico, la sorgente di energia che mantiene il passaggio di corrente nel circuito.

Descrivendo qualsiasi contorno chiuso all'interno di un circuito chiuso si deve ritrovare il valore iniziale, del potenziale del campo, vale a dire che la sua variazione totale è uguale a zero. Consideriamo, per esempio, un contorno passante sulla superficie dei conduttori. Nel passare da un conduttore all'altro il potenziale fa dei salti φ_{ab}. La caduta di potenziale lungo ciascuno dei conduttori in presenza della corrente J (corrente totale attraverso la sezione) vale

[1]) In condizioni reali tutti questi campi, di solito, sono compensati dal campo di ioni che dall'atmosfera « si appiccicano » alla superficie.

RJ, ove R è la resistenza del conduttore. Perciò la variazione totale del potenziale lungo il circuito vale

$$\sum \varphi_{ab} - \sum JR.$$

Uguagliando a zero questa espressione e osservando che la corrente J è continua lungo tutto il circuito, mentre la somma $\sum \varphi_{ab}$ è la forza elettromotrice $\mathscr{E}$, troviamo che

$$J \sum R = \mathscr{E}, \tag{24,1}$$

in modo che la corrente generata in un circuito da un elemento galvanico è uguale alla forza elettromotrice divisa per la resistenza totale di tutti i conduttori del circuito (compresa, si intende, anche la resistenza interna dell'elemento stesso).

Sebbene la forza elettromotrice dell'elemento galvanico possa essere espressa come somma delle differenze di potenziale di contatto, è importante sottolineare qui che in realtà è una grandezza termodinamica definita esclusivamente dagli stati di volume dei conduttori e assolutamente indipendente dalle proprietà delle loro superficie di separazione. Ciò è già chiaro dal fatto che $\mathscr{E}$ non rappresenta altro che il lavoro (per carica unitaria) che bisogna compiere su una particella carica per farla percorrere in senso inverso tutto il circuito chiuso.

Per evidenziare questa circostanza consideriamo un elemento galvanico composto da due elettrodi metallici (metalli A e B) immersi in una soluzione di elettroliti AX e BX (X^- è un qualunque anione). Siano ζ_A e ζ_B i potenziali chimici dei metalli A, B e ζ_{AX} e ζ_{BX} i potenziali chimici degli elettroliti nella soluzione [1]). Il passaggio di una carica elementare e lungo un circuito chiuso significa il passaggio dello ione A^+ dall'elettrodo A alla soluzione, e il passaggio dello ione B^+ dalla soluzione all'elettrodo, mentre il cambiamento delle cariche degli elettrodi è compensato dal passaggio di un elettrone dall'elettrodo A all'elettrodo B lungo la parte esterna del circuito. Il risultato di questi processi è che l'elettrodo A perde un atomo e l'elettrodo B ne acquista uno e nella soluzione elettrolitica una molecola BX viene sostituita da AX. Poiché il lavoro compiuto nel processo reversibile (a temperatura e pressione costanti) è uguale alla variazione del potenziale termodinamico del sistema, troviamo la relazione

$$e\mathscr{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}) \tag{24,2}$$

che esprime la forza elettromotrice dell'elemento in funzione delle proprietà di volume degli elettrodi e della soluzione elettrolitica.

[1]) Si tratta qui della definizione ordinaria del potenziale chimico per una particella.

La forma della relazione (24,2) consente di trarre la seguente conclusione. Se nella soluzione si trovano tre elettroliti (AX, BX, CX) e se in esso sono immersi tre elettrodi metallici A, B, C le forze elettromotrici tra ciascuna coppia di essi sono legate dalla relazione

$$\mathscr{E}_{AB}+\mathscr{E}_{BC}=\mathscr{E}_{AC}. \tag{24,3}$$

Le relazioni termodinamiche generali permettono di stabilire un legame tra la forza elettromotrice dell'elemento galvanico e l'effetto termico che accompagna il passaggio di corrente attraverso il circuito, processo che in condizioni reali è, ovviamente, irreversibile. Sia Q la quantità di calore emanato (sia nell'elemento stesso che nella parte esterna del circuito) al passaggio di una carica unitaria; questa grandezza non è altro che il calore termochimico della reazione che si verifica all'interno dell'elemento galvanico al passaggio della corrente. Secondo una nota formula termodinamica (cfr. V § 91), esso è legato al lavoro $\mathscr{E}$ dalla seguente relazione:

$$Q=-T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{E}}{T}\right). \tag{24,4}$$

La definizione della derivata parziale rispetto alla temperatura che figura in questa espressione dipende dalle condizioni in cui si svolge il processo; così, se il passaggio di corrente ha luogo a pressione costante (come avviene di solito), allora la derivazione va fatta a pressione costante.

§ 25. *Elettrocapillarità*

Le cariche sulla frontiera tra due mezzi conduttori influiscono sulla tensione superficiale della frontiera stessa. Questo fenomeno si chiama *elettrocapillarità*. Infatti, si tratta di due mezzi liquidi, solitamente della frontiera tra un metallo liquido (mercurio) e la soluzione elettrolitica.

Indichiamo con φ_1 e φ_2 i potenziali dei due conduttori e con e_1, e_2 le cariche site in prossimità della loro superficie di contatto. Queste ultime sono di valore assoluto uguale e di segno opposto e formano così lungo questa superficie un *doppio strato*.

Il differenziale del potenziale $\tilde{\Phi}$ di un sistema di due conduttori, tenendo conto della loro superficie di separazione, a pressione e temperatura date, è

$$d\tilde{\Phi}=\alpha\, dS-e_1\, d\varphi_1-e_2\, d\varphi_2. \tag{25,1}$$

Il termine $\alpha\, dS$ rappresenta il lavoro della variazione reversibile dell'area S della superficie di separazione (α è il coefficiente della tensione superficiale; cfr. V § 154).

Al posto del potenziale termodinamico $\tilde{\mathfrak{P}}$ nella formula (25,1) si può scrivere solamente la sua parte superficiale $\tilde{\mathfrak{P}}_s$ poiché quella volumetrica, a pressione e temperatura date, resta costante e quindi non presenta qui alcun interesse. Ponendo $e_1 = -e_2 \equiv e$ e introducendo la differenza di potenziale $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ riscriviamo la (25,1) nella forma

$$d\tilde{\mathfrak{P}}_s = \alpha\, dS - e\, d\varphi. \tag{25,2}$$

Di qui risulta che

$$\left(\frac{\partial \tilde{\mathfrak{P}}_s}{\partial S}\right)_\varphi = \alpha, \tag{25,3}$$

ove il coefficiente α è espresso in funzione di φ. Integrando questa relazione troviamo che $\tilde{\mathfrak{P}}_s = \alpha S$. Sostituendo il risultato di nuovo nella (25,2) otteniamo $d(\alpha S) = \alpha\, dS - e\, d\varphi$, ossia $S\, d\alpha = -e\, d\varphi$, e di qui

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)_{P,\,T}, \tag{25,4}$$

ove $\sigma = e/S$ è la carica riferita a 1 cm^2 di superficie. Il rapporto (25,4), dedotto da *G. Lippmann* e *J. W. Gibbs*, è la formula fondamentale della teoria dei fenomeni elettrocapillari.

Nello stato di equilibrio termodinamico il potenziale $\mathfrak{P}$ deve essere minimo per valori assegnati dei potenziali elettrici dei conduttori. Considerandolo come funzione delle cariche superficiali e, scriviamo le condizioni necessarie del minimo:

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{P}}_s}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{P}}_s}{\partial e^2} > 0, \tag{25,5}$$

ove si è supposto che le derivate siano calcolate ad area S costante. Per calcolare le derivate esprimiamo $\tilde{\mathfrak{P}}_s$ in funzione del potenziale termodinamico $\mathfrak{P}_s = \mathfrak{P}_s(e)$ mediante

$$\tilde{\mathfrak{P}}_s = \mathfrak{P}_s(e) - e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2 = \mathfrak{P}_s(e) - e\varphi. \tag{25,6}$$

La condizione di nullità della derivata prima dà

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{P}}_s}{\partial e} = \frac{\partial \mathfrak{P}_s}{\partial e} - \varphi = 0$$

la condizione di positività della derivata seconda assume la forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{P}}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{P}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial e} = \frac{1}{S}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} > 0,$$

ossia

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} > 0. \tag{25,7}$$

È naturale aspettarsi questa condizione se si considera il doppio strato della superficie come un « condensatore » di capacità $\partial e/\partial\varphi$.

Derivando l'uguaglianza (25,4) rispetto a φ e usando l'espressione (25,7) troviamo che

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} < 0. \tag{25,8}$$

Ciò vuol dire che nel punto di cui $\partial\alpha/\partial\varphi = -\sigma = 0$ la curva della dipendenza di α da φ ha il massimo.

§ 26. *Fenomeni termoelettrici*

La condizione dell'assenza della corrente in un metallo corrisponde all'equilibrio termodinamico rispetto agli elettroni di conducibilità. Essa richiede, come è noto, che con la temperatura sia (lungo il corpo) costante anche la somma $e\varphi + \zeta_0$, ove ζ_0 è il potenziale chimico degli elettroni di conducibilità nel metallo (per $\varphi = 0$) [1]). Se si ha a che fare con un metallo di composizione non omogenea, allora ζ_0 in esso varia anche a temperatura costante. Perciò la costanza del potenziale elettrico φ in questo caso non conduce affatto all'assenza della corrente nel metallo sebbene l'intensità $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ sia nulla. Questa circostanza rende inconveniente la definizione ordinaria di φ (come valore medio del potenziale reale) se si vogliono considerare anche conduttori non omogenei.

È naturale accettare come nuova definizione di potenziale la somma $\varphi + \zeta_0/e$ che indicheremo in seguito semplicemente con φ [2]). In un metallo omogeneo questa definizione si riduce all'aggiunta al potenziale di una costante inessenziale. Così l'« intensità » $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ (che useremo) coincide con l'intensità media vera e propria soltanto in un metallo omogeneo e nel caso generale ne differisce per il gradiente di una certa funzione di stato [3]).

Con questa definizione la corrente si annulla con l'intensità all'equilibrio termodinamico (rispetto agli elettroni di conduzione) e il legame tra $\mathbf{j}$ e $\mathbf{E}$ sarà dato dalla formula $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ (o $j_i = \sigma_{ik}E_k$) anche in un metallo di composizione non omogenea.

Consideriamo ora un metallo riscaldato non uniformemente all'interno del quale comunque non esiste equilibrio termodinamico (elet-

---

[1]) Cfr. V § 25; intendiamo qui con ζ il potenziale chimico riferito di solito a una particella (elettrone).

[2]) Si può formulare questa definizione altrimenti, e cioè: il nuovo valore $e\varphi$ è la variazione dell'energia libera per introduzione (isotermica) nel metallo di un elettrone; in altre parole, $\varphi = \partial F/\partial\rho$, ove F è l'energia libera del metallo e ρ la carica degli elettroni di conducibilità riferiti al volume unitario.

[3]) Sottolineiamo che in questo caso il prodotto $e\mathbf{E}$ non rappresenta più la forza agente sulla carica e. Questa circostanza può rendere inconveniente questa definizione di $\mathbf{E}$ (opportuna nella teoria fenomenologica) nella teoria microscopica per il calcolo dei coefficienti cinetici (cfr. X § 44).

tronico). Allora l'intensità $\mathbf{E}$ è non nulla anche in assenza di corrente. Nel caso generale allorché sono non nulli sia la densità di corrente $\mathbf{j}$ che il gradiente della temperatura ∇T, il legame tra queste grandezze e l'intensità del campo può essere scritto nella forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} - \alpha\nabla T. \tag{26,1}$$

Qui σ è la conducibilità ordinaria e α un'altra grandezza che caratterizza le proprietà elettriche del metallo. Per semplicità, supponiamo qui che la sostanza sia isotropa (o goda di simmetria cubica) e, ciò premesso, scriviamo i coefficienti di linearità sotto forma di grandezze scalari. La dipendenza lineare di $\mathbf{E}$ da ∇T rappresenta, ovviamente, solo il primo termine dello sviluppo che è sufficiente a causa della piccolezza del gradiente della temperatura (circostanza che sempre si verifica).

La stessa espressione (26,1) scritta nella forma

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha\nabla T), \tag{26,2}$$

mostra che in un metallo riscaldato non uniformemente può passare corrente anche se l'intensità $\mathbf{E}$ è nulla.

Accanto alla densità di corrente elettrica $\mathbf{j}$ consideriamo anche la densità del flusso di energia che indichiamo con $\mathbf{q}$. Prima di tutto si deve separare da questo flusso una grandezza $\varphi\mathbf{j}$ dovuta semplicemente al fatto che ogni particella carica (elettrone) trasporta un energia $e\varphi$. La differenza $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$, però, non dipende più dal potenziale stesso e può essere rappresentata nel caso generale sotto forma di una funzione lineare dei gradienti $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$ e ∇T analogamente alla formula (26,2) per la densità di corrente. Scriviamo per il momento questa formula nella forma

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma\nabla T.$$

Il principio di simmetria dei coefficienti cinetici consente di legare il coefficiente β con il coefficiente α che figura nell'espressione (26,2).

A tale scopo calcoliamo la velocità di variazione dell'entropia totale del conduttore. La quantità di calore emanata per unità di tempo e di volume è $-\operatorname{div}\mathbf{q}$. Perciò si può scrivere

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = -\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T}\,dV.$$

In seguito, usando l'equazione $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, scriviamo

$$\frac{1}{T}\operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{1}{T}\{\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) + \operatorname{div}\varphi\mathbf{j}\} = \frac{1}{T}\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}.$$

Eseguendo l'integrale del primo termine per parti otteniamo

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}\,dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j})\,\nabla T}{T^2}\,dV. \tag{26,3}$$

Questa formula mostra che, indicando con le grandezze $\partial x_a/\partial t$ (cfr. § 21) le componenti dei vettori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$, allora le corrispondenti grandezze X_a saranno rappresentate dalle componenti dei vettori $-\mathbf{E}/T$ e $\nabla T/T^2$. Conformemente a ciò nelle relazioni

$$\mathbf{j} = \sigma T \frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma\alpha T^2 \frac{\nabla T}{T^2},$$

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta T \frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2 \frac{\Delta T}{T^2}$$

i coefficienti $\sigma\alpha T^2$ e βT devono essere uguali.

In tal modo, $\beta = \sigma\alpha T$ e abbiamo così

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \sigma\alpha T\mathbf{E} - \gamma\nabla T.$$

Infine, esprimendo qui $\mathbf{E}$ in funzione di $\mathbf{j}$ e ∇T secondo la formula (26,1), otteniamo la seguente espressione:

$$\mathbf{q} = (\varphi + \alpha T)\,\mathbf{j} - \varkappa\nabla T, \tag{26,4}$$

ove abbiamo introdotto la notazione $\varkappa = \gamma - T\alpha^2\sigma$. La grandezza $\varkappa$ non rappresenta altro che il coefficiente di conducibilità termica che determina il flusso di calore in assenza di corrente elettrica.

Occorre sottolineare che la condizione di positività della derivata $d\mathcal{S}/dt$ non implica nuove restrizioni sui coefficienti termoelettrici. Sostituendo le (26,1) e (26,4) nella formula (26,3) si ottiene

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma T} + \frac{\varkappa\,(\nabla T)^2}{T^2} \right) dV > 0 \tag{26,5}$$

dalla quale derivano soltanto le condizioni di positività per i coefficienti di conducibilità elettrica e termica.

Nelle formule suindicate si è supposto tacitamente che la non omogeneità della pressione (o della densità) a temperatura costante non possa implicare la comparsa di un campo (o di una corrente) nel conduttore; ciò premesso, nelle formule (26,2) e (26,4) non abbiamo scritto termini proporzionali a ∇p. In realtà la presenza di tali termini contraddirebbe la legge della crescita dell'entropia: nell'espressione integranda della (26,5) comparirebbero termini con i prodotti $\mathbf{j}\nabla p$ e $\nabla T\nabla p$ a segno alternato e, quindi, l'integrale non potrebbe essere sostanzialmente positivo.

Le relazioni (26,1) e (26,4) contengono effetti termoelettrici distinti. Consideriamo il calore $-\operatorname{div}\mathbf{q}$ emanato per secondo e per unità di volume del conduttore. Derivando l'espressione (26,4) troviamo

$$Q = -\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}(\varkappa\,\nabla T) + \mathbf{E}\mathbf{j} - \mathbf{j}\,\nabla(\alpha T),$$

ossia, sostituendovi l'espressione (26,1),

$$Q = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T) + \frac{j^2}{\sigma} - T\mathbf{j}\nabla\alpha. \tag{26,6}$$

Il primo termine in questa somma è legato alla conducibilità termica vera e propria, mentre il secondo termine, proporzionale al quadrato della corrente, si può chiamare calore di Joule. È il terzo termine a presentare interesse in quanto contiene in sé effetti termoelettrici specifici.

Supponiamo che il conduttore sia di composizione omogenea. Allora la variazione della grandezza α è legata al solo gradiente della temperatura e si può scrivere $\nabla\alpha = (d\alpha/dT)\,\nabla T$; se, come sempre si verifica, la pressione lungo il corpo è costante, con $d\alpha/dT$ si deve intendere la derivata $(\partial\alpha/\partial T)_p$. In tal modo, l'emanazione di calore in questione (*effetto Thomson*) vale

$$\rho \mathbf{j} \nabla T, \quad \text{dove} \quad \rho = -T\frac{d\alpha}{dT}. \tag{26,7}$$

La grandezza ρ si dice *coefficiente di Thomson*. È da notare che questo effetto è proporzionale alla prima potenza della corrente e non al suo quadrato come il calore di Joule. Perciò esso cambia di segno col cambiamento della direzione della corrente. Il coefficiente ρ può essere sia positivo che negativo. Se $\rho > 0$ il calore di Thomson è positivo (calore che viene emanato) quando la corrente scorre in direzione di temperature crescenti; quando la corrente scorre in direzione opposta il calore viene assorbito; per $\rho < 0$ le relazioni sono inverse.

Un altro effetto termico (*effetto Peltier*) compare quando la corrente passa per il contatto (giuntura) tra due metalli distinti. Sulla superficie di contatto sono continui il potenziale, la temperatura e anche le componenti normali dei vettori densità di corrente e densità del flusso d'energia. Indicando con gli indici 1 e 2 i valori delle grandezze riferite ai due metalli ed uguagliando i valori delle componenti normali di $\mathbf{q}$ nella (26,4) da ambedue i lati del contatto, otteniamo, tenendo conto della continuità di φ, T, j_x:

$$\left(-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_1^2 = -j_x T\,(\alpha_2 - \alpha_1);$$

l'asse x è diretto lungo la normale alla superficie. Se la direzione positiva dell'asse x va dal metallo *1* al metallo *2*, allora l'espressione del primo termine dell'ultima uguaglianza è la quantità di calore perso per secondo da 1 cm^2 della superficie di contatto per conduzione termica. Questa perdita è compensata dall'emanazione di calore per contatto e rappresentata dall'espressione del secondo termine della stessa uguaglianza. Quindi, per unità di superficie di contatto viene emanata (in un secondo) una quantità di calore uguale a

$$\Pi_{12} j, \quad \text{dove } \Pi_{12} = -T(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{26,8}$$

La grandezza Π_{12} si chiama *coefficiente di Peltier*. Come l'effetto Thomson, questo effetto è proporzionale alla prima potenza della corrente e cambia di segno quando la corrente inverte la sua direzio-

ne in quella inversa. Notiamo che l'effetto Peltier gode della proprietà additiva espressa dall'uguaglianza $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$ ove gli indici 1, 2, 3 si riferiscono a tre metalli distinti.

Dal confronto delle formule (26,7) e (26,8) si vede che i coefficienti di Thomson e di Peltier sono legati dalla relazione

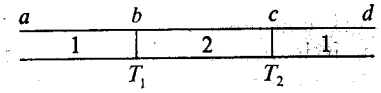


Fig. 17

$$\rho_2 - \rho_1 = T \frac{d}{dT} \frac{\Pi_{12}}{T}. \qquad (26,9)$$

In seguito, consideriamo un circuito aperto a due contatti in cui i due conduttori agli estremi sono dello stesso metallo (metallo *1*, fig. 17). Supponiamo che due giunture (punti *b* e *c*) si trovino a temperature diverse T_1 e T_2, mentre la temperatura dei due estremi del circuito (punti *a* e *d*) sia uguale. Allora tra questi estremi esiste una differenza di potenziale, detta *forza termoelettromotrice*; indichiamola con $\mathscr{E}_T$. Per calcolare questa forza poniamo $\mathbf{j} = 0$ nella (26,1) e integriamo l'intensità $\mathbf{E} = \alpha \nabla T$ lungo tutto il circuito (as e x):

$$\mathscr{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx} dx = \int_a^d \alpha \, dT.$$

L'integrazione da *c* a *d* e da *a* a *b* significa integrare rispetto alla temperatura da T_2 a T_1 nel primo metallo, mentre l'integrazione da *b* a *c* significa integrare rispetto a dT tra T_1 a T_2 nel secondo metallo. Perciò troviamo

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1) \, dT. \qquad (26,10)$$

Confrontando con la (26,8) vediamo che la forza termoelettromotrice è legata al coefficiente di Peltier dalla seguente relazione:

$$\mathscr{E}_T = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT. \qquad (26,11)$$

Le formule (26,9) e (26,11) si chiamano *relazioni di W. Thomson* (1854).

Per concludere scriviamo le formule per la corrente e il flusso di calore in un conduttore anisotropo. Queste formule si deducono mediante il principio di simmetria dei coefficienti cinetici analogamente alla deduzione delle formule (26,1) e (26,4) e sono:

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= T \alpha_{ki} j_k - \varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \end{aligned} \qquad (26,12)$$

Qui σ_{ik}^{-1} è l'inverso del tensore di conducibilità σ_{ik}; i tensori σ_{ik} e $\varkappa_{ik}$ sono simmetrici. Quanto al tensore termoelettrico α_{ik}, nel caso generale esso è asimmetrico.

§ 27. *Fenomeni termogalvanomagnetici*

Sono ancora più disparati i fenomeni che si verificano quando una corrente scorre in presenza contemporaneamente di un campo elettrico, uno magnetico e un gradiente di temperatura.

Lo studio di tali fenomeni è simile a quello dei fenomeni termoelettrici trattati nel paragrafo precedente. Cominciamo lo studio da una forma tensoriale ugualmente applicabile ai conduttori anisotropi. Scriviamo la densità di corrente elettrica **j** e il flusso di calore **q** nella forma

$$\begin{aligned} j_i &= a_{ik}\frac{E_k}{T} + b_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{T}, \\ q_i - \varphi j_i &= c_{ik}\frac{E_k}{T} + d_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{T}, \end{aligned} \tag{27,1}$$

ove tutti i coefficienti sono funzioni del campo magnetico. In accordo con il principio di simmetria dei coefficienti cinetici abbiamo

$$a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}),\ d_{ik}(\mathbf{H}) = d_{ki}(-\mathbf{H}),\ b_{ik}(\mathbf{H}) = c_{ki}(-\mathbf{H}) \tag{27,2}$$

Esprimendo **E** e **q** — φ**j** nella (27,1) in funzione di **j** e ∇T, otteniamo

$$\begin{aligned} E_i &= \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}, \\ q_i - \varphi j_i &= \beta_{ik} j_k - \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_k}, \end{aligned} \tag{27,3}$$

ove i tensori σ^{-1}, α, β, $\varkappa$ si esprimono in modo definito mediante i tensori a, b, c, d e godono in virtù delle relazioni (27,2) delle proprietà di simmetria seguenti:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{-1}(\mathbf{H}) &= \sigma_{ki}^{-1}(-\mathbf{H}),\ \varkappa_{ik}(\mathbf{H}) = \varkappa_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \beta_{ki}(\mathbf{H}) &= T\alpha_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned} \tag{27,4}$$

Queste sono le relazioni cercate nella forma più generale. Esse generalizzano i legami stabiliti nel § 26 in assenza di campo magnetico e nel § 22 in assenza di un gradiente di temperatura. Sottolineiamo che i tensori α_{ik} e β_{ik} in un conduttore anisotropo, in generale, sono asimmetrici anche in assenza di campo magnetico.

I tensori σ^{-1}, $\varkappa$, $\alpha + T\beta$ si possono sviluppare in una parte simmetrica e asimmetrica, come è stato fatto nel § 22. In un campo magnetico debole le parti simmetriche si possono considerare come gran-

dezze costanti indipendenti da **H**, mentre le parti asimmetriche sono lineari rispetto a **H**. Per un conduttore isotropo otteniamo, con la stessa approssimazione, le seguenti espressioni:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} + \alpha \nabla T + R\,[\mathbf{Hj}] + N\,[\mathbf{H}\nabla T], \tag{27,5}$$

$$\mathbf{q} - \varphi \mathbf{j} = \alpha T \mathbf{j} - \varkappa\, \nabla T + NT\,[\mathbf{Hj}] + L\,[\mathbf{H}\,\nabla T]. \tag{27,6}$$

Qui σ, $\varkappa$ sono i coefficienti ordinari di conducibilità elettrica e termica, α il coefficiente termoelettrico che compare nell'espressione (26,1), R il coefficiente di Hall e N, L sono coefficienti nuovi. Il termine $N\,[\mathbf{H}\nabla T]$ si può considerare come l'effetto esercitato dal campo magnetico sulla forza termoelettromotrice (*effetto Nernst*) e il termine $L\,[\mathbf{H}\,\nabla T]$ come l'effetto del campo magnetico sulla conducibilità termica (*effetto Leduc-Righi*).

Sulla frontiera di due mezzi le componenti dei vettori **j** e **q** sono continue e, quindi, lo sono anche quelle del vettore

$$-\varkappa\, \nabla T + \alpha T \mathbf{j} + NT\,[\mathbf{Hj}] + L\,[\mathbf{H}\,\nabla T].$$

Il termine $NT\,[\mathbf{Hj}]$ descrive l'influenza del campo magnetico sull'effetto Peltier (*effetto Ettingshausen*).

La quantità di calore emanata per secondo per unità di volume del conduttore è $Q = -\operatorname{div} \mathbf{q}$. Qui si deve sostituire **q** dalla formula (27,6) e quindi al posto di $-\nabla\varphi = \mathbf{E}$ scrivere l'espressione data dalla (27,5). Se il conduttore è omogeneo, le grandezze α, N, L, . . . sono funzioni della sola temperatura così che i loro gradienti sono proporzionali a ∇T. Nel calcolo trascuriamo tutti i termini del secondo ordine rispetto a **H** e, in questo caso, possiamo supporre che $\operatorname{rot}(\mathbf{j}/\sigma) \approx \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ [1]). Infine, come sempre nel caso della corrente continua $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$. Tenendone conto otteniamo dopo calcoli appropriati

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div}(\varkappa \nabla T) - T\mathbf{j}\nabla\alpha + \frac{1}{\sigma T}\frac{d}{dT}(\sigma N T^2)\,[\mathbf{jH}]\,\nabla T.$$

Il terzo termine in questa espressione descrive l'effetto Thomson (26,7) e l'ultimo termine dà la variazione di questo effetto dovuta alla presenza del campo magnetico.

§ 28. *Fenomeni di diffusione elettrica*

La diffusione implica nelle soluzioni elettrolitiche la comparsa di fenomeni specifici che non si osservano nei conduttori solidi.

Per semplicità, supponiamo che la temperatura sia costante in tutta la soluzione. Ci limitiamo così a considerare fenomeni di diffusione elettrica veri e propri non complicati da effetti termoelettrici.

[1]) Trascuriamo così un effetto debole, ossia l'influsso esercitato dal campo magnetico proprio delle correnti in esame, sull'emanazione di calore.

Al posto della pressione P e della concentrazione c della soluzione è più comodo usare come variabili indipendenti la pressione e il potenziale chimico ζ. Quest'ultimo è qui definito come la derivata del potenziale termodinamico per unità di massa della soluzione rispetto alla sua concentrazione c (a P e T costanti); in questo caso per concentrazione intendiamo il rapporto tra la massa di elettrolito e la massa totale di liquido nell'elemento di volume considerato [1]. Ricordiamo che la costanza del potenziale chimico (con la costanza della pressione e della temperatura) è una delle condizioni per l'equilibrio termodinamico.

La definizione di potenziale del campo elettrico data nel § 26 deve essere lievemente modificata nel caso considerato poiché i portatori di corrente non sono ora elettroni di conducibilità, bensì ioni dell'elettrolito in soluzione. Una definizione razionale (cfr. la nota a pag. 150) è data dalla formula $\varphi = (\partial\Phi/\partial\rho)_c$, ove Φ è il potenziale termodinamico e ρ la somma delle cariche ioniche per unità di volume della soluzione (dopo la derivazione si deve porre, ovviamente, $\rho = 0$ in quanto la soluzione è elettricamente neutra). La derivata si calcola a concentrazione di massa costante, cioè a una data somma delle masse degli ioni di ambedue i segni per unità di volume [2].

Se esiste un gradiente di potenziale chimico nell'espressione per la densità di corrente compare un termine addizionale proporzionale ad esso:

$$\mathbf{j} = \sigma\,(\mathbf{E} - \beta\,\nabla\zeta), \tag{28,1}$$

e che è analogo al termine addizionale nella formula (26,2). Vedremo più avanti che per un determinato gradiente del potenziale chimico (e della temperatura) $\mathbf{j}$ non può dipendere dal gradiente della pres-

---

[1]) Potenziali chimici ordinari sono definiti così: $\zeta_1 = \partial\Phi/\partial n_1$ e $\zeta_2 = \partial\Phi/\partial n_2$, ove Φ è il potenziale termodinamico di una quantità qualsiasi di soluzione, n_1 e n_2 sono numeri di particelle della sostanza solubile e del solvente in essa. Se ora Φ è riferito a 1 g di soluzione, allora n_1 e n_2 sono legati dalla relazione $n_1m_1 + n_2m_2 = 1$ (m_1, m_2 sono le masse di particelle di due specie) e la concentrazione $c = n_1m_1$. Perciò il potenziale chimico qui introdotto è

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial c} = \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2}.$$

[2]) In un elettrolito forte la sostanza solubile è completamente disassociata in modo che la concentrazione di massa può essere rappresentata nella forma $c = m_+n_+ + m_-n_-$, ove m_+, m_- sono le masse dei cationi e degli anioni e n_+, n_- le densità di loro numero. Con la definizione suindicata di potenziale l'uguaglianza $\varphi = 0$ corrisponde al rapporto $\zeta_+/m_+ = \zeta_-/m_-$ tra i potenziali chimici dei cationi e degli anioni; i potenziali ζ_+ e ζ_- sono legati dall'uguaglianza $\zeta_+ + \zeta_- = \zeta_1$.

sione, ragione per cui il termine contenente ∇P non figura nell'espressione (28,1) [1]).

Accanto alla corrente elettrica è necessario considerare anche e contemporaneamente il fenomeno di trasporto della massa elettrolitica. Si deve quindi tener conto che il passaggio di corrente attraverso una soluzione può essere accompagnato da moto macroscopico del liquido. La densità del flusso di massa elettrolitica trasportata da questo moto è pari a $\rho c\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}$ è la velocità e ρ la densità della soluzione). Inoltre, la massa elettrolitica viene trasportata per diffusione molecolare. Indichiamo con $\mathbf{i}$ la densità del flusso di diffusione in modo che la densità totale del flusso è $\rho c\mathbf{v} + \mathbf{i}$. I processi di diffusione irreversibili conducono anch'essi ad un aumento dell'entropia; la velocità di variazione dell'entropia totale è data dalla formula [2])

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}\, dV - \int \frac{\mathbf{i}\nabla\zeta}{T}\, dV. \tag{28,2}$$

Al pari della densità di corrente elettrica, il flusso di diffusione può essere scritto sotto forma di una combinazione lineare di $\mathbf{E}$ e $\nabla\zeta$ o, che è lo stesso, di $\mathbf{j}$ e $\nabla\zeta$. Grazie alla simmetria dei coefficienti cinetici uno dei coefficienti in questa espressione può essere legato al coefficiente β che figura nella formula (28,1) in modo analogo a quello usato nel § 26 per $\mathbf{j}$ e $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$. Come risultato otteniamo

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{\left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{P,\,T}} \nabla\zeta + \beta\mathbf{j} \tag{28,3}$$

Il coefficiente di $\nabla\zeta$ è espresso in funzione del coefficiente di diffusione ordinario (qui ρ è la densità della sostanza). Per $\mathbf{j} = 0$ e pressione (e temperatura) costante abbiamo un flusso di diffusione $\mathbf{i} = -\rho D\, \nabla c$.

L'impossibilità dell'esistenza nelle espressioni (28,1) e (28,3) di termini proporzionali al gradiente della pressione è dovuta di nuovo (come nel § 26) alla legge di crescita dell'entropia: questi termini renderebbero la derivata dell'entropia totale (28,2) una grandezza non essenzialmente positiva.

Le formule (28,1) e (28,3) contengono in sé tutti i fenomeni di diffusione elettrica; non ci soffermiamo a studiarle in modo più particolareggiato.

---

[1]) Sottolineiamo, tuttavia, che per dato gradiente della concentrazione, $\mathbf{j}$ dipende dal gradiente della pressione:

$$\nabla\zeta = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial c}\right)_{P,\,T} \nabla c + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial P}\right)_{c,\,T} \nabla P.$$

[2]) Per deduzione del secondo termine in questa formula si veda VI § 57.

Problema

Due lamine a facce parallele (di metallo uguale A) sono immerse in una soluzione elettrolitica AX. Trovare la dipendenza della densità di corrente dalla differenza di potenziale applicata alle lamine.

Soluzione. Al passaggio della corrente il metallo di un elettrodo si solve e si deposita sull'altro. In questo caso il solvente (acqua) è a riposo e attraverso la soluzione passa un flusso di metallo con densità $\rho v = jm/e$ (j è la densità di corrente elettrica, m e e sono la massa e la carica ionica A^+) [1]. D'altra parte, questo flusso è dato dall'espressione $i + \rho vc$ con i preso dalla formula (28,3); supponendo costante la pressione nel liquido [2]) otteniamo l'equazione

$$\rho D \frac{dc}{dx} = \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right] j \tag{1}$$

(x è la coordinata nella direzione tra gli elettrodi). Poiché j = costante nella soluzione, di qui abbiamo

$$jl = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D\, dc}{\beta - \frac{m}{l}(1-c)}, \tag{2}$$

dove c_1, c_2 sono le concentrazioni in prossimità delle superficie delle lamine e l la distanza tra di esse.

È più semplice determinare la differenza di potenziale $\mathscr{E}$ tra le lamine a partire dalla dissipazione totale dell'energia Q (per secondo) che deve essere ugale a $j\mathscr{E}$ (riferita a 1 cm^2 di superficie delle lamine). In accordo con le formule (28,1) e (28,2) abbiamo

$$Q = T\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \left\{\frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c}\left(\frac{dc}{dx}\right)^2\right\} dx = j\mathscr{E}$$

e, usando l'espressione (1), otteniamo

$$\mathscr{E} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D\, dc}{\sigma\left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right]} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c}\left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right] dc. \tag{3}$$

Le formule (2) e (3) danno soluzione (in forma implicita) del problema posto.

Se la corrente j è piccola, la differenza di concentrazioni $c_2 - c_1$ è anch'essa piccola. Sostituendo gli integrali con i prodotti delle espressioni integrande per $c_2 - c_1$, otteniamo la seguente espressione per la resistenza specifica efficace della soluzione:

$$\frac{\mathscr{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D}\frac{\partial \zeta}{\partial c}\left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right]^2.$$

---

[1]) Ricordiamo che la definizione di velocità idrodinamica v nella soluzione è tale che ρv è l'impulso per unità di volume del liquido (cfr. VI § 57). Perciò il fatto che nel caso considerato si muova (rispetto agli elettrodi) soltanto il metallo solubile è inessenziale per il calcolo di ρv.

[2]) Se tenessimo conto della variazione di pressione causata dal moto del liquido otterremmo grandezze infinitesime di ordine superiore.

Il primo termine nell'espressione (3) dà la caduta di potenziale $\left(\int j\frac{dx}{\sigma}\right)$ dovuta al passaggio di corrente. Il secondo termine, invece, è la forza elettromotrice dovuta alla differenza di concentrazioni nella soluzione (in certo senso analoga alla forza termoelettromotrice). Quest'ultima espressione non è legata alle condizioni del problema unidimensionale concreto in questione e rappresenta un'espressione generale per la forza elettromotrice di un « elemento di concentrazione ».

Capitolo IV

CAMPO MAGNETICO COSTANTE

§ 29. *Campo magnetico costante*

Il campo magnetico costante in mezzi materiali è descritto da due equazioni di Maxwell che si ottengono considerando la media delle equazioni microscopiche seguenti:

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{29,1}$$

L'intensità media del campo magnetico si suole chiamare *induzione magnetica* e indicarla così:

$$\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \tag{29,2}$$

Perciò dopo aver calcolato la media della prima delle equazioni (29,1) abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{29,3}$$

Nella seconda equazione, invece, scompare la derivata rispetto al tempo dopo il calcolo della media poiché il campo medio è supposto costante; quindi, abbiamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{29,4}$$

La densità microscopica media di corrente, in generale, è non nulla sia nei conduttori che nei dielettrici. La differenza tra queste due categorie di solidi è che nei dielettrici sempre

$$\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = 0, \tag{29,5}$$

dove l'integrale è esteso all'area totale di qualsiasi sezione trasversale del corpo; nei conduttori, invece, questo integrale può essere diverso da zero. Supponiamo dapprima che nel corpo (qualora sia conduttore) non esista corrente totale, vale a dire che si verifica la relazione (29,5).

La nullità dell'integrale (29,5) esteso a qualsiasi sezione del corpo significa che il vettore $\overline{\rho\mathbf{v}}$ può essere scritto come rotore di un altro vettore che si suole indicare con $c\mathbf{M}$, cioè

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M}, \tag{29,6}$$

ove la grandezza **M** è non nulla soltanto all'interno del corpo (cfr. considerazioni analoghe al § 6). Integrando infatti rispetto alla superficie delimitata da un contorno che circonscrive il corpo e passa ovunque al suo esterno, otteniamo

$$\int \overline{\rho \mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = c \int \operatorname{rot} \mathbf{M}\, d\mathbf{f} = c \oint \mathbf{M}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Il vettore **M** si chiama *magnetizzazione* del corpo. Introducendolo nell'equazione (29,4) otteniamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \tag{29,7}$$

ove il vettore **H** è legato con l'induzione magnetica **B** dalla relazione

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \tag{29,8}$$

analoga alla relazione tra l'induzione elettrica **D** e l'intensità **E**. Sebbene il vettore **H** per analogia con **E** di solito sia chiamato *intensità* del campo magnetico, si deve ricordare che l'intensità media vera e propria è **B** e non **H**.

Per precisare il significato fisico della grandezza **M** consideriamo il *momento magnetico* totale creato da tutte le particelle cariche che si muovono all'interno del corpo. Secondo la definizione (cfr. II § 44), il momento magnetico è rappresentato dall'integrale [1])

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \operatorname{rot} \mathbf{M}]\, dV.$$

Poiché all'esterno del corpo $\rho \mathbf{v} \equiv 0$, si può calcolare l'integrale rispetto a qualsiasi volume al di fuori del corpo. Trasformiamolo nel seguente modo:

$$\int [\mathbf{r} [\nabla \mathbf{M}]]\, dV = \oint [\mathbf{r} [d\mathbf{f}\, \mathbf{M}]] - \int [[\mathbf{M} \nabla]\, \mathbf{r}]\, dV.$$

L'integrale di superficie all'esterno del corpo si annulla. Nel secondo termine abbiamo

$$[[\mathbf{M} \nabla]\, \mathbf{r}] = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Come risultato, quindi, otteniamo

$$\frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \cdot \overline{\rho \mathbf{v}}]\, dV = \int \mathbf{M}\, dV. \tag{29,9}$$

---

[1]) Sottolineiamo per maggiore chiarezza che in questa formula **r** è una coordinata corrente (variabile d'integrazione) e non coordinata di una singola particella microscopica; perciò essa non figura sotto il segno di media.

Si vede che il vettore di magnetizzazione rappresenta il momento magnetico per unità di volume del corpo [1]).

Alle equazioni (29,3) e (29,7) deve essere associata una relazione esprimente un legame tra le grandezze **H** e **B** e, in seguito, si ottiene un sistema completo di equazioni. Nei corpi non ferromagnetici e in campi magnetici non troppo forti **B** e **H** sono mutuamente legate da una relazione lineare. Per i corpi isotropi la dipendenza lineare si riduce alla semplice proporzionalità

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{29,10}$$

Il coefficiente μ si chiama *permeabilità magnetica* e il coefficiente di proporzionalità

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} \tag{29,11}$$

nella relazione $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ *suscettività magnetica.*

Contrariamente alla permettività dielettrica ε, che in tutti i corpi è superiore a 1, la permeabilità magnetica può essere sia superiore che inferiore all'uno. Si può affermare che sempre $\mu > 0$ (per ragioni di questa differenza tra μ e ε si veda il § 32; la dimostrazione della disuguaglianza $\mu > 0$ sarà data al § 31). Rispettivamente la suscettività magnetica χ può essere sia positiva che negativa.

Un'altra differenza, quantitativa, consiste nel fatto che la suscettività magnetica della maggioranza schiacciante dei corpi è molto piccola rispetto a loro suscettività dielettrica. Questa differenza è dovuta al fatto che la magnetizzazione della sostanza (non ferromagnetica) è un effetto relativistico del secondo ordine rispetto a v/c (v sono velocità elettroniche negli atomi) [2]).

Nei corpi anisotropi, cristalli, la semplice proporzionalità (29,10) va sostituita dalle relazioni lineari

$$B_i = \mu_{ik} H_k. \tag{29,12}$$

Il tensore di permeabilità magnetica μ_{ik} è simmetrico. Ciò segue dalle relazioni termodinamiche che saranno dedotte nel § 31, così come nel § 13 è stata dimostrata la simmetria del tensore ε_{ik}.

Dalle equazioni div $\mathbf{B} = 0$ e rot $\mathbf{H} = 0$ segue (cfr. § 6) che sulla frontiera di due mezzi distinti devono essere soddisfatte le condizioni

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \tag{29,13}$$

[1]) Appena stabilita questa corrispondenza la grandezza **M** è completamente definita. Le relazioni (29,6) all'interno del corpo e $\mathbf{M} = 0$ all'esterno di per se stesse non definiscono univocamente questa grandezza: in un dominio all'interno del corpo a **M** si potrebbe aggiungere qualsiasi vettore della forma grad f senza violare l'uguaglianza (29,6) (cfr. osservazione analoga a proposito della polarizzazione elettrica alla pag. 59).

[2]) Il rapporto v/c entra una volta con **H** nell'operatore di Hamilton che descrive l'interazione del corpo con il campo magnetico; la seconda volta esso entra mediante momenti magnetici elementari atomici o molecolari.

Questo sistema di equazioni e delle condizioni di frontiera corrispondenti formalmente coincide con il sistema di equazioni che definiscono il campo elettrostatico nei dielettrici in assenza di cariche libere e differisce per la sola sostituzione di **E** e **D** con **H** e **B**, rispettivamente. Data l'equazione rot **H** = 0 si può cercare **H** nella forma **H** = — grad ψ e per il potenziale ψ si ottengono le stesse equazioni che per il potenziale elettrostatico.

Le soluzioni di alcuni problemi studiati nel capitolo II per il campo elettrostatico si applicano così direttamente al campo magnetico. In particolare, le formule dedotte nel § 8 per l'ellissoide dielettrico nel campo elettrico omogeneo sono valide completamente (con cambiamento appropriato delle notazioni) anche per ellissoide magnetico nel campo magnetico omogeneo. Così l'intensità $\mathbf{H}^{(i)}$ e l'induzione $\mathbf{B}^{(i)}$ del campo magnetico all'interno dell'ellissoide sono legate con l'intensità $\mathfrak{H}$ del campo esterno mediante la relazione

$$H_i^{(i)} + n_{ik}(B_k^{(i)} - H_k^{(i)}) = \mathfrak{H}_i, \tag{29,14}$$

dove n_{ik} è il tensore dei coefficienti di demagnetizzazione. Ricordiamo che questa relazione si verifica per un legame qualsiasi tra **B** e **H**.

Le componenti tangenziali dell'induzione magnetica, a differenza della sua componente normale, sono soggette a un balzo sulla superficie di separazione tra due mezzi. Il valore di questo balzo si può legare con la densità di correnti che passano attraverso la superficie. A tale scopo integriamo ambedue i membri dell'equazione (29,4) rispetto a un piccolo tratto Δl che attraversa la superficie di separazione nella direzione della normale. In seguito la lunghezza Δl facciamo tendere a zero; l'integrale $\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, dl$, tuttavia, può tendere a una grandezza finita. La grandezza

$$\mathbf{g} = \int \overline{\rho\mathbf{v}}\, dl \tag{29,15}$$

così definita si può chiamare densità superficiale di corrente. Essa definisce la carica che attraversa per unità di tempo l'unità di lunghezza di una linea tracciata sulla superficie. Consideriamo la direzione **g** passante per un dato punto della superficie come asse y e la direzione della normale come asse x diretto dal mezzo *1* al mezzo *2*. Allora l'integrazione dell'equazione (29,4) dà

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) dx = \frac{4\pi}{c}\, g_y = \frac{4\pi}{c}\, g.$$

Poiché B_x è continua la derivata $\partial B_x/\partial z$ è limitata e perciò l'integrale rispetto a quest'ultima tende a zero se tende a zero la lunghez-

za del tratto Δl. L'integrale rispetto a $\partial B_z/\partial x$, invece, fornisce la differenza di valori B_z sui due lati della superficie. Quindi,

$$B_{2z} - B_{1z} = -\frac{4\pi}{c} g.$$

Quest'uguaglianza si può scrivere nella forma vettoriale seguente:

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{g} = [\mathbf{n}, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = 4\pi [\mathbf{n}, \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1] \qquad (29,16)$$

ove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario della normale diretta all'interno del mezzo *2*; in quest'ultima trasformazione abbiamo tenuto conto della continuità della componente tangenziale di $\mathbf{H}$.

§ 30. Campo magnetico delle correnti continue

Se attraverso un conduttore passa la corrente totale non nulla la densità media di corrente in esso può essere rappresentata nella forma della somma

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

Il primo termine legato con la magnetizzazione del mezzo non dà contributo nella corrente totale poiché il trasporto totale della carica attraverso la sezione trasversale del corpo è determinato soltanto dall'integrale $\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}$ del secondo termine. La grandezza $\mathbf{j}$ si chiama *densità di corrente di conduzione* [1]. Tutto quanto detto nel § 21 si riferisce a questa grandezza, in particolare, l'energia dissipata in unità di tempo in unità di volume è uguale a $\mathbf{Ej}$.

La distribuzione della corrente $\mathbf{j}$ nel volume del conduttore è determinata dalle equazioni date nel § 21 nelle quali non figura il campo magnetico generato da queste correnti (a condizione che si trascuri influsso del campo sulle proprietà di conducibilità del metallo stesso). Perciò il problema del campo magnetico delle correnti deve essere risolto sulla base della distribuzione di queste ultime. Le equazioni che determinano questo campo differiscono da quelle dedotte nel § 29 per la presenza del termine $4\pi\mathbf{j}/c$ al posto dello zero a secondo membro della (29,7):

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad (30,1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \qquad (30,2)$$

[1]) La grandezza c rot $\mathbf{M}$ si chiama talvolta densità di correnti molecolari. Questo nome, tuttavia, non corrisponde in tutto al quadro fisico autentico del moto delle cariche nel conduttore. Così, nel metallo il contributo nella magnetizzazione è dato non dai soli elettroni che si muovono all'interno degli atomi, ma anche dagli elettroni di conducibilità.

La densità di corrente di conduzione **j** proporzionale all'intensità del campo elettrico è una grandezza limitata che non diventa infinita, in particolare, anche sulla frontiera di separazione tra due mezzi. Perciò il secondo membro dell'equazione (30,2) non influisce sulla condizione di continuità delle componenti tangenziali di **H**.

Per la soluzione delle equazioni (30,1-2) è comodo introdurre il *potenziale vettore* **A** ponendo

$$\mathbf{B} = \text{rot}\,\mathbf{A} \tag{30,3}$$

e come risultato l'equazione (30,1) si verifica identicamente. L'uguaglianza (30,3) non definisce ancora il potenziale vettoriale. Si deve aggiungere, senza violare la (30,3), un vettore qualsiasi della forma grad f. Poiché esiste questa non univocità si può sottomettere **A** a una condizione complementare, e come tale consideriamo

$$\text{div}\,\mathbf{A} = 0. \tag{30,4}$$

L'equazione per **A** si ottiene sostituendo la (30,3) nella (30,2). Per il legame lineare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ abbiamo

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}. \tag{30,5}$$

In questa forma questa equazione si verifica per qualsiasi mezzo non omogeneo.

Nel mezzo omogeneo μ = costante, e poiché rot rot $\mathbf{A}$ = = grad div $\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A}$ l'equazione (30,5) si riduce alla forma

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mu\mathbf{j}. \tag{30,6}$$

Se abbiamo a che fare con l'insieme di due o più mezzi distinti a contatto, ciascuno dei quali ha una sua permeabilità magnetica μ, l'equazione generale (30,5) si riduce a un'equazione della forma (30,6) all'interno di ciascuno dei corpi omogenei e sulle frontiere di contatto deve essere soddisfatta la condizione di continuità delle componenti tangenziali del vettore $(1/\mu)$ rot **A**. Inoltre, devono essere continue le componenti tangenti del vettore stesso **A** poiché un loro balzo significherebbe l'esistenza sulla frontiera dell'induzione infinita **B**.

Le equazioni del campo si rendono più semplici per il problema piano della determinazione del campo magnetico in un mezzo illimitato e omogeneo in una direzione (che consideriamo come direzione dell'asse z), fra l'altro, le correnti che generano il campo sono dirette anch'esse ovunque lungo l'asse z e la loro densità $j_z = j$ è una funzione esclusivamente di x, y. Facciamo l'ipotesi naturale (che trova conferma nel risultato) che il potenziale vettore di questo campo sia diretto anch'esso lungo l'asse z: $A_z = A\,(x, y)$ (in questo caso la condizione (30,4) è soddisfatta automaticamente) e

che il campo magnetico sia ovunque parallelo al piano xy. Indicando con $\mathbf{k}$ il vettore unitario lungo l'asse z abbiamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} A\mathbf{k} = [\operatorname{grad} A \cdot \mathbf{k}],$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}\right) = \left[\nabla\left[\frac{\nabla A}{\mu} \cdot \mathbf{k}\right]\right] = -\mathbf{k} \operatorname{div} \frac{\nabla A}{\mu}.$$

Perciò l'equazione (30,5) si riduce alla forma

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c} j(x, y), \tag{30,7}$$

vale a dire che otteniamo effettivamente un'equazione per una grandezza scalare $A(x, y)$. Per un mezzo omogeneo a tratti l'equazione (30,7) diventa

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} \mu j(x, y) \tag{30,8}$$

con la condizione di continuità di A e $\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial n}$ sulla superficie di separazione [1]).

Il campo magnetico si definisce in modo elementare se la distribuzione delle correnti è simmetrica rispetto all'asse z: $j_z = j(r)$ (r è la distanza dall'asse z). Evidentemente, in questo caso le linee di forza magnetiche sono circonferenze $r =$ costante. Quanto al valore assoluto del campo, esso è definito direttamente dalla formula

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{\mu c} \int \mathbf{j}\, d\mathbf{f} \tag{30,9}$$

che è formula integrale dell'equazione (30,2). E precisamente,

$$H(r) = \frac{2J(r)}{cr} \tag{30,10}$$

ove $J(r)$ è la corrente totale che passa all'interno della circonferenza $r =$ costante.

---

[1]) Sottolineiamo che il problema piano del campo magnetico costante risulta essere equivalente al problema piano elettrostatico del campo elettrico creato da cariche estranee distribuite nel mezzo dielettrico con densità $\rho_{est}(x, y)$. Quest'ultimo problema richiede che sia risolta l'equazione

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho_{est}$$

(φ è il potenziale del campo) che differisce dall'equazione (30,7) per la sola sostituzione di A, j/c, μ con φ, ρ_{est}, $1/\varepsilon$, rispettivamente; coincidono anche le condizioni di frontiera per A e φ. Tuttavia, compare la differenza nella determinazione di $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$, rispettivamente, mediante φ o A. I vettori $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ e $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ in ogni punto sono uguali per valore assoluto ma reciprocamente perpendicolari per direzione.

La riduzione dell'equazione vettoriale (30,5) a una sola equazione scalare è possibile anche per la distribuzione assiale-simmetrica delle correnti circolari, cioè per una distribuzione che nelle coordinate cilindriche r, φ, z ha la forma

$$j_r = j_z = 0, \; j_\varphi = j\,(r, z).$$

Cerchiamo il potenziale vettoriale nella forma $A_r = A_z = 0$, $A_\varphi = A\,(r, z)$. In questo caso le componenti dell'induzione magnetica $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ sono

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA), \quad B_\varphi = 0$$

e la φ-componente dell'equazione (30,2) dà

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r} rA\right) = -\frac{4\pi}{c} j\,(r, z). \qquad (30,11)$$

Le equazioni del campo magnetico delle correnti si possono risolvere nella forma generale in un caso importante quando si possono trascurare le proprietà magnetiche del campo, cioè si può porre ovunque $\mu = 1$. Allora per il potenziale vettore in tutto lo spazio si verifica l'equazione

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

senza alcuna condizione sulle superficie di separazione tra mezzi distinti (compresa la superficie del conduttore attraverso il quale passa la corrente). La soluzione di questa equazione che si annulla all'infinito è

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{R}\, dV, \qquad (30,12)$$

ove R è la distanza dal punto in cui si cerca $\mathbf{A}$ (punto di osservazione) all'elemento di volume dV (cfr. II § 43). Nell'applicare l'operazione rot a questa espressione si deve ricordare che si deve derivare $\mathbf{j}/R$ sotto il segno di integrale rispetto alle coordinate del punto di osservazione dalle quali $\mathbf{j}$ non dipende, cosicché

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\cdot\mathbf{j}\right] = -\frac{1}{R^3}\,[\mathbf{R}\mathbf{j}],$$

ove il raggio vettore $\mathbf{R}$ è diretto da dV al punto di osservazione. In tal modo,

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}\mathbf{R}]}{R^3}\, dV. \qquad (30,13)$$

Se il conduttore attraverso il quale passa la corrente è sufficientemente sottile (filo sottile) e se presenta interesse il solo campo nello spazio circostante, si può trascurare lo spessore del conduttore.

Nel seguito considereremo le cosiddette correnti *lineari*. In questo caso l'integrazione rispetto al volume del conduttore va sostituita con l'integrazione rispetto al suo contorno. E precisamente, le formule per le correnti di volume sostituendo in queste ultime

$$\mathbf{j}\, dV \to J\, d\mathbf{l},$$

ove J è la corrente totale che passa attraverso il conduttore. Dalle formule (30,12-13) otteniamo così

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{H} = \frac{J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{R}]}{R^3}. \tag{30,14}$$

La seconda di queste formule esprime la *legge di Biot-Savart*.

Queste semplici formule per il campo magnetico delle correnti lineari non sono legate con la condizione $\mu = 1$. Poiché trascuriamo lo spessore del conduttore, non si deve scrivere nessuna condizione di frontiera sulla sua superficie e le proprietà magnetiche della sua sostanza sono, in generale, inessenziali (essa può essere anche ferromagnetica). Perciò l'equazione (30,6) per il campo nel mezzo che circonda il conduttore diventa

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}\,\mathbf{R}]}{R^3} \tag{30,15}$$

qualunque sia la suscettività magnetica del mezzo. In tal modo, la presenza di un mezzo implica il solo cambiamento di μ volte dell'induzione magnetica, mentre l'intensità $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, in generale, non varia.

Il problema del campo magnetico delle correnti lineari può essere risolto anche come il problema della teoria del potenziale. Poiché trascuriamo il volume dei conduttori si tratta infatti della determinazione del campo nello spazio in tutto il volume del quale (tranne le linee singolari, ossia le correnti lineari) non esistono correnti. Ma in assenza di correnti il campo magnetico costante gode del potenziale scalare soddisfacente (nel mezzo omogeneo) all'equazione di Laplace. Tra il potenziale del campo magnetico e il potenziale elettrostatico esiste, tuttavia, una differenza notevole. Il potenziale del campo elettrico sempre è una funzione monodroma. Ciò è dovuto, come conseguenza, al fatto che rot $\mathbf{E} = 0$ in tutto lo spazio (anche laddove esistono cariche) e perciò la variazione del potenziale nella descrizione di qualsiasi contorno chiuso (cioè la circuitazione di $\mathbf{E}$ lungo questo contorno) è nulla. La circuitazione del campo magnetico lungo un contorno che circonda la corrente lineare è non nulla e vale $4\pi J/c$. Perciò il valore del potenziale cambia di questa grandezza per ogni passaggio attorno alla linea di corrente, vale a dire che il potenziale del campo magnetico è una funzione polidroma.

Se il sistema di correnti è concentrato in un dominio finito dello spazio (e se $\mu = 1$ sia nei conduttori che nel mezzo), lontano da que-

sto dominio il potenziale vettoriale del campo magnetico ha la forma

$$\mathbf{A} = \frac{[\mathcal{M}\mathbf{R}]}{R^3}, \tag{30,16}$$

ove

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{rj}]\, dV \tag{30,17}$$

è il momento magnetico totale del sistema [1]).

Per la corrente lineare questa espressione diventa

$$\mathcal{M} = \frac{J}{2c} \oint [\mathbf{r}\, d\mathbf{l}]$$

e può essere trasformata in integrale esteso alla superficie delimitata dal contorno della corrente. Il prodotto $d\mathbf{f} = [\mathbf{r}\, d\mathbf{l}]/2$ è uguale in valore assoluto all'area dell'elemento triangolare di superficie costruito sui vettori $\mathbf{r}$ e $d\mathbf{l}$. L'integrale vettoriale $\int d\mathbf{f}$ non dipende dalla superficie (delimitata da un contorno assegnato) su cui è esteso. Quindi, il momento magnetico della corrente lineare chiusa vale

$$\mathcal{M} = \frac{J}{c} \int d\mathbf{f}. \tag{30,18}$$

In particolare, per la corrente lineare chiusa piana il momento magnetico è uguale semplicemente a JS/c, ove S è l'area della parte del piano delimitata dalla corrente.

Per concludere, soffermiamoci anche sulla questione del flusso di energia nel conduttore. L'energia dissipata nel conduttore (nella forma del calore di Joule) deriva dall'energia del campo elettromagnetico. Nel caso stazionario l'equazione della continuità esprimente la legge di conservazione dell'energia ha la forma

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{jE}, \tag{30,19}$$

ove $\mathbf{S}$ è la densità del flusso di energia. Quest'ultima è data all'interno del conduttore dall'espressione

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}] \tag{30,20}$$

che formalmente coincide con l'espressione per il vettore di Poynting per il campo nel vuoto. È facile provarlo direttamente: il calcolo di div $\mathbf{S}$ mediante l'equazione rot $\mathbf{E} = 0$ e la (30,2) conduce alla formula (30,19).

---

[1]) Cfr. II § 44. In quella deduzione è stata utilizzata in forma esplicita la rappresentazione delle correnti come risultato del moto descritto dalle particelle cariche separate. Questa deduzione gode, ovviamente, della generalità totale ma la formula (30,16) si può dedurre anche in modo macroscopico puro (cfr. il problema 4 per il presente paragrafo).

Indipendentemente da questa conclusione la formula (30,20) segue univocamente dalla condizione di continuità della componente normale di **S** sulla superficie del corpo se, in questo caso, si tiene conto della continuità di $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{H}_t$ e del fatto che la formula (30,20) si verifica nel vuoto all'esterno del corpo.

Problemi[1])

1. Determinare il potenziale scalare del campo magnetico creato dalla corrente lineare chiusa.

Soluzione. Trasformando l'integrale sul contorno in integrale di superficie da esso descritta, otteniamo

$$\mathbf{A}=\frac{J}{c}\oint\frac{d\mathbf{l}}{R}=\frac{J}{c}\int\left[d\mathbf{f}\nabla\frac{1}{R}\right],$$

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=-\frac{J}{c}\int(d\mathbf{f}\nabla)\nabla\frac{1}{R}$$

(nella trasformazione si deve tener conto che $\Delta\,(1/R)=0$). Confrontando con $\mathbf{B}=-\operatorname{grad}\psi$ troviamo che il potenziale scalare

$$\psi=\frac{J}{c}\int d\mathbf{f}\nabla\frac{1}{R}=-\frac{J}{c}\int\frac{d\mathbf{f}\,\mathbf{R}}{R^3}.$$

L'integrale che figura in questa espressione rappresenta l'angolo solido Ω sotto il quale si vede il contorno dal punto di osservazione del campo. La polidromità del potenziale menzionata nel testo si rivela in quanto segue: quando il punto di osservazione descrive il cammino chiuso lungo il filo l'angolo Ω raggiungendo il valore 2π cambia di segno e diventa uguale a -2π.

2. Determinare il campo magnetico della corrente lineare circolare (di raggio a).

Soluzione. Consideriamo come origine delle coordinate cilindriche r, φ, z il centro della circonferenza: fra l'altro, l'angolo φ si calcola a partire dal piano passante per l'asse z e il punto di osservazione del campo. Il potenziale vettoriale ha la sola componente $A_\varphi=A\,(r,\,z)$ e in accordo con la formula (30,14) scriviamo

$$A_\varphi=\frac{J}{c}\oint\frac{\cos\varphi\,dl}{R}=\frac{2J}{c}\int_0^\pi\frac{a\cos\varphi\,d\varphi}{(a^2+r^2+z^2-2ar\cos\varphi)^{1/2}}.$$

Introducendo la nuova variabile θ secondo $\varphi=\pi+2\theta$ si può ridurre l'ultima espressione alla forma

$$A_\varphi=\frac{4J}{ck}\sqrt{\frac{a}{r}}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K-E\right],$$

ove

$$k^2=\frac{4ar}{(a+r)^2+z^2}$$

e K, E sono due integrali ellittici totali di prima e di seconda specie

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}},\qquad E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta.$$

[1]) Nei problemi 1-4 poniamo ovunque $\mu=1$.

Troviamo in seguito le componenti dell'induzione

$$B_\varphi=0,\ B_r=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}=\frac{J}{c}\ \frac{2z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K+\frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}\ E\right],$$

$$B_z=\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial r}\ (rA_\varphi)=\frac{J}{c}\ \frac{2}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K+\frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}\ E\right].$$

Abbiamo usato qui le formule che si provano facilmente

$$\frac{\partial K}{\partial k}=\frac{E}{k\,(1-k^2)}-\frac{K}{k}\ ,\quad \frac{\partial E}{\partial k}=\frac{E-K}{k}.$$

Sull'asse ($r = 0$)

$$B_r=0,\quad B_z=\frac{2\pi a^2 J}{c\,(a^2+z^2)^{3/2}}\ ,$$

ciò che si ottiene immediatamente con un calcolo elementare.

3. Determinare il campo magnetico in un foro cilindrico nel conduttore cilindrico (indefinitamente lungo) lungo il quale passa la corrente uniformemente distribuita sulla sua sezione (fig. 18).

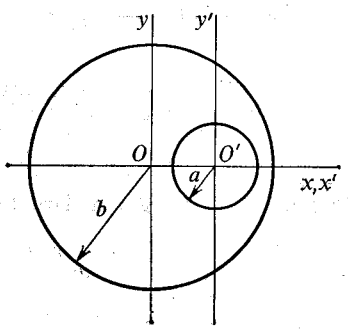


Fig. 18

Soluzione. Se non fosse il foro il campo all'interno del cilindro sarebbe uguale a

$$H'_x=-2\pi jy/c,\quad H'_y=2\pi jx/c$$

(le dimensioni e gli assi coordinati sono rappresentati nella figura).

Se attraverso il cilindro interno passasse la corrente di densità $-j$ essa creerebbe nello stesso punto di osservazione il campo

$$H''_x=2\pi jy'/c,\quad H''_y=-2\pi jx'/c.$$

Il campo cercato nel foro si crea per sovrapposizione di questi due campi. Osservando che $x-x'=OO'=h$ e $y=y'$, troviamo

$$H_x=0,\quad H_y=\frac{2\pi jh}{c}=\frac{2hJ}{(b^2-a^2)\,c}\ ,$$

cioè il campo uniforme nella direzione dell'asse y.

4. Dedurre la formula (30,16) per il potenziale vettore del campo lontano dalle correnti date dalla formula (30,12).

Soluzione. Scriviamo $\mathbf{R}=\mathbf{R}_0-\mathbf{r}$, ove $\mathbf{R}_0$ e $\mathbf{r}$ sono due raggi vettori uscenti dall'origine di coordinate sita in un punto del dominio delle correnti verso il punto di osservazione e l'elemento di volume dV, rispettivamente. Sviluppando l'espressione integranda in potenze di $\mathbf{r}$ e tenendo conto che $\int \mathbf{j}\ dV=0$, otteniamo

$$A_i\approx\frac{R_k}{cR^3}\int x_k j_i\,dV$$

(omettiamo l'indice 0 di R). Integrando per parti l'identità

$$\int x_i x_k \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV = 0,$$

troviamo

$$\int (j_i x_k + j_k x_i)\, dV = 0.$$

Perciò A_i si può riscrivere nella forma

$$A_i = \frac{R_k}{2cR^3} \int (x_k j_i - x_i j_k)\, dV$$

che coincide con la formula (30,16).

5. Provare il campo magnetico generato dalla corrente lineare in un mezzo magneticamente anisotropo (*A. S. Viglin*, 1954).

Soluzione. Nel mezzo anisotropo che circonda il conduttore abbiamo l'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \mu_{ik} \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

ove μ_{ik} è il tensore di permeabilità magnetica del mezzo. Invece di introdurre il potenziale vettore secondo $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, introduciamo un altro vettore $\mathbf{C}$ definito dall'uguaglianza

$$H_i = e_{ikl} \mu_{km} \frac{\partial C_l}{\partial x_m} \tag{2}$$

(e_{ikl} è tensore unitario antisimmetrico), l'espressione (2) verifica anch'essa identicamente l'equazione (1). Per il vettore $\mathbf{C}$ così definito si può scrivere la seguente condizione complementare:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} \equiv \frac{\partial C_l}{\partial x_l} = 0. \tag{3}$$

Sostituendo l'espressione (2) nell'equazione $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$, otteniamo

$$e_{ikl} \frac{\partial H_l}{\partial x_k} = -\mu_{kp} \frac{\partial^2 C_i}{\partial x_k\, \partial x_p} = \frac{4\pi j_i}{c}$$

(per questa trasformazione abbiamo tenuto conto dell'uguaglianza

$$e_{ikl} e_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}$$

e della condizione (3)). L'equazione per $\mathbf{C}$ così ottenuta coincide formalmente con l'equazione per il potenziale del campo elettrico generato da cariche nel mezzo anisotropo (problema 2 del § 13). La sua soluzione ha la forma

$$\mathbf{C} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\, dV}{\sqrt{|\mu|\, \mu_{ik}^{-1} R_i R_k}}$$

($|\mu|$ è il determinante del tensore μ_{ik}, $\mathbf{R}$ il raggio vettore tra il punto di osservazione e dV). Passando alla corrente lineare, infine otteniamo

$$\mathbf{C} = \frac{J}{c\sqrt{|\mu|}} \oint \frac{d\mathbf{l}}{\sqrt{\mu_{ik}^{-1} R_i R_k}}.$$

§ 31. *Relazioni termodinamiche in un campo magnetico*

Le relazioni termodinamiche per un magnete nel campo magnetico nella loro forma definitiva, come vedremo più avanti, sono simili molto alle relazioni analoghe per un dielettrico nel campo elettrico. La loro deduzione, tuttavia, differisce notevolmente dal procedimento usato nel § 10. Questa differenza è dovuta in fin dei conti al fatto che il campo magnetico, contrariamente a quello elettrico, non compie lavoro sulle cariche che si muovono in esso (poiché la forza agente sulla carica è perpendicolare alla sua velocità). Perciò nel calcolare la variazione dell'energia del mezzo dovuta all'applicazione di un campo magnetico si devono considerare i campi elettrici indotti per variazione del campo magnetico e determinare il lavoro compiuto da essi sulle correnti (sorgenti del campo magnetico).

In tal modo, è indispensabile ricorrere a un'equazione che definisca un legame tra il campo elettrico e il campo magnetico variabile. Questa equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{31,1}$$

è il risultato immediato del calcolo della media dell'equazione microscopica (1,3).

Nel corso del tempo δt il campo $\mathbf{E}$ compie sulle correnti $\mathbf{j}$ un lavoro uguale a

$$\delta t \int \mathbf{jE}\, dV.$$

Questa stessa grandezza ma di segno opposto è il lavoro δR compiuto sul « campo » da parte di quella forza elettromotrice esterna che serve di sorgente per il passaggio delle correnti. Portando $\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$, otteniamo

$$\delta R = -\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}\, dV \delta = t \frac{c}{4\pi} \int \operatorname{div} [\mathbf{EH}]\, dV -$$
$$-\delta t \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}\, dV.$$

Il primo integrale trasformato in integrale esteso a una superficie indefinitamente lontana si annulla. Nel secondo integrale sostituiamo $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ della formula (31,1) e, introducendo la variazione $\delta \mathbf{B} = \delta t\, \partial \mathbf{B}/\partial t$ dell'induzione magnetica, infine otteniamo

$$\delta R = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}\, \delta \mathbf{B}\, dV. \tag{31,2}$$

Questa formula è completamente analoga formalmente all'espressione (10,2) per il lavoro quando il campo elettrico varia in modo infinitesimale. Si deve osservare, tuttavia, che l'analogia fisica tra

queste due formule in realtà non è così profonda in quanto **H**, contrariamente a **E**, non è la media dell'intensità microscopica autentica del campo.

Dopo aver dedotto la formula (31,2) tutte le relazioni termodinamiche per un magnete in un campo magnetico si possono scrivere analogamente al caso di un dielettrico nel campo elettrico dedotte al § 10; è sufficiente sostituire in esse **E** e **D** con **H** e **B**, rispettivamente. Per riferimenti ulteriori scriviamo qui alcune di queste formule. I differenziali delle energie libera e interna totali sono

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F} &= -\mathcal{S}\,\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\,dV, \\ \delta\mathcal{U} &= T\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,\delta\mathbf{B}\,dV, \end{aligned} \tag{31,3}$$

e le stesse grandezze riferite a un'unità di volume:

$$\begin{aligned} dF &= -S\,dT + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\,d\mathbf{B}, \\ dU &= T\,dS + \zeta\,d\rho + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\,d\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{31,4}$$

Accanto a F, U avremo bisogno anche dei potenziali termodinamici

$$\tilde{U} = U - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}, \quad \tilde{F} = F - \frac{\mathbf{HB}}{4\pi}, \tag{31,5}$$

per i quali

$$\begin{aligned} d\tilde{F} &= -S\,dT + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H}, \\ d\tilde{U} &= T\,dS + \zeta\,d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\,d\mathbf{H}. \end{aligned} \tag{31,6}$$

Per il legame lineare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ si possono scrivere le seguenti espressioni nella forma finita per tutte le grandezze:

$$\begin{aligned} U &= U_0(S, \rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu}, \quad F = F_0(T, \rho) + \frac{B^2}{8\pi\mu}. \\ \tilde{U} &= U_0(S, \rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}, \quad \tilde{F} = F_0(T, \rho) - \frac{\mu H^2}{8\pi}. \end{aligned} \tag{31,7}$$

Il lavoro δR (o, che è lo stesso, la variazione $\delta\mathcal{F}$ per temperatura costante) si può esprimere in altra forma mediante la densità di correnti e il potenziale vettoriale del campo magnetico. A tale scopo poniamo $\delta\mathbf{B} = \operatorname{rot}\delta\mathbf{A}$ e scriviamo

$$(\delta\mathcal{F})_T = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}\,dV = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}[\mathbf{H}\,\delta\mathbf{A}]\,dV + \\ + \frac{1}{4\pi}\int \delta\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{H}\,dV.$$

Il primo integrale si annulla di nuovo e il secondo dà

$$(\delta\mathscr{F})_T = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV. \tag{31,8}$$

Con trasformazione analoga si può ottenere

$$(\delta\tilde{\mathscr{F}})_T = -\frac{1}{c}\int \mathbf{A}\,\delta\mathbf{j}\,dV. \tag{31,9}$$

È utile notare che nel formalismo matematico dell'elettrodinamica macroscopica le correnti, quali sorgenti del campo magnetico, giocano il ruolo simile a quello dei potenziali (e non delle cariche) quali sorgenti del campo elettrico. Questa regola si rende più chiara confrontando le formule (31,8) e (31,9) con le formule analoghe per il campo elettrico

$$(\delta\mathscr{F})_T = \int \varphi\,\delta\rho\,dV, \quad (\delta\tilde{\mathscr{F}})_T = -\int \rho\,\delta\varphi\,dV \tag{31,10}$$

(cfr. le (10,13), (10,14)). Si vede che le cariche e i potenziali sono disposti in queste formule nell'ordine inverso rispetto alle correnti e ai potenziali nelle formule (31,8) e (31,9) [1]).

Per la totale coincidenza formale delle relazioni termodinamiche (espresse in funzione dell'intensità e dell'induzione) nei campi elettrico e magnetico si estendono direttamente al campo magnetico anche le disuguaglianze termodinamiche dedotte al § 18. Abbiamo visto, in particolare, che da esse deriva la disuguaglianza $\varepsilon > 0$. Nel caso elettrico questa disuguaglianza non presenta interesse in quanto è più debole della condizione $\varepsilon > 1$ che abbiamo dedotto da altre considerazioni. Ma nel caso magnetico la disuguaglianza analoga

$$\mu > 0$$

è assai importante in quanto rappresenta l'unica restrizione imposta su valori possibili della permeabilità magnetica.

§ 32. Energia libera totale di un corpo magnetico

Nel § 11 abbiamo ottenuto espressioni per l'energia libera totale $\mathscr{F}$ di un dielettrico nel campo elettrico. Uno degli aspetti termodinamici di questa grandezza consiste nel fatto che la sua variazione determina il lavoro compiuto dal campo elettrico sul corpo per sorgenti invariate (cariche) che creano questo campo. Nel campo magnetico, invece, un ruolo analogo gioca l'energia libera $\tilde{\mathscr{F}}$ poiché per sorgenti date (correnti) del campo è la sua variazione a fornire il lavoro compiuto sul corpo.

[1]) Su significato più dettagliato di questa differenza si veda la nota alla pag. 184.

La deduzione che segue più avanti è completamente analoga a quella fatta al § 11. La grandezza « totale » $\tilde{\mathcal{F}}$ definiamo come

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left(\tilde{F} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \right) dV, \tag{32,1}$$

ove $\mathfrak{H}$ è il campo magnetico che sarebbe generato da sorgenti assegnate in assenza di mezzo che si magnetizza. Il segno « + » nella parentesi (al posto del segno « — » nella formula (11,1)) è legato al fatto che il valore di $\tilde{\mathcal{F}}$ per il campo magnetico nel vuoto è

$$-\int \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} dV$$

(cfr. la (31,7)). L'integrazione nella (32,1) è estesa a tutto lo spazio, compreso il volume dei conduttori che portano le correnti le quali generano il campo [1]).

Calcoliamo la variazione di $\tilde{\mathcal{F}}$ (per temperatura assegnata e senza violazione dell'equilibrio termodinamico del mezzo) per una variazione infinitesima del campo. Poiché $\delta\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\delta\mathbf{H}$, abbiamo

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B}\,\delta\mathbf{H} - \mathfrak{H}\delta\mathfrak{H})\, dV = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{H} - \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{H}\, dV -$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{B}\,(\delta\mathbf{H} - \delta\mathfrak{H})\, dV - \frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B} - \mathbf{H})\,\delta\mathfrak{H}\, dV. \tag{32,2}$$

Introducendo il potenziale vettore $\mathfrak{A}$ del campo $\mathfrak{H}$ scriviamo nel primo termine

$$(\mathbf{H} - \mathfrak{H})\,\delta\mathfrak{H} = (\mathbf{H} - \mathfrak{H})\,\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{A} = \mathrm{div}\,[\delta\mathfrak{A}\,(\mathbf{H} - \mathfrak{H})] +$$
$$+ \delta\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,(\mathbf{H} - \mathfrak{H}).$$

Ma i campi $\mathbf{H}$ e $\mathfrak{H}$ sono creati, per definizione, dalle stesse correnti $\mathbf{j}$ la cui distribuzione nel volume dei conduttori è indipendente (cfr. § 30) dal campo che esse creano, cioè è indipendente dalla presenza o meno di corpi magnetici nello spazio circostante. Perciò $\mathbf{H}$ e $\mathfrak{H}$ verificano le stesse equazioni

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

[1]) Al § 11 abbiamo supposto che l'integrazione nell'(11,1) fosse estesa a tutto lo spazio, ad eccezione del volume dei conduttori carichi che creano il campo. Abbiamo potuto supporre così in quanto all'interno di un conduttore carico non esiste campo elettrico. Il campo magnetico, invece, esiste anche all'interno dei conduttori che portano le correnti, e perciò è impossibile escluderlo nel calcolare l'energia libera totale.

in modo che rot $(\mathbf{H} - \mathfrak{H}) = 0$. L'integrale di div $[\delta\mathfrak{A}\,(\mathbf{H} - \mathfrak{H})]$ si trasforma in integrale di superficie indefinitamente lontana e si annulla.

Analogamente proviamo che si annulla anche il secondo termine nella (32,2), cosicché

$$\delta\tilde{\mathscr{F}} = -\frac{1}{4\pi}\int (\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\delta\mathfrak{H}\,dV = -\int \mathbf{M}\,\delta\mathfrak{H}\,dV. \qquad (32,3)$$

Abbiamo ottenuto così per $\delta\tilde{\mathscr{F}}$ l'espressione analoga a quella (11,3) per $\delta\mathscr{F}$ nel caso elettrico. In particolare, nel campo magnetico omogeneo esterno $\mathfrak{H}$ per $d\tilde{\mathscr{F}}$ otteniamo la seguente espressione analoga all'(11,5):

$$d\tilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{S}dT - \mathscr{M}\,d\mathfrak{H}, \qquad (32,4)$$

ove $\mathscr{M}$ è il momento magnetico totale del corpo.

Senza ripetere gli ulteriori calcoli, scriviamo le seguenti formule per analogia con quelle del § 11. Per il legame lineare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ abbiamo

$$\tilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V, T) = -\int \frac{1}{2}\mathfrak{H}\mathbf{M}\,dV. \qquad (32,5)$$

In particolare, nel campo omogeneo esterno

$$\tilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V, T) = -{}^1/_2\mathfrak{H}\mathscr{M}. \qquad (32,6)$$

Nel caso generale di dipendenza arbitraria di $\mathbf{B}$ da $\mathbf{H}$ calcolando $\tilde{\mathscr{F}}$ si può ricorrere alla formula

$$\tilde{\mathscr{F}} = \int\left(\tilde{F} + \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathfrak{H}\right)dV = \int\left(F - \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathfrak{H}\right)dV \qquad (32,7)$$

analoga alla formula (11,12) per i dielettrici.

Al § 11 sono date anche formule semplificate applicabili al caso di suscettività dielettrica debole. Caso analogo per il campo magnetico è particolarmente importante in quanto la maggioranza dei corpi gode di suscettività magnetica debole che abbiamo già segnato. In questo caso abbiamo

$$\tilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0 = -\frac{\chi}{2}\int \mathfrak{H}^2\,dV. \qquad (32,8)$$

Per il campo magnetico si possono ottenere risultati analoghi a quelli del § 14. Si tratta di cambiamento delle grandezze termodinamiche di un magnetico per variazione infinitesima della sua permeabilità magnetica μ; in questo caso è supposto che le sorgenti del campo siano invariabili. Dopo quanto detto precedentemente è chiaro a priori che al posto della variazione di $\mathscr{F}$ (come al § 14) ora

si deve considerare la variazione di $\tilde{\mathscr{F}}$. Non ripetiamo qui la deduzione analoga a quella della formula (14,1). Si ottiene lo stesso risultato:

$$\delta\tilde{\mathscr{F}} = -\int \delta\mu \frac{H^2}{8\pi}\, dV. \tag{32,9}$$

Al § 14 sulla base della formula (11,7), analoga alla formula (32,5), abbiamo tratto la conclusione sulla positività della suscettività elettrica della sostanza. Nel caso magnetico, tuttavia, non si può trarre questa conclusione in quanto la suscettività magnetica può avere due segni. La ragione di questa differenza notevole consiste nel fatto che l'operatore di Hamilton di un sistema di cariche in moto nel campo magnetico contiene non soltanto termini lineari rispetto al campo (come nel caso elettrico) ma anche termini quadratici. Perciò nella determinazione della variazione dell'energia libera del corpo nel campo magnetico mediante la teoria delle perturbazioni sulla base della formula (14,2) il contributo daranno non i soli termini della seconda approssimazione ma anche della prima. Non si può trarre nessuna conclusione sul segno della variazione; per corpi paramagnetici essa è positiva e per diamagnetici negativa.

Al § 14 abbiamo fatto conclusioni sulla direzione del moto dei corpi nel campo elettrico. Conclusioni analoghe derivano anche dalla formula (32,9). Tuttavia, poiché μ può essere sia superiore che inferiore a 1 la direzione del moto dei corpi nel campo magnetico non è universale. In un campo quasi-omogeneo, per esempio, i corpi paramagnetici ($\mu > 1$) si muovono nella direzione di aumento dell'intensità e i corpi diamagnetici ($\mu < 1$) nella direzione di diminuzione di H.

§ 33. Energia di un sistema di correnti

Consideriamo un sistema di conduttori attraverso i quali passano le correnti. Supponiamo che né conduttori stessi né mezzo in cui si trovano non siano ferromagnetici e che ovunque $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. Secondo il § 31 l'energia libera totale del sistema si esprime in funzione del campo magnetico creato da queste correnti mediante

$$\mathscr{F} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{HB}\, dV. \tag{33,1}$$

Qui abbiamo omesso la grandezza costante $\mathscr{F}_0$ (per temperatura data dei corpi) in quanto non ha a che fare con le correnti. L'integrazione nella (33,1) è estesa a tutto lo spazio sia all'interno dei conduttori che all'esterno.

La stessa energia si può esprimere in funzione delle correnti mediante l'integrale

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{A}\mathbf{j}\, dV \tag{33,2}$$

(cfr. il passaggio dalla (31,2) alla (31,8)). Qui l'integrazione è estesa soltanto al volume dei conduttori poiché all'esterno di essi $\mathbf{j} = 0$.

In virtù della linearità delle equazioni del campo, si può rappresentare il campo magnetico come somma di campi che sarebbero creati da ciascuna corrente separatamente se negli altri conduttori non esistessero correnti: $\mathbf{H} = \sum \mathbf{H}_a$. In questo caso l'energia libera totale (33,1) diventa

$$\mathscr{F} = \sum_a \mathscr{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathscr{F}_{ab}, \tag{33,3}$$

ove

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}_a \mathbf{B}_a\, dV, \quad \mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}_a \mathbf{B}_b\, dV \tag{33,4}$$

(in $\mathscr{F}_{ab} = \mathscr{F}_{ba}$ abbiamo tenuto conto che $\mathbf{H}_a\mathbf{B}_b = \mu\mathbf{H}_a\mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b\mathbf{B}_a$ ove μ è la permeabilità magnetica in ogni punto dello spazio). Le grandezze $\mathscr{F}_{aa}$ si possono chiamare autoenergia libera delle correnti dell'a-esimo conduttore e $\mathscr{F}_{ab}$ energia di interazione dei conduttori a e b. Fra l'altro, si deve tener conto che questi nomi hanno significato letterale se si trascurano le proprietà magnetiche della sostanza sia dei conduttori stessi che del mezzo. In caso contrario il campo (e perciò anche l'energia) di ciascuna corrente dipende anche dalla disposizione e dalla permeabilità magnetica degli altri conduttori.

Le grandezze (33,4) si possono esprimere anche in funzione delle correnti $\mathbf{j}_a$ in ciascuno dei conduttori in accordo con la formula (33,2):

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a\, dV_a, \quad \mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_a \mathbf{A}_b\, dV_a = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_b \mathbf{A}_a\, dV_b. \tag{33,5}$$

L'integrale in $\mathscr{F}_{aa}$ si calcola soltanto rispetto al volume dell'a-esimo conduttore e $\mathscr{F}_{ab}$ è rappresentabile nella forma di ciascuna delle due espressioni in cui si integra rispetto al volume dei conduttori a o b, rispettivamente.

Per una data legge di distribuzione della densità di corrente nel volume del conduttore il valore $\mathscr{F}_{aa}$ dipende esclusivamente dall'intensità totale della corrente J_a che passa attraverso la sua sezione trasversale. In questo caso, alla grandezza J_a saranno proporzionali sia la densità $\mathbf{j}$ che il campo generato dalla corrente. Perciò tutto l'integrale $\mathscr{F}_{aa}$ è proporzionale a J_a^2 e si scrive nella forma

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} L_{aa} J_a^2, \tag{33,6}$$

ove L_{aa} si chiama *coefficiente di autoinduzione* del conduttore. Analogamente l'energia di interazione di due correnti è proporzionale al prodotto $J_a J_b$:

$$\mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} L_{ab} J_a J_b. \tag{33,7}$$

La grandezza L_{ab} si chiama *coefficiente di mutua induzione* dei conduttori. Quindi, l'energia libera totale del sistema di correnti è

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \tag{33,8}$$

La condizione di definizione positiva di questa forma quadratica impone alcune restrizioni sui valori dei coefficienti. In particolare, tutti i coefficienti $L_{aa} > 0$ e

$$L_{aa} L_{bb} > L_{ab}^2.$$

Il calcolo dell'energia delle correnti nel caso generale di conduttori massivi qualsiasi richiede di risolvere completamente le equazioni del campo e rappresenta un problema complicato. Esso si semplifica se è possibile porre uguale a 1 la permeabilità magnetica sia dei conduttori stessi sia del mezzo. È da notare che in questo caso l'energia delle correnti cessa di dipendere, in generale, dallo stato termodinamico (in particolare, dalla temperatura) dei corpi, e perciò in tutte le formule scritte precedentemente si può parlare con lo stesso diritto sia dell'energia libera che semplicemente dell'energia.

Per $\mu = 1$ il potenziale vettore del campo creato dalle correnti $\mathbf{j}$ è dato dalla formula (30,12). Perciò per l'energia propria del conduttore abbiamo

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} \int\int \frac{\mathbf{j}\mathbf{j}'}{R} dV\, dV'', \tag{33,9}$$

ove due integrazioni sono estese al volume di un conduttore in esame e R è la distanza tra dV e dV'. Analogamente si ottiene l'energia reciproca di due conduttori

$$\mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \int\int \frac{\mathbf{j}_a \mathbf{j}_b}{R} dV_a\, dV_b, \tag{33,10}$$

ove dV_a e dV_b sono gli elementi di volume di ciascuno dei conduttori.

Si calcola molto semplicemente l'energia reciproca di due correnti lineari. Il passaggio dalle correnti di volume a quelle lineari nella formula (33,10) si realizza mediante la sostituzione di $\mathbf{j}_a dV_a$ e $\mathbf{j}_b dV_b$ con $J_a d\mathbf{l}_a$ e $J_b d\mathbf{l}_b$, rispettivamente, e troviamo così che il coefficiente di mutua induzione è

$$L_{ab} = \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_a\, d\mathbf{l}_b}{R}.$$

Di conseguenza, in questa approssimazione L_{ab} dipende soltanto dalla forma, dimensioni e disposizione reciproca di entrambi i contorni ed è indipendente dalla distribuzione di corrente nella sezione dei fili. Sottolineiamo che per ottenere questa semplice formula, nel caso dei conduttori lineari, non occorre nemmeno una supposizione, che ovunque sia $\mu = 1$. Nell'approssimazione in cui trascuriamo lo spessore dei fili, le proprietà magnetiche del loro materiale, in generale, non incidono sul campo da essi generato e, quindi, sulla loro energia reciproca. Mentre la permeabilità magnetica μ, diversa da 1, del mezzo che circonda i fili in accordo con la formula (30,15) aumenta semplicemente di μ volte il potenziale vettore (e con esso anche l'induzione) del campo magnetico. Aumenterà di μ volte, di conseguenza, anche il coefficiente di mutua induzione, cosicché si avrà

$$L_{ab} = \mu \oint\oint \frac{d\mathbf{l}_a \, d\mathbf{l}_b}{R}. \tag{33,11}$$

Quanto al coefficiente di autoinduzione dei conduttori lineari, il suo calcolo presenta difficoltà maggiori, e questa questione sarà discussa nel paragrafo prossimo.

L'energia totale del sistema di correnti lineari si può scrivere in un'altra forma. A tale scopo torniamo all'integrale (33,2) che per le correnti lineari assume la forma

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l}_a, \tag{33,12}$$

ove $\mathbf{A}$ è il potenziale vettore del campo totale in un punto $d\mathbf{l}_a$ dell'a-esimo conduttore. L'errore fondamentale che commettiamo passando dalla formula (33,2) alla (33,12) è che viene trascurata la variazione del campo (fra l'altro, del campo propriamente detto della corrente in esame) lungo la sezione trasversale del filo. Ciascuno degli integrali di contorno che figurano nella formula (33,12) si trasforma in integrale di superficie:

$$\oint \mathbf{A} \, d\mathbf{l}_a = \int \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{f}_a = \int \mathbf{B} \, d\mathbf{f}_a,$$

rappresentando cioè il flusso di induzione magnetica (o, come si suole anche dire, il *flusso magnetico*) attraverso il contorno dell'a-esima corrente. Indichiamo questo flusso con Φ_a. Quindi,

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a. \tag{33,13}$$

Analogamente si esprime in funzione del flusso magnetico l'energia libera $\mathscr{F}$ della corrente lineare J nel campo magnetico esterno,

cioè l'energia in cui non si include l'energia propria delle sorgenti del campo. È evidente che

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} J\Phi, \tag{33,14}$$

ove Φ è il flusso del campo esterno attraverso il contorno della corrente J. Se il campo esterno è omogeneo (e se il mezzo ha $\mu = 1$), allora $\Phi = \mathfrak{H} \int d\mathbf{f}$. Introducendo il momento magnetico della corrente sulla base della formula (30,18), otteniamo $\mathcal{F} = \mathcal{M}\mathfrak{H}$.

Conoscendo l'energia del sistema di correnti in funzione delle loro dimensioni, forma e disposizione reciproca, si possono trovare le forze agenti sui conduttori mediante la semplice derivazione rispetto alle coordinate. In questo caso, tuttavia, si deve decidere quali caratteristiche delle correnti bisogna supporre costanti nella derivazione. È più comodo fare calcoli per correnti costanti. Ma in questo caso da energia libera funge la grandezza $\tilde{\mathcal{F}}$. Perciò la forza generalizzata F_q agente « lungo » la coordinata generalizzata q è

$$F_q = -\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial q}\right)_{J,\,T}.$$

Gli indici della derivata significano che la derivazione si effettua per forze costanti della corrente e per temperatura costante dei corpi. Poiché nell'energia libera omettiamo la parte costante indipendente dalle correnti, $\mathcal{F}$ e $\tilde{\mathcal{F}}$ differiscono per solo segno, cosicché

$$F_q = -\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2} \sum_{ab} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q} \tag{33,15}$$

(per brevità, qui e più avanti omettiamo l'indice T delle derivate).

In particolare, le forze agenti sul conduttore da parte del suo proprio campo magnetico sono definite dalla formula

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q}, \tag{33,16}$$

ove L è l'autoinduzione del conduttore. Il carattere d'azione di queste forze è evidente a priori dalle considerazioni che seguono. Per una data intensità della corrente (e per data temperatura) la grandezza $\tilde{\mathcal{F}}$ tende a un minimo. Poiché in questo caso $\tilde{\mathcal{F}} = -LJ^2/2c^2$, ciò vuol dire che le forze agenti sul conduttore tenderanno ad aumentarne il coefficiente di autoinduzione. Ma quest'ultimo come grandezza a dimensione di lunghezza è proporzionale alle dimensioni del conduttore. In tal modo, sotto influenza del campo magnetico il volume del conduttore aumenta.

Per la corrente nel campo magnetico esterno abbiamo [1])

$$\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{F} = -\mathcal{M}\mathfrak{H}. \tag{33,17}$$

In tutte le formule scritte precedentemente per l'energia è supposto un legame lineare tra induzione e intensità del campo magnetico. Nel caso generale, invece, di un legame arbitrario si possono stabilire relazioni differenziali analoghe. La variazione dell'energia libera per variazione infinitesima del campo (per temperatura costante) è, in accordo con la formula (31,8),

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,\delta\mathbf{A}\,dV$$

ossia, per il sistema di correnti lineari

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{c}\sum_c J_a \oint \delta\mathbf{A}\,d\mathbf{l}_a.$$

Procedendo in seguito allo stesso modo come nel passaggio dalla formula (33,12) alla (33,13), otteniamo [2])

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{c}\sum_a J_a\delta\Phi_a. \tag{33,18}$$

Dalla (31,9) ricaviamo analogamente

$$\delta\tilde{\mathcal{F}} = -\frac{1}{c}\sum_a \Phi_a\delta J_a. \tag{33,19}$$

Si può dire che per il sistema di correnti lineari $\mathcal{F}$ è potenziale termodinamico rispetto ai flussi magnetici e $\tilde{\mathcal{F}}$ rispetto alle intensità delle correnti; questi due potenziali, fra l'altro, sono legati mutuamente dalla relazione

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} - \frac{1}{c}\sum_a J_a\Phi_a. \tag{33,20}$$

---

[1]) La mancanza qui (rispetto alla formula (32,6)) del fattore 1/2 è dovuta al fatto che il momento magnetico della corrente nella (33,17) è una grandezza costante indipendente dal campo, mentre il momento magnetico di un magnete che figura nell'espressione (32,6) si crea da solo soltanto sotto azione del campo.

[2]) Notiamo l'analogia evidente tra le formule (33,18) nel caso magnetico e la (10,13) in quello elettrico. Nel caso magnetico da cariche fungono i flussi di induzione. Questa analogia ha un'interpretazione fisica intuitiva. Così come un campo elettrico può essere mantenuto senza perdita di energia dalle cariche esterne sui conduttori isolati, un campo magnetico si può mantenere senza introduzione di energia dall'esterno mediante solenoidi superconduttori i flussi magnetici attraverso i quali restano costanti. È naturale perciò che la variazione dell'energia libera $\mathcal{F}$ nei casi elettrico e magnetico sia determinata dalle variazioni delle cariche o dei flussi di induzione, rispettivamente.

In tal modo, qualunque siano le proprietà magnetiche della sostanza si verificano le relazioni termodinamiche

$$\frac{1}{c} J_a = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Phi_a}, \quad \frac{1}{c} \Phi_a = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial J_a}. \tag{33,21}$$

Se queste formule si applicano al caso del legame lineare in cui $\mathcal{F}$ sia data dalla formula (33,8), otteniamo

$$\Phi_a = \frac{1}{c} \sum_b L_{ab} J_b. \tag{33,22}$$

Quindi, i coefficienti di induzione diventano coefficienti di linearità tra flusso magnetico e intensità delle correnti che generano il campo magnetico. Il prodotto $L_{ab}J_b/c$ è il flusso magnetico creato dalla corrente J_b ($b \neq a$) attraverso il contorno della corrente J_a, e $L_{aa}J_a/c$ rappresenta il flusso attraverso lo stesso contorno creato dalla corrente stessa J_a.

§ 34. *Autoinduzione dei conduttori lineari*

Nel calcolo del coefficiente di autoinduzione del conduttore lineare non si può trascurarne completamente lo spessore, come abbiamo fatto nel calcolare la mutua induzione di due conduttori. Procedendo allo stesso modo ricaveremmo dalla formula (33,9) autoinduzione nella forma

$$L = \oint \oint \frac{d\mathbf{l}\, d\mathbf{l}'}{R},$$

ove entrambi gli integrali sono calcolati rispetto a un medesimo contorno; ma questo integrale è logaritmicamente divergente per $R \to 0$.

Il valore preciso dell'autoinduzione di un conduttore dipende dalla distribuzione di corrente in esso che può differire a seconda del modo di eccitazione della corrente, cioè dal modo in cui si applica la forza elettromotrice a questo conduttore. Ma per un filo lineare l'autoinduzione risulta essere indipendente dalla legge di distribuzione di corrente nella sua sezione con grado di precisione sufficientemente elevato [1]).

Rappresentiamo l'autoinduzione nella forma della somma $L = L_e + L_i$, ove L_e e L_i sono legate con l'energia del campo magne-

[1]) Più precisamente, è indipendente dalle distribuzioni per cui la densità di corrente varia notevolmente soltanto a distanze paragonabili con lo spessore a del filo. Se, invece, la distribuzione è tale che la densità di corrente varia sensibilmente a distanze piccole rispetto ad a (come ciò si verifica in virtù di cause speciali per il cosiddetto effetto skin o nei superconduttori), in questo caso l'autoinduzione del filo cambia.

tico all'esterno e all'interno del conduttore rispettivamente. Nel filo lineare la parte fondamentale dell'autoinduzione è costituita dalla parte « esterna » L_e. Ciò è dovuto al fatto che la parte fondamentale dell'energia magnetica di un contorno lineare chiuso è contenuta nel campo all'esterno del filo a grandi (rispetto al suo spessore) distanze. Infatti, l'energia riferita a un'unità di lunghezza di un filo illimitatamente lungo e retto è data dall'integrale

$$\frac{\mu_e}{8\pi}\int H^2\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\mu_e}{8\pi}\int\left(\frac{2J}{cr}\right)^2\cdot 2\pi r\,dr=\frac{\mu_e J^2}{c^2}\int\frac{dr}{r}$$

(r è la distanza dall'asse del filo e μ_e la permeabilità magnetica del mezzo esterno). Questo integrale è divergente logaritmicamente per grandi r. Per un contorno lineare chiuso questa divergenza, ovviamente, scompare e l'integrale sarà « tagliato » a distanze dell'ordine di grandezza delle dimensioni del contorno. Otterremo valore approssimato dell'energia moltiplicando l'integrale scritto per la lunghezza totale del filo l e considerando come limite superiore il valore l (mentre il limite inferiore è uguale al raggio a del filo):

$$\frac{\mu_e J^2}{c^2}\,l\ln\frac{l}{a}\,.$$

Di qui l'autoinduzione è

$$L=2\mu_e l\ln\frac{l}{a}\,. \tag{34,1}$$

Questa espressione gode, come si dice, di *precisione logaritmica*; il suo errore relativo è dell'ordine di grandezza di $1/\ln(l/a)$, mentre il rapporto l/a è supposto così grande da rendere grande anche il suo logaritmo [1]).

Un caso particolare dei conduttori lineari è rappresentato da una bobina (un *solenoide*) con il filo avvolto a spire elicoidali molto vicine l'una all'altra. Trascurando lo spessore del filo e le distanze tra le spire, otteniamo semplicemente una superficie cilindrica conduttrice attraverso la quale passa la corrente « superficiale » di conducibilità. L'equazione rot $\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c$ all'interno del conduttore per questa considerazione va sostituita semplicemente dalla condizione al contorno

$$[\mathbf{n},\ \mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1]=\frac{4\pi}{c}\mathbf{g} \tag{34,2}$$

[1]) L'affermazione precedente sull'indipendenza dell'autoinduzione dalla distribuzione di corrente si riferisce in realtà non soltanto all'espressione approssimata (34,1), ma anche all'ulteriore approssimazione in cui si tiene conto dei termini non contenenti grande logaritmo (ciò è equivalente all'inclusione del coefficiente di l/a nell'argomento del logaritmo); si vedano i problemi del presente paragrafo.

ove g è la densità superficiale di corrente, $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_2$ sono le intensità del campo dai due lati della superficie del solenoide e la normale **n** diretta all'interno del mezzo *2* (cfr. la deduzione della formula (29,16)).

Se il solenoide rappresenta un cilindro infinito, il campo magnetico da esso generato si determina in modo elementare. Le correnti superficiali sono circolari e la loro densità è $g = nJ$, ove J è la corrente passante per il filo e n il numero di spire per un'unità di lunghezza del solenoide. Il campo all'esterno del cilindro è nullo, mentre all'interno del cilindro esiste un campo omogeneo diretto lungo l'asse del cilindro, che vale

$$H = \frac{4\pi}{c} nJ.$$

Infatti, questo campo verifica in modo evidente le equazioni div $\mathbf{H} = 0$, rot $\mathbf{H} = 0$ in tutto lo spazio al di fuori della superficie conduttrice e anche la condizione al contorno (34,2) sulla superficie.

Rispettivamente, l'energia del campo riferita a un'unità di lunghezza del cilindro è

$$\frac{\mu_e H^2}{8\pi} \pi b^2 = \frac{2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e}{c^2} J^2$$

(b è il raggio del cilindro e μ_e si riferisce al mezzo che riempie il solenoide). Trascurando la deformazione del campo agli estremi si può applicare questa formula anche al solenoide di grande lunghezza (rispetto a b) finita h. Allora per l'autoinduzione otteniamo la seguente espressione:

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h \mu_e = 2\pi \mu_e n b l \tag{34,3}$$

ove $l = 2\pi bnh$ è la lunghezza totale del filo nella bobina. L'aumento dell'autoinduzione del solenoide rispetto all'autoinduzione del filo retto della stessa lunghezza (cfr. le (34,3) e (34,1)) è un effetto naturale dell'induzione reciproca tra spire disposte molto vicine.

Problemi [1]

1. Determinare l'autoinduzione di un filo sottile chiuso con forma circolare della sezione.

Soluzione. Il campo magnetico all'interno del filo si può supporre come il campo all'interno di un cilindro infinito retto:

$$H = \frac{2Jr}{ca^2}$$

(r è la distanza dall'asse del filo e a il suo raggio). Di qui ricaviamo la parte interna dell'autoinduzione

$$L_i = \frac{c^2}{J^2} \frac{\mu_i}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{l\mu_i}{2} \tag{1}$$

ove l è la lunghezza del filo chiuso in questione.

[1]) Nei problemi 1-6 è supposto che la permeabilità magnetica del mezzo $\mu_e = 1$.

Per calcolare L_e osserviamo che il campo all'esterno del filo sottile è indipendente dalla distribuzione di corrente nella sua sezione. In particolare, l'energia $\mathcal{F}_e$ del campo magnetico esterno non cambia supponendo che la corrente passi soltanto per la superficie del filo. Ma, in questo caso, all'interno del filo sarà $\mathbf{H} = 0$ e si può calcolare l'energia $\mathcal{F}_e$ come energia totale mediante la formula (33,2).

In virtù dell'ipotesi sulla distribuzione superficiale di correnti, l'integrale in questa formula si riduce di fatto all'integrale lineare di contorno della linea assiale del filo in modo che la parte esterna dell'autoinduzione è

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2}\,\frac{J}{2c}\oint \mathbf{A}\Big|_{r=a} d\mathbf{l}$$

ove il valore $\mathbf{A}$ nell'espressione integranda si calcola rispetto alla superficie del filo. Nel passare a questa formula abbiamo tenuto conto che nell'approssimazione considerata il campo è costante lungo il contorno della sezione circolare del filo.

Dopo aver ridotto il problema al calcolo di $\mathbf{A}_{r=a}$ facciamo un'altra ipotesi sulla distribuzione di corrente, e cioè supponiamo che la corrente J passi tutta lungo la linea assiale del filo. Il valore del campo sulla superficie del filo nell'approssimazione considerata non cambia in questo caso (esso non cambierebbe affatto per un filo retto di sezione circolare). Allora secondo la formula (30,14) abbiamo

$$\mathbf{A}\,|_{r=a} = \frac{J}{c}\oint \frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a}$$

ove R è la distanza tra l'elemento $d\mathbf{l}$ della linea assiale del filo e un punto della sua superficie. Dividiamo l'integrale in due parti in cui $R > \Delta$ e $R < \Delta$, rispettivamente, ove Δ è una lunghezza piccola rispetto alle dimensioni del contorno della corrente, ma grande rispetto al raggio a del filo [1]). Nell'integrale esteso al dominio $R > \Delta$ si può trascurare a e con R intendere semplicemente la distanza tra due punti del contorno descritto dalla corrente. L'integrale esteso al dominio $R < \Delta$ si può supporre diretto lungo la tangente a un punto del contorno. Indicando con $\mathbf{t}$ il vettore unitario in questa direzione, scriviamo

$$\int\limits_{R<\Delta} \frac{d\mathbf{l}}{R}\Big|_{r=a} \approx \mathbf{t}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dt}{\sqrt{a^2+l^2}} = 2\mathbf{t}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\Delta}{a} \approx 2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a}\,.$$

Questa espressione si può riscrivere di nuovo nella forma integrale

$$2\mathbf{t}\ln\frac{2\Delta}{a} \approx \int\limits_{\Delta>R>a/2} \frac{d\mathbf{l}}{R}$$

dove R si intende come in precedenza come la distanza tra i punti del contorno descritto dalla corrente. In tal modo sommando all'integrale esteso al dominio $R > \Delta$ otteniamo l'espressione

$$\mathbf{A}\,|_{r=a} = \frac{J}{c}\int\limits_{R>a/2} \frac{d\mathbf{l}}{R}$$

nella quale il parametro Δ è omesso come deve essere.

---

[1]) Un metodo analogo è stato applicato al problema 4 del § 2 per calcolare la capacità di un anello sottile.

Infine abbiamo

$$L_e = \iint\limits_{R>a/2} \frac{dl\,dl'}{R}. \tag{2}$$

Qui l'integrazione si effettua rispetto a tutte le coppie di punti del contorno separate da una distanza superiore ad $a/2$.

2. Trovare l'autoinduzione di un anello sottile (di raggio b) fatto di filo di sezione circolare (di raggio a).

Soluzione. L'espressione integranda nella formula (2) del problema 1 dipende unicamente dall'angolo centrale φ sul quale è poggiata la corda R della circonferenza dell'anello e, fra l'altro, $R = 2b$ sen $(\varphi/2)$ e $dl\,dl' = dl \cdot dl' \cos\varphi$. Perciò abbiamo

$$L_e = 2\int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos\varphi \cdot 2\pi b \cdot b\,d\varphi}{2b \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}} = 4\pi b\left[-\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{4} - 2\cos\frac{\varphi_0}{2}\right].$$

Il limite di integrazione inferiore è determinato da $2b$ sen $(\varphi_0/2) = a/2$ e di qui $\varphi_0 \approx a/2b$. Sostituendo questo valore e sommando a $L_i = \pi b \mu_i$ otteniamo con precisione richiesta

$$L = 4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a} - 2 + \frac{\mu_i}{4}\right).$$

In particolare, per $\mu_i = 1$

$$L = 4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{7}{4}\right).$$

3. Determinare l'allungamento di un filo anulare (con $\mu_i = 1$) sotto azione del campo magnetico della corrente passante attraverso il filo.

Soluzione. Gli sforzi interni agenti lungo l'asse del filo e perpendicolari ad esso sono definiti secondo la (33,16) mediante le espressioni

$$\pi a^2 \sigma_{\parallel} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial(2\pi b)}; \quad 2\pi a b \sigma_{\perp} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial a}.$$

Sostituendovi L del problema 2 otteniamo

$$\sigma_{\parallel} = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2}\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{3}{4}\right), \quad \sigma_{\perp} = -\frac{J^2}{a^2 c^2}.$$

Di qui l'allungamento relativo cercato dell'anello è

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E}(\sigma_{\parallel} - 2\sigma\sigma_{\perp}) = \frac{J^2}{\pi a^2 c^2 E}\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma\right)$$

(E è il modulo di Young, σ il coefficiente di Poisson del materiale di cui è fabbricato il filo; cfr. VII § 5).

4. Determinare l'autoinduzione dell'unità di lunghezza di un filo doppio fatto di due fili retti paralleli (con $\mu_i = 1$) di sezioni circolari (con raggi a e b) e con la distanza h tra i loro assi; attraverso questi fili passano correnti J uguali e opposti (fig. 19).

Soluzione. Il potenziale vettoriale del campo magnetico di ciascuna delle correnti è diretto lungo gli assi dei fili, perciò i potenziali vettoriali di ambedue i campi si sommano semplicemente in modo algebrico. Per il campo magne-

tico del filo *1* con la corrente $+J$ uniformemente distribuita abbiamo (in coordinate cilindriche)

$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - \frac{r^2}{a^2}\right) \quad \text{per} \quad r < a,$$

$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - 1 - 2\ln\frac{r}{a}\right) \quad \text{per} \quad r > a$$

ove C è una costante qualsiasi; sulla frontiera del filo A_z è continuo. Le formule analoghe per il filo *2* si ottengono sostituendo a con b e cambiando il segno di J. L'integrazione rispetto all'area della sezione del filo *1* nella formula (33,2) dà

$$\frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int\left\{\left(C - \frac{r_1^2}{a^2}\right) - \left(C - 1 - 2\ln\frac{r_2}{b}\right)\right\} df_1 =$$

$$= \frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left\{1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \ln\frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1\cos\varphi}{b^2}\right\} r_1\, d\varphi\, dr_1 =$$

$$= \frac{J^2}{2c^2}\left(\frac{1}{2} + 2\ln\frac{h}{b}\right).$$

L'integrazione rispetto alla sezione del filo *2* dà la stessa espressione con a al

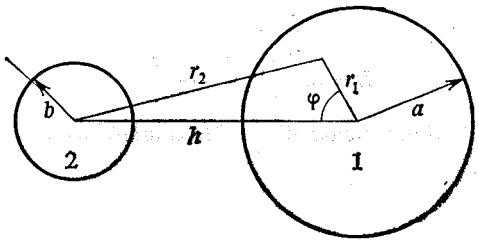


Fig. 19

posto di b. Perciò l'autoinduzione cercata per l'unità di lunghezza del filo doppio è

$$L = 1 + 2\ln\frac{h^2}{ab}.$$

5. Determinare l'autoinduzione del solenoide toroidale.

Soluzione. Consideriamo il solenoide come superficie conduttrice toroidale sulla quale circolano le correnti superficiali di densità

$$g = \frac{NJ}{2\pi r}$$

(N è il numero totale di spire del filo e J la corrente passante per esso; le coordinate e le dimensioni sono rappresentate nella fig. 20). Il campo magnetico all'esterno del solenoide è $H_e = 0$ e all'interno

$$H_{ir} = H_{iz} = 0, \quad H_{i\varphi} = \frac{2NJ}{cr}$$

(r, z, φ sono le coordinate cilindriche). Infatti, questa soluzione verifica le equazioni div $\mathbf{H} = 0$, rot $\mathbf{H} = 0$, e la condizione al contorno (34,2) [1]. L'energia del campo magnetico all'interno del solenoide è

$$\int \frac{H_i^2}{8\pi}\, dV = \frac{N^2 J^2}{c^2} \oint \frac{z\, dr}{r}\,;$$

si integra qui rispetto al contorno della sezione del toro e l'operazione si realizza facilmente introducendo l'angolo θ secondo $z = a \operatorname{sen} \theta$, $r = b + a \cos \theta$. In definitiva, per l'autoinduzione cercata otteniamo

$$L = 4\pi N^2 \left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

6. Trovare la correzione del primo ordine rispetto a l/h per la formula (34,3) esprimente l'autoinduzione del solenoide cilindrico (con $\mu_e = 1$) legata alla deformazione del campo in prossimità dei suoi estremi.

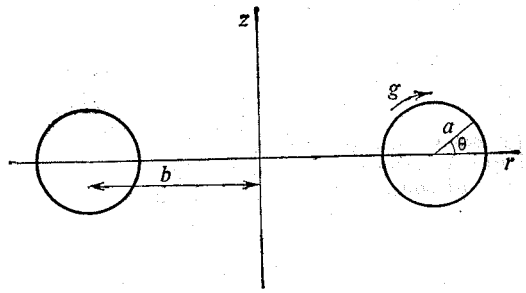


Fig. 20

Soluzione. L'autoinduzione del solenoide si calcola come integrale doppio esteso alla sua superficie:

$$L = \frac{1}{J^2} \int\int \frac{g_1 g_2}{R}\, df_1\, df_2$$

ove g è la densità superficiale di corrente ($g = nJ$). In coordinate cilindriche abbiamo

$$L = 2\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, dz_1\, dz_2}{\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + 4b^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= 8\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^\pi \frac{(h - \zeta) \cos\varphi\, d\varphi\, d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4b^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

[1]) Essa è valida anche per un solenoide anulare di sezione non circolare qualsiasi.

(φ è l'angolo tra due piani diagonali passanti per df_1 e df_2). Integrando rispetto a $d\zeta$, otteniamo per $h \gg b$

$$L \approx 8\pi b^2 n^2 \int_0^\pi \left[h \ln \frac{h}{b \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}} - h + 2b \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] \cos \varphi \, d\varphi$$

e infine

$$L = 4\pi^2 b^2 n^2 \left(h - \frac{8}{3\pi} b \right).$$

7. Stabilire di quante volte cambierà l'autoinduzione di un contorno lineare piano se collocarlo su una superficie piana di un mezzo semiinfinito di permeabilità magnetica μ_e. Trascurare la parte interna dell'autoinduzione del filo.

Soluzione. È evidente per simmetria che in assenza di mezzo il campo magnetico della corrente è simmetrico rispetto al piano del contorno, e le linee di forza magnetiche attraversano questo piano come normali ad esso; indichiamo con $\mathbf{H}_0$ questo campo. Ponendo $\mathbf{H} = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} \mathbf{H}_0$ nel semispazio vuoto e $\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} = \frac{2\mu_e}{\mu_e + 1} \mathbf{H}_0$ nel mezzo, possiamo verificare così le equazioni del campo e le condizioni al contorno sulla superficie di un mezzo semiinfinito. Infatti, con ciò è garantita la continuità di B_n e $\mathbf{H}_t$ nel piano di frontiera e la circuitazione $\mathbf{H}$ lungo la qualsiasi linea di forza sarà uguale alla circuitazione $\mathbf{H}_0$ lungo la stessa linea. Di qui è facile concludere che introducendo un mezzo l'energia totale del campo e, di conseguenza, l'autoinduzione del contorno si moltiplica per

$$\frac{2\mu_e}{\mu_e + 1}.$$

§ 35. *Forze in un campo magnetico*

Per trovare forze agenti sulla sostanza in un campo magnetico quasi non avremo bisogno di fare nuovi calcoli per la completa analogia con il caso elettrico. Questa analogia è dovuta soprattutto al fatto che le espressioni per le grandezze termodinamiche nel campo magnetico differiscono dalle espressioni nel campo elettrico per la sola sostituzione delle lettere $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ con $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, rispettivamente. Nel calcolare il tensore degli sforzi al § 15 abbiamo usato la potenzialità del campo elettrico come effetto dell'equazione rot $\mathbf{E} = 0$. Il campo magnetico, invece, verifica l'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \tag{35,1}$$

che si riduce a rot $\mathbf{H} = 0$ soltanto se non esistono correnti di conduzione. Però per il calcolo del tensore degli sforzi, in generale, si deve porre sempre $\mathbf{j} = 0$. Poiché $\mathbf{j}$ è legata alle derivate del campo magnetico, allora se tenessimo conto delle correnti nel calcolare gli sforzi ciò significherebbe l'introduzione nel tensore degli sforzi

σ_{ik} di piccole correzioni scomparenti dovute alla non omogeneità del campo (cfr. la nota alla pag. 96).

In tal modo, tutte le formule ottenute ai §§ 15 e 16 per il tensore degli sforzi si estendono direttamente al campo magnetico. Così, in un mezzo liquido per il legame lineare $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ abbiamo

$$\sigma_{ik} = -P_0(\rho, T)\,\delta_{ik} - \frac{H^2}{8\pi}\left[\mu - \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\mu H_i H_k}{4\pi}. \qquad (35,2)$$

Di qui le forze di volume si calcolano in accordo con $f_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$. Se il mezzo è conduttore e attraversato da una corrente, il calcolo differisce da quello al § 15 per il solo fatto che al posto dell'equazione rot $\mathbf{H} = 0$ abbiamo l'equazione (35,1).

Derivando la (35,2) e tenendo conto dell'eguaglianza div $\mathbf{B} =$ $=$ div $(\mu\mathbf{H}) = 0$ troviamo

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{1}{8\pi}\nabla\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu - \frac{\mu}{8\pi}\nabla H^2 + \frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H}.$$

Ma, in accordo con una nota formula dell'analisi vettoriale,

$$(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} H^2 - [\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}] = \frac{1}{2}\operatorname{grad} H^2 + \frac{4\pi}{c}[\mathbf{jH}]$$

e, infine,

$$\mathbf{f} = -\nabla P_0 + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right] - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \frac{\mu}{c}[\mathbf{jH}]. \qquad (35,3)$$

Rispetto alla formula analoga (15,12) qui abbiamo associato un altro termine (ultimo). Sarebbe erroneo pensare, tuttavia, che la comparsa di questo termine significhi la possibilità fisica di separare in $\mathbf{f}$ da altri effetti la forza legata alla corrente di conduzione. In virtù dell'equazione (35,1) la corrente $\mathbf{j}$ è infatti inseparabile dalla non omogeneità del campo e le derivate del campo rispetto alle coordinate entrano anche negli altri termini dell'espressione (35,3). Per una permeabilità magnetica della sostanza sensibilmente differente da 1 tutti i termini della (35,3), in generale, sono dello stesso ordine di grandezza.

Ma se, come ciò di solito si verifica, μ è vicina a 1, allora in presenza della corrente di conduzione l'ultimo termine della (35,3) dà il contributo fondamentale nella forza rispetto al quale gli altri termini non sono altro che piccola correzione inessenziale. In questo caso, nel calcolare le forze si può porre $\mu = 1$ e si ottiene semplicemente

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] \qquad (35,4)$$

(qui e più avanti il termine $-\nabla P_0$ non presenta interesse e perciò è omesso). Per $\mu = 1$ le proprietà della sostanza non incidono in

nessun modo sui fenomeni magnetici e l'espressione (35,4) per la forza si riferisce in misura uguale sia ai conduttori liquidi che solidi. La forza totale agente sul conduttore con corrente nel campo magnetico è data dall'integrale

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{jH}]\, dV. \tag{35,5}$$

È ovvio che la formula (35,4) si può ottenere molto semplicemente direttamente sulla base di una nota espressione per la forza di Lorentz. La forza macroscopica agente nel campo magnetico su un corpo immobile non rappresenta altro che la media delle forze di Lorentz agenti sulle particelle cariche che costituiscono il corpo da parte del campo microscopico **h**:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \overline{[\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{h}]}.$$

Ma per $\mu = 1$ il campo **h** coincide con il campo medio **H** e il valore medio $\rho\mathbf{v}$ coincide con la densità di corrente di conducibilità.

Se il conduttore è animato da un moto le forze (35,4) compiono su di esso un lavoro meccanico. A primo sguardo potrebbe sembrare che ciò contraddica al fatto che le forze di Lorentz non compiono nessun lavoro sulle cariche in moto. In realtà non esiste nessuna contraddizione poiché nel conduttore animato da un moto il lavoro delle forze di Lorentz include in sé non soltanto il lavoro meccanico ma anche quello delle forze elettromotrici indotte nel conduttore dal suo moto. Questi due lavori sono uguali per grandezza e di segno opposto (cfr. la nota alla pag. 321).

Nell'espressione (35,4) **H** è il valore autentico del campo magnetico creato sia da sorgenti estranee che dalle correnti stesse sulle quali agisce questa forza. Tuttavia, nel calcolare la forza totale mediante la formula (35,5) con **H** si può intendere soltanto il campo esterno $\mathfrak{H}$ nel quale è collocato il conduttore con la corrente. Il campo proprio generato dal conduttore in esame, in virtù della legge di conservazione dell'impulso, non può dare contributo nella forza totale agente su esso stesso.

Il calcolo delle forze è particolarmente semplice per il conduttore lineare. Le proprietà magnetiche della sua sostanza sono in generale inessenziali, e se nel mezzo $\mu = 1$ la forza totale agente sul conduttore è data dall'integrale lineare

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{l} \cdot \mathfrak{H}]. \tag{35,6}$$

Questa espressione si può rappresentare nella forma di integrale esteso alla superficie delimitata dal contorno della corrente. Sosti-

tuendo secondo il teorema di Stokes $d\mathbf{l}$ con l'operatore $[d\mathbf{f}\cdot\nabla]$ otteniamo

$$\oint [d\mathbf{l}\cdot\mathfrak{H}] = \int [[d\mathbf{f}\cdot\nabla]\,\mathfrak{H}].$$

In seguito scriviamo

$$[[d\mathbf{f}\cdot\nabla]\,\mathfrak{H}] = -d\mathbf{f}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{H} + \nabla\,(d\mathbf{f}\cdot\mathfrak{H}) = -d\mathbf{f}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{H} + \\ + [d\mathbf{f}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}] + (d\mathbf{f}\nabla)\,\mathfrak{H}.$$

Ma div $\mathfrak{H} = 0$, e nello spazio esterno alle correnti anche rot $\mathfrak{H} = 0$. Quindi,

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c}\int (d\mathbf{f}\nabla)\,\mathfrak{H}. \qquad (35,7)$$

In particolare, in un campo esterno quasi omogeneo si può portare fuori dal segno di integrale $\mathfrak{H}$ insieme con l'operatore ∇. Introducendo anche il momento magnetico della corrente in accordo con la formula (30,18) otteniamo così il risultato naturale seguente:

$$\mathbf{F} = (\mathcal{M}\nabla)\,\mathfrak{H}. \qquad (35,8)$$

Poiché $\mathcal{M}$ in questa formula è una grandezza costante, si può scrivere $\mathbf{F}$ anche nella forma

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,(\mathcal{M}\mathfrak{H}) \qquad (35,9)$$

(ciò che è in accordo con l'espressione (33,17) per l'energia della corrente). Quanto al momento delle forze agenti sulla corrente in un campo quasi omogeneo, come è facile provare, esso è uguale all'espressione ordinaria

$$\mathbf{K} = [\mathcal{M}\mathfrak{H}]. \qquad (35,10)$$

Problema

Trovare la forza agente su un filo retto lineare di corrente J collocato parallelamente a un cilindro circolare infinito (di permeabilità magnetica μ) di raggio a a distanza b dal suo asse.

Soluzione. In virtù della corrispondenza indicata alla pag. 167 tra problemi piani elettro- e magnetostatici, il campo della corrente è definibile mediante il cambiamento delle notazioni nella soluzione del problema 3 al § 7. Il campo nello spazio attorno al cilindro coincide con il campo che sarebbe generato nel vuoto dalla corrente J e dalle correnti $+J'$ e $-J'$ passanti per i punti A e O', rispettivamente (cfr. fig. 12), inoltre

$$J' = J\,\frac{\mu-1}{\mu+1}.$$

Il campo all'interno del cilindro, invece, coincide con quello che sarebbe creato dalla corrente

$$J'' = J\,\frac{2}{\mu+1}$$

passante per il punto O. La forza agente sull'unità di lunghezza del conduttore è

$$F=\frac{1}{c}JB=\frac{2JJ'}{c^2}\left(\frac{1}{OA}-\frac{1}{OO'}\right)=\frac{2J^2a^2(\mu-1)}{b(b^2-a^2)(\mu+1)c^2}.$$

Analogamente troviamo (cfr. problema 4 del § 7) che il conduttore lineare passante all'interno del foro cilindrico nel mezzo magnetico è attratto alla parte più vicina della superficie del foro con la forza

$$F=\frac{2J^2b(\mu-1)}{(a^2-b^2)(\mu+1)c^2}.$$

§ 36. *Fenomeni giromagnetici*

Una rotazione uniforme di un corpo (non avente struttura magnetica) ne implica la magnetizzazione linearmente dipendente dalla velocità angolare $\mathbf{\Omega}$ (*effetto Barnett*). Dal punto di vista fenomenologico il legame lineare tra il momento magnetico del corpo $\mathcal{M}$ e il vettore $\mathbf{\Omega}$ è possibile in quanto tutti e due cambiano di segno per inversione del tempo. Poiché essi sono vettori assiali questa dipendenza è possibile anche in un corpo isotropo (dove essa si riduce alla semplice proporzionalità tra $\mathcal{M}$ e $\mathbf{\Omega}$).

Accanto a questo effetto deve esistere anche l'inverso: un corpo sospeso liberamente per magnetizzazione comincia a ruotare (*effetto Einstein-De Haas*). Tra ambedue gli effetti esiste un legame termodinamico semplice che si può ottenere nel seguente modo.

Come è noto (cfr. V § 26), da potenziale termodinamico rispetto alla velocità angolare (con temperatura e volume del corpo assegnati) funge l'energia libera $\tilde{\mathcal{F}}'$ del corpo in un sistema di coordinate che con esso ruota. In questo caso il momento d'impulso del corpo $\mathbf{L}$ vale

$$\mathbf{L}=-\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}'}{\partial\mathbf{\Omega}}. \tag{36,1}$$

I fenomeni giromagnetici si descrivono associando all'energia libera un'espressione complementare rappresentante il primo termine del suo sviluppo in potenze di $\mathbf{\Omega}$ e della magnetizzazione $\mathbf{M}$ in ogni punto del corpo contenente contemporaneamente $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{M}$. Questo termine è lineare rispetto a $\mathbf{\Omega}$ e rispetto a $\mathbf{M}$, cioè ha la forma

$$\tilde{\mathcal{F}}'_{\mathrm{g.m}}=-\int\lambda_{ik}\Omega_iM_k\,dV=-\lambda_{ik}\Omega_i\mathcal{M}_k \tag{36,2}$$

ove λ_{ik} è un tensore costante e asimmetrico nel caso generale.

In accordo con le formule (36,1) e (36,2) il momento d'impulso acquistato dal corpo per magnetizzazione è legato con il suo momento magnetico totale mediante la relazione

$$(L_{\mathrm{g.m}})_i=\lambda_{ik}\mathcal{M}_k.$$

Si suole usare al posto di λ_{ik} il tensore inverso definito così:

$$g_{ik} = \frac{2mc}{e} \lambda_{ik}^{-1}$$

(e e m sono la carica e la massa dell'elettrone); le grandezze adimensionali g_{ik} si chiamano *coefficienti giromagnetici*. Allora

$$\mathscr{M}_i = \frac{e}{2mc} g_{ik} (L_{\mathrm{g.m}})_k. \tag{36,3}$$

D'altra parte, l'espressione (36,2) mostra che la rotazione del corpo influisce sulle proprietà magnetiche in modo equivalente all'influsso del campo esterno di intensità $\mathfrak{H}_i = \lambda_{ki}\Omega_k$ ossia

$$\mathfrak{H}_i = \frac{2mc}{e} g_{ki}^{-1}\Omega_k. \tag{36,4}$$

Con ciò abbiamo la possibilità di principio di calcolare la magnetizzazione generata dalla rotazione. Quindi, se la suscettività magnetica del corpo χ_{ik} è piccola, il momento magnetico acquisito è indipendente dalla forma del corpo e vale

$$\mathscr{M}_i = \chi_{ik}\mathfrak{H}_k = \frac{2mc}{e} \chi_{ik} g_{lk}^{-1}\Omega_l.$$

Le formule (36,3) e (36,4) corrispondono agli effetti Einstein-de Haas e Barnett, rispettivamente. Si vede che ambedue gli effetti sono definiti dal medesimo tensore g_{ik}.

Capitolo V

FERROMAGNETISMO E ANTIFERROMAGNETISMO

§ 37. *Simmetria magnetica dei cristalli*

Tra le proprietà elettriche e magnetiche dei cristalli esiste profonda differenza legata al comportamento diverso delle cariche e delle correnti rispetto al cambiamento del segno del tempo.

Como è noto, in virtù dell'invarianza delle equazioni del moto rispetto al cambiamento del segno del tempo, la sostituzione formale di t con $-t$ applicata a uno stato d'equilibrio termodinamico del corpo deve condurre a uno stato che è anch'esso uno degli stati possibili di equilibrio. Ciò premesso, esistono due possibilità: gli stati passanti l'uno nell'altro per la sostituzione di t con $-t$ ora coincidono ora non coincidono.

In questo paragrafo indicheremo con $\rho\ (x, y, z)$ e con $\mathbf{j}\ (x, y, z)$ la densità autentica (microscopica) di cariche e la densità di correnti in ogni punto del cristallo la cui media è considerata soltanto rispetto al tempo (e non rispetto ai volumi « fisicamente infinitesimi », come si suole fare nella teoria macroscopica). Queste sono funzioni che definiscono le strutture elettrica e magnetica del cristallo, rispettivamente.

La sostituzione di t con $-t$ fa cambiare di segno $\mathbf{j}$. Se in seguito a questa trasformazione lo stato del corpo non cambia ciò vuol dire che $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, cioè che $\mathbf{j} = 0$. Quindi, esiste una ragione per cui possono esistere dei corpi con la funzione $\mathbf{j}\ (x, y, z)$ a rigore nulla. Assieme alla densità di corrente in questi corpi si annullano a rigore le medie (rispetto al tempo) del campo magnetico e dei momenti magnetici in ciascun punto del corpo (è ovvio che si tratta ovunque degli stati del corpo in assenza di campo magnetico esterno). Di questi corpi si può dire che essi non godono di nessuna *struttura magnetica*. Infatti, a questa categoria si riferisce la maggioranza dei corpi.

Quanto alla densità di cariche ρ, in generale, essa non cambia per la trasformazione $t \to -t$. Perciò non esiste nessuna ragione per cui questa funzione potrebbe annullarsi identicamente. In altre parole, non esistono cristalli che non avrebbero la « struttura elettrica ». In ciò consiste la differenza summenzionata tra le proprietà elettriche e magnetiche dei cristalli.

Consideriamo cristalli in cui la sostituzione di t con $-t$ fa cambiare lo stato e perciò $\mathbf{j} \neq 0$. Di questi corpi si dice che essi godono della struttura magnetica.

È da notare, prima di tutto, sebbene **j** non sia nulla, non può esistere nessuna corrente totale (nello stato d'equilibrio del corpo), vale a dire che l'integrale $\int \mathbf{j}\, dV$ calcolato rispetto al volume della cellula elementare sempre deve annullarsi [1]). In caso contrario questa corrente creerebbe campo magnetico macroscopico e il cristallo godrebbe di energia magnetica (per unità di volume) rapidamente crescente con aumento delle dimensioni del solido. Poiché questo stato è svantaggioso energeticamente, evidentemente, esso non può corrispondere all'equilibrio termodinamico.

Al tempo stesso le correnti **j** possono creare momento magnetico macroscopico diverso da zero, vale a dire che l'integrale $\int [\mathbf{rj}]\, dV$ (calcolato di nuovo rispetto al volume della cellula elementare) può essere diverso da zero. Rispettivamente, i corpi in cui $\mathbf{j} \neq 0$ si possono dividere in due tipi: corpi con momento magnetico macroscopico non nullo e corpi in cui questo momento non esiste. I primi si chiamano *ferromagneti* e i secondi *antiferromagneti*.

Sorge così la questione su tipi (gruppi) possibili di simmetria nella distribuzione delle correnti $\mathbf{j}(x, y, z)$. Questa simmetria è composta, soprattutto, da elementi ordinari, ossia da rotazioni, riflessioni e traslazioni; ciò premesso tra gruppi possibili di simmetria di **j** esistono comunque i 230 gruppi cristallografici spaziali ordinari. Ma ciò non esaurisce l'elenco di gruppi cercati. Come è stato già detto, la sostituzione di t con $-t$ fa cambiare di segno il vettore **j**. Quindi, compare un nuovo possibile elemento di simmetria, ossia la simmetria rispetto alla trasformazione per cui tutte le correnti cambiano la direzione per quella inversa; indichiamo questa trasformazione con il simbolo convenzionale R. Se la distribuzione di correnti gode dell'elemento di simmetria R di per sé, ciò vuol dire che $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, cioè che $\mathbf{j} = 0$, e il corpo in generale non gode di struttura magnetica. La funzione non nulla $\mathbf{j}(x, y, z)$, tuttavia, può godere della simmetria rispetto a combinazioni più disparate della trasformazione R con altri elementi di simmetria: rotazioni, riflessioni e traslazioni. In tal modo, il problema della ricerca di tipi possibili di simmetria nella distribuzione di correnti (*gruppi magnetici spaziali*) consiste nella costruzione di tutti i gruppi possibili composti sia delle trasformazioni esistenti nei gruppi spaziali ordinari, sia delle trasformazioni che si ottengono combinando le trasformazioni di tipo ordinario con la trasformazione R.

Se è data la simmetria della distribuzione di correnti con ciò sarà definita anche la simmetria cristallografica della disposizione di particelle nel cristallo in questione, coincidente con la simmetria

[1]) Sottolineiamo che si tratta della cellula elementare vera e propria che tiene conto della struttura magnetica del cristallo. Questa « cellula magnetica » può differire da quella cristallografica pura che tiene conto della sola simmetria nella distribuzione di cariche nel reticolo (cfr. più avanti § 38).

della funzione ρ (x, y, z). A determinarla sarà un gruppo spaziale che si ottiene dal gruppo di simmetria di $\mathbf{j}$ se la trasformazione R è supposta formalmente identica (quale essa è in applicazione alla funzione ρ).

La conoscenza del gruppo totale di simmetria della funzione $\mathbf{j}$ (x, y, z), tuttavia, non è necessaria se a presentare interesse sono le sole proprietà macroscopiche del corpo. Queste proprietà dipendono esclusivamente dalla direzione nel cristallo e non hanno a che vedere con la simmetria di traslazione del reticolo cristallino. Dal punto di vista strutturale cristallografico puro la « simmetria delle direzioni » nel cristallo è data, come è noto, dalle 32 classi cristalline. Queste sono gruppi di simmetria composti delle sole rotazioni e riflessioni pure; essi si ottengono dai gruppi spaziali se in questi ultimi supporre tutte le traslazioni come trasformazione identica e considerare assi elicoidali e piani di strisciamento come semplici assi e piani di simmetria. Dal punto di vista delle proprietà magnetiche, invece, la simmetria macroscopica deve essere classificata secondo gruppi che constano di rotazioni, riflessioni e di loro combinazioni con l'elemento R. Questi gruppi si possono chiamare *classi cristalline magnetiche*. Essi si trovano rispetto ai gruppi spaziali magnetici nello stesso rapporto che le classi cristalline ordinarie rispetto ai gruppi spaziali ordinari.

Al loro novero si riferiscono, soprattutto, 32 classi ordinarie completate dell'elemento R e le stesse 32 classi ma senza elemento R. Le prime classi sono, in particolare, gruppi di simmetria macroscopica di tutti i corpi che non godono della struttura magnetica. Ma di queste classi di simmetria possono godere anche corpi a struttura magnetica. A tale scopo è necessario che nel gruppo spaziale magnetico di simmetria di questi corpi l'elemento stesso R entri non come tale ma in combinazione con le traslazioni.

Inoltre, esistono 58 classi in quali l'elemento R entra soltanto in combinazione con rotazioni e riflessioni. Ciascuna di esse, se in essa l'operazione R è sostituita con trasformazione identica, si trasforma in una delle classi cristalline ordinarie.

Si deve notare che la comparsa della struttura magnetica (ferro- o antiferromagnetica) sempre è legata a un'interazione relativamente debole [1]). Perciò la struttura cristallografica di un corpo magnetico rappresenta una piccola deformazione rispetto alla struttura della fase non magnetica dalla quale la fase magnetica di solito compare al diminuire della temperatura. Sotto questo aspetto

[1]) Di solito l'interazione di scambio tra i momenti magnetici degli atomi porta alla saturazione dei legami di valenza e alla formazione delle strutture non magnetiche. Soltanto l'interazione di scambio relativamente debole degli elettroni d e f profondi degli atomi degli elementi dei gruppi di transizione del sistema periodico di Mendeleev porta alla formazione di una struttura magnetica.

i ferromagneti differiscono, in particolare, da corpi piroelettrici ordinari, ma sono analoghi ai corpi ferroelettrici.

Con l'assegnazione della classe cristallina magnetica si definisce il carattere di tutte le proprietà magnetiche macroscopiche dei corpi. La più importante di esse è l'esistenza o meno del momento magnetico macroscopico, cioè della magnetizzazione spontanea (senza campo esterno). Il momento magnetico **M** è una grandezza vettoriale che per rotazioni e riflessioni si comporta come vettore assiale (prodotto vettoriale di due vettori polari) e per applicazione dell'operazione R cambia di segno. Il cristallo possederà la magnetizzazione spontanea se in esso esiste almeno una direzione tale che il vettore **M** in essa con le proprietà suindicate resti invariante per tutte le trasformazioni della classe cristallina magnetica in esame.

Sottolineiamo di nuovo la distinzione dalle proprietà elettriche (macroscopiche questa volta). Il carattere di quest'ultime è definito completamente dalla classe cristallografica ordinaria. In particolare, affinché un corpo sia piroelettrico è sufficiente che la sua classe cristallina ammetta l'esistenza del vettore polare **P** (momento elettrico). Al tempo stesso sarebbe assolutamente sbagliato trarre conclusione sull'esistenza o meno del momento magnetico macroscopico sulla base del comportamento del vettore assiale **M** rispetto alle trasformazioni della classe cristallina strutturale del corpo considerato, corrispondente alla simmetria della funzione $\rho(x, y, z)$ (torneremo a questa questione nel prossimo paragrafo dopo la costruzione di fatto delle classi magnetiche).

Al posto della simmetria della funzione $\mathbf{j}(x, y, z)$ si può parlare della simmetria della distribuzione della densità microscopica del momento magnetico $\mathbf{M}(x, y, z) = [\mathbf{r}\mathbf{j}(x, y, z)]$. Quest'ultima, a sua volta, si può considerare come simmetria di disposizione e di orientazione dei momenti magnetici medi (rispetto al tempo) degli atomi (ioni) $\boldsymbol{\mu}$ nel reticolo cristallino. Questi valori medi sono nulli in un corpo senza simmetria magnetica. Nei ferromagneti la somma dei momenti atomici in ciascuna cella elementare è diversa da zero e negli antiferromagneti essa è nulla.

L'insieme di atomi nel reticolo cristallino che godono di valori $\boldsymbol{\mu}$ uguali si chiama *sottoreticolo magnetico*. Evidentemente, un antiferromagnete ha almeno due sottoreticoli con valori $\boldsymbol{\mu}$ mutuamente antiparalleli e uguali per grandezza. Se le direzioni dei momenti $\boldsymbol{\mu}$ di tutti i sottoreticoli sono paralleli o antiparalleli tale antiferromagnete si dice *collineare*; in caso contrario esso si chiama *non collineare*.

I ferromagneti anch'essi possono avere più sottoreticoli. Nel senso stretto con ferromagneti si intendono corpi in cui tutti i momenti magnetici atomici medi sono paralleli. Se un cristallo, invece, ha due o più sottoreticoli con momenti atomici non coincidenti per direzione (o per grandezza) esso si chiama *ferrimagnetico*; a differenza

degli antiferromagneti, la somma vettoriale **M** dei momenti magnetici nei sottoreticoli di questi corpi è diversa da zero. Un ferromagnetico può essere sia collineare (se i momenti magnetici di tutti i suoi sottoreticoli sono paralleli o antiparalleli) sia non collineare.

§ 38. Classi magnetiche e gruppi spaziali

Mostriamo come di fatto sono costruiti i gruppi magnetici di simmetria; cominciamo dalle classi magnetiche.

Come è stato detto al paragrafo precedente, le classi magnetiche si possono dividere in tre tipi. Al tipo I appartengono 32 classi cristalline ordinarie non contenenti affatto elemento R. Al tipo II appartengono le stesse 32 classi completate dell'elemento R. Ciascuna classe contiene tutti gli elementi della classe ordinaria (del gruppo puntuale $\boldsymbol{G}$) e tutti gli stessi elementi moltiplicati per R; indicando la classe magnetica con il simbolo $\boldsymbol{M}$ si può scrivere

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G} + R\boldsymbol{G} \tag{38,1}$$

(la trasformazione R, ovviamente, è commutativa con tutte le rotazioni spaziali e riflessioni; perciò $RG = GR$ ove G è elemento qualsiasi del gruppo $\boldsymbol{G}$).

Questi due tipi di classi sono in certo senso banali. Al tipo III non banale appartengono 58 classi magnetiche nelle quali l'elemento R entra soltanto in combinazioni con rotazioni e riflessioni. Ciascuna di queste classi, se l'operazione R in essa va sostituita con trasformazione identica, si trasforma in una delle classi cristalline ordinarie $\boldsymbol{G}$. La costruzione di tutte le classi magnetiche di questo tipo si realizza sulla base delle considerazioni seguenti.

Indichiamo con il simbolo $\boldsymbol{H}$ l'insieme di elementi del gruppo $\boldsymbol{G}$ che restano (nella costruzione della classe $\boldsymbol{M}$) non moltiplicati per R. Questo insieme, per definizione, contiene l'elemento unitario E (in caso contrario, $\boldsymbol{M}$ conterrebbe l'elemento R di per sé, cioè apparterrebbe al tipo II) e il prodotto di ogni coppia di suoi elementi dà elementi dello stesso insieme. In altre parole, **H** è sottogruppo del gruppo $\boldsymbol{G}$. Tutti gli altri elementi del gruppo $\boldsymbol{G}$ entrano in $\boldsymbol{M}$ moltiplicati per R; poiché $R^2 = E$, tutti i prodotti di coppie di questi elementi del gruppo sono elementi del gruppo $\boldsymbol{H}$. Ne segue che $\boldsymbol{H}$ è sottogruppo del gruppo $\boldsymbol{G}$ (e, quindi, del gruppo $\boldsymbol{M}$) dell'indice 2 [1]. In altre parole, la struttura della classe magnetica $\boldsymbol{M}$ del tipo III può essere rappresentata nella forma

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H} + R\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{H}, \tag{38,2}$$

[1]) Ciò significa che il sottogruppo $\boldsymbol{H}$ contiene metà di elementi del gruppo $\boldsymbol{G}$. Questa affermazione deriva dal teorema generale sufficientemente evidente: il sottogruppo $\boldsymbol{H}$ del gruppo $\boldsymbol{G}$ ha l'indice 2 se e soltanto se il prodotto di due elementi qualsiasi del gruppo $\boldsymbol{G}$ non appartenenti ad $\boldsymbol{H}$ è un elemento di $\boldsymbol{H}$.

ove G_1 è un elemento del gruppo G che non entra in H. È evidente che il gruppo M e il gruppo $G = H + G_1H$ sono isomorfi.

In tal modo, il problema della costruzione di tutte le classi magnetiche si riduce alla ricerca dei sottogruppi dell'indice 2 di tutte le classi cristalline. Questo problema, a sua volta, si risolve facilmente mediante tabelle dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi puntuali. Ciascuna rappresentazione non unitaria unidimensionale del gruppo contiene numero uguale di caratteri $+1$ e -1; gli elementi di carattere $+1$ costituiscono sottogruppo dell'indice 2. Al passare alla classe magnetica questi elementi restano invariabili mentre tutti gli altri vanno moltiplicati per R.

Illustriamo questo procedimento sull'esempio del gruppo puntuale C_{4v}. La tabella di caratteri delle sue rappresentazioni irriducibili (cfr. III § 95) è

	E	C_2	$2C_4$	$2\sigma_v$	$2\sigma_v'$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

Le rappresentazioni unidimensionali non unitarie sono: A_2, B_1, B_2. Nella rappresentazione A_2 gli elementi di caratteri $+1$ formano il sottogruppo C_4. La classe magnetica corrispondente, che indichiamo con il simbolo C_{4v} (C_4), consta di elementi

$$E,\ C_2,\ 2C_4,\ 2R\sigma_v,\ 2R\sigma_v'.$$

Nelle rappresentazioni B_1, B_2 gli elementi di caratteri $+1$ formano sottogruppi C_{2v} che differiscono soltanto per posizione dei piani σ_v rispetto a un sistema di coordinate fisso. Questi sottogruppi sono indistinguibili cristallograficamente e ad essi corrisponde la medesima classe magnetica C_{4v} (C_{2v}) con elementi

$$E,\ C_2,\ 2RC_4,\ 2\sigma_v,\ 2R\sigma_v'.$$

Considerando in questo modo tutte le 32 classi cristalline otteniamo 58 classi magnetiche del tipo III elencate nella tabella 1. Ciascuna classe G (H) è definita da un gruppo puntuale iniziale G e suo sottogruppo H, ossia da un sottogruppo tra parentesi dopo il simbolo del gruppo G. Le classi cristalline C_1, C_3, T non hanno sottogruppi con l'indice 2 e perciò non esistono classi magnetiche costruite sulla loro base. È da notare anche che la rotazione C_3 non entra

Tabella 1

Classi magnetiche

$C_i\,(C_1)$	$C_{3v}\,(C_3)$
$C_s\,(C_1)$	$D_3\,(C_3)$
$C_2\,(C_1)$	$D_{3d}\,(D_3,\ S_6,\ C_{3v})$
$C_{2h}\,(C_i,\ C_2,\ C_s)$	$C_{3h}\,(C_3)$
$C_{2v}\,(C_s,\ C_2)$	$C_6\,(C_3)$
$D_2\,(C_2)$	$D_{3h}\,(C_{3h},\ C_{3v},\ D_3)$
$D_{2h}\,(D_2,\ C_{2h},\ C_{2v})$	$C_{6h}\,(C_6,\ S_6,\ C_{3h})$
$C_4\,(C_2)$	$C_{6v}\,(C_6,\ C_{3v})$
$S_4\,(C_2)$	$D_6\,(C_6,\ D_3)$
$D_{2d}\,(S_4,\ D_2,\ C_{2v})$	$D_{6h}\,(D_6,\ C_{6h},\ C_{6v},\ D_{3d},\ D_{3h})$
$D_4\,(C_4,\ D_2)$	$T_h\,(T)$
$C_{4v}\,(C_4,\ C_{2v})$	$O\,(T)$
$C_{4h}\,(C_4,\ C_{2h},\ S_4)$	$T_d\,(T)$
$D_{4h}\,(D_4,\ C_{4h},\ D_{2h},\ C_{4v},\ D_{2d})$	$O_h\,(O,\ T_h,\ T_d)$
$S_6\,(C_3)$	

mai in una classe magnetica (non banale) moltiplicata per R; la rotazione C_3R dopo triplice ripetizione condurrebbe alla trasformazione R che non esiste nelle classi di questo tipo [1]).

È stato detto al paragrafo precedente che sulla base di una classe cristallina non si può giudicare sulla possibilità di esistenza del ferromagnetismo. A titolo di illustrazione consideriamo il reticolo tetragonale degli atomi con momenti magnetici diretti lungo l'asse tetragonale [2]). La sua classe cristallina magnetica è D_{4h} (D_4) contenente le trasformazioni [3])

$$E,\ C_2,\ 2C_4,\ 2U_2R,\ 2U_2'R,$$
$$I,\ \sigma_h,\ 2S_4,\ 2\sigma_vR,\ 2\sigma_v'R.$$

[1]) Nella teoria della simmetria astratta la simmetria magnetica è trattata come antisimmetria. L'idea di antisimmetria è stata proposta indipendentemente da *H. Heesch* (1929) e *A. V. Šubnikov* (1945). Le classi antisimmetriche sono state trovate da *Šubnikov* (1951) come gruppi di simmetria delle figure geometriche (poligoni) a facce dipinte in due colori: all'elemento R corrisponde l'operazione di cambiamento di colore delle facce. Come gruppi di simmetria magnetica queste classi sono state ottenute da *B. A. Tavger* e *V. M. Zajzev* (1956). La loro deduzione qui esposta appartiene a *V. L. Indenbom* (1959).

[2]) Tale è, per esempio, il reticolo della fase ferromagnetica del ferro. Dal punto di vista cristallografico esso rappresenta reticolo cubico debolmente deformato (lungo uno degli assi del quarto periodo). La deformazione è il risultato della magnetostrizione dovuta all'esistenza stessa della struttura magnetica.

[3]) Ovunque la notazione degli elementi di simmetria è quella usata nel III §§ 93, 94. In particolare, U_2, U_2' sono rotazioni di 180° attorno agli assi orizzontali perpendicolari all'asse del quarto ordine, σ_h riflessione nel piano orizzontale, σ_v, σ_v' riflessioni nei piani verticali passanti per gli assi C_4 e U_2, U_2'. I simboli U_2R, σR ecc. indicano piani e assi di simmetria che entrano nella classe considerata in combinazione con R.

Tutte queste trasformazioni lasciano invariante il vettore assiale **M** diretto lungo l'asse del quarto ordine. Fra l'altro, la classe cristallina D_{4h} di per sé non consentirebbe l'esistenza di vettore assiale: tutte le sue componenti M_x, M_y, M_z cambierebbero di segno, ad esempio, per rotazione attorno a questo o quello asse del secondo ordine.

Passiamo ora ai gruppi magnetici spaziali. Essi si trovano nella stessa relazione con i gruppi cristallini ordinari come le classi magnetiche rispetto a quelle cristalline: le prime si riducono a quest'ultime se la trasformazione R va sostituita con quella identica. In tutto esistono 1651 gruppi magnetici spaziali; come le classi magnetiche essi si dividono in tre tipi.

Al tipo I appartengono 230 gruppi coincidenti con quelli cristallografici e non contenenti affatto la trasformazione R, mentre al tipo II appartengono gli stessi 230 gruppi completati con l'elemento R.

Al tipo III non banale appartengono 1191 gruppi contenenti la trasformazione R soltanto in combinazione con qualche rotazione, riflessione o traslazione. Essi hanno la struttura (38,2), ove $\boldsymbol{H}$ è un sottogruppo con l'indice 2 del gruppo cristallino spaziale $\boldsymbol{G}$ e G_1 elemento di $\boldsymbol{G}$ che non entra in $\boldsymbol{H}$. Evidentemente, il sottogruppo $\boldsymbol{H}$ deve coincidere con il gruppo spaziale iniziale $\boldsymbol{G}$ ora per sua simmetria di traslazione ora per sua classe; nel primo caso esso ha di due volte meno elementi « rotativi » (rotazioni e riflessioni) che il gruppo $\boldsymbol{G}$, nel secondo caso di due volte meno traslazioni. Ciò premesso, il tipo III si può dividere anche in due sottotipi.

Al sottotipo IIIa si riferiscono gruppi magnetici spaziali per i quali G_1 dell'espressione (38,2) è una trasformazione « rotativa » del gruppo cristallino $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + G_1\boldsymbol{H}$, che non entra in H. La simmetria di traslazione (il reticolo di Bravais) del gruppo spaziale $\boldsymbol{M}$ di questo tipo coincide con la simmetria di traslazione del gruppo $\boldsymbol{G}$; in altre parole, la cella elementare della struttura magnetica coincide con la cella elementare puramente cristallografica. Questi gruppi magnetici spaziali (ne sono in totale i 674) si riferiscono alle classi magnetiche del tipo III.

Al sottotipo IIIb riferiamo i gruppi spaziali per i quali si può considerare al posto di G_1 nella (38,2) una traslazione vera e propria di uno dei periodi fondamentali del gruppo $\boldsymbol{G}$. La cella elementare della struttura magnetica è per volume il doppio della cella elementare cristallografica. L'insieme di traslazioni vere e proprie e di traslazioni moltiplicate per R forma il *reticolo magnetico di Bravais*; esistono 22 reticoli diversi di questo tipo. I gruppi magnetici spaziali del sottotipo IIIb (ne sono 517) si riferiscono alle classi magnetiche del tipo II [1]).

[1]) La costruzione di tutti i gruppi magnetici spaziali (come gruppi di antisimmetria) è stata realizzata da *A. M. Zamorzajev* (1953) e da *N. V. Belov*,

Problema

Elencare classi magnetiche che consentono il ferromagnetismo.

Soluzione. Le classi del tipo II non consentono ferromagnetismo. Sottolineiamo che, quindi, non consentono ferromagnetismo tutti i gruppi spaziali dei tipi II e IIIb contenenti in sé traslazioni moltiplicate per R (queste trasformazioni a priori fanno cambiare di segno **M**): in altre parole, affinché esista il ferromagnetismo è necessario in ogni caso che la cella elementare magnetica coincida con quella cristallografica [1]).

Tra le classi del tipo I (coincidenti con le classi cristallografiche ordinarie) sono le seguenti a consentire l'esistenza del vettore assiale **M**:

C_1, C_i — **M** in qualsiasi direzione,

C_s — **M** nel piano di simmetria,

C_2, C_{2h}, C_4, S_4, C_{4h}, C_3, C_6, S_6, C_{3h}, C_{6h} — **M** lungo l'asse di simmetria.

Affinché il ferromagnetismo esista nelle classi del tipo III è necessario in ogni caso che esse non contengano l'elemento IR che fa cambiare di segno il vettore **M** in qualsiasi sua direzione. Tra queste classi sono le seguenti a consentire l'esistenza del ferromagnetismo:

C_2 (C_1), C_{2h} (C_i) — **M** perpendicolare all'asse C_2R;
C_s (C_1) — **M** nel piano σR;
C_{2v} (C_s) — **M** nel piano $\sigma_v R$ perpendicolarmente all'asse C_2R;
D_2 (C_2), C_{2v} (C_2), D_{2h} (C_{2h}) — **M** lungo l'asse C_2;
D_4 (C_4), C_{4v} (C_4), D_{2d} (S_4), D_{4h} (C_{4h}), D_3 (C_3), C_{3v} (C_3);
D_{3d}(S_6), D_{3h} (C_{3h}), D_6 (C_6), C_{6v} (C_6), D_{6h} (C_{6h}) — **M** lungo l'asse C_4, C_3 o C_6.

§ 39. *Corpo ferromagnetico in prossimità del punto di Curie*

Tra le proprietà magnetiche dei ferromagneti e le proprietà elettriche dei corpi ferroelettrici esiste un'analogia che va lontano. Gli uni e gli altri in volumi macroscopici godono della polarizzazione spontanea: magnetica ed elettrica. La scomparsa di questa polarizzazione al variare della temperatura in ambedue i casi si effettua mediante la transizione di fase di seconda specie (il punto di transizione tra fasi ferro- e paramagnetica si chiama *punto di Curie*).

Al tempo stesso, tra fenomeni ferromagnetici ed elettrici esistono distinzioni notevoli legate al carattere differente delle forze d'interazione microscopiche che implicano la polarizzazione spontanea. Nei corpi ferroelettrici l'interazione delle molecole nel reticolo cristallino è sostanzialmente anisotropa per cui il vettore della polarizzazione spontanea è legato in modo relativamente forte a una determinata direzione nel cristallo.

N. N. Neronova, *T. S. Smirnova* (1955); per tabelle composte dagli ultimi autori si veda il libro: *Šubnikov A. V.*, *Belov N. V.* Coloured symmetry.— Pergamon Press, 1964. Per tabelle più complete dei gruppi magnetici spaziali e per loro proprietà si veda il libro (edizione russa): *Kopzik V. A.* Gruppi di Šubnikov. Edizione dell'Università di Mosca, 1966.

[1]) Ricordiamo di nuovo (cfr. la nota alla pag. 204) che si tratta della simmetria di un reticolo già deformato dall'esistenza stessa della struttura magnetica.

La comparsa della struttura magnetica, e anche diquella ferromagnetica, è dovuta soprattutto all'interazione di scambio degli atomi, in generale, indipendente dalla direzione del momento magnetico totale rispetto al reticolo [1]). È vero che accanto all'interazione di scambio esiste anche la diretta interazione magnetica tra i momenti magnetici atomici. Questa interazione, tuttavia, rappresenta l'effetto $\sim v^2/c^2$ (v sono le velocità atomiche) poiché i momenti magnetici stessi degli atomi contengono i fattori $1/c$. Alla stessa categoria appartiene l'interazione dei momenti magnetici atomici con il campo elettrico del reticolo cristallino. Tutte queste interazioni (che si possono chiamare *relativistiche* in quanto contengono il fattore $1/c^2$) sono deboli rispetto all'interazione di scambio e, di conseguenza, conducono soltanto a una dipendenza relativamente debole dell'energia del cristallo dalla direzione di magnetizzazione. Questa relazione tra l'interazione di scambio e relativistiche sarà supposta ovunque nel presente capitolo [2]).

Quindi, la magnetizzazione di un ferromagnete è una grandezza conservativa nella prima approssimazione, cioè rispetto all'interazione fondamentale (di scambio). Questa circostanza conferisce un significato fisico più profondo alla teoria termodinamica nella quale la magnetizzazione **M** è considerata come variabile indipendente il cui valore di fatto (quale funzione della temperatura, del campo ecc.) è definito in seguito da condizioni corrispondenti di equilibrio termico [3]).

---

[1]) L'interazione di scambio, come è noto, rappresenta effetto specificamente quantistico che compare in seguito a questa o quella simmetria delle funzioni d'onda del sistema di particelle rispetto alle loro permutazioni. La simmetria permutativa delle funzioni d'onda, e con essa l'interazione di scambio, dipende unicamente dallo spin totale del sistema, ma non dalla sua direzione (cfr. III § 60). Il ruolo dell'interazione di scambio nei ferromagnetici è stato rivelato originariamente da *J. I. Frenkel*, *J. G. Dorfman* e *W. Heisenberg* (1928).

[2]) L'ordine di grandezza del rapporto tra interazioni relativistiche e quella di scambio è caratterizzato dal rapporto U_{an}/NT_c, ove U_{an} è l'energia dell'anisotropia magnetica (si veda il paragrafo prossimo), N il numero di atomi in unità di volume, T_c la temperatura nel punto di Curie. Per i ferromagneti questo ordine di solito è 10^{-2}-10^{-5}. In alcuni ferromagneti (metalli di terre rare e loro combinazioni) questo rapporto può essere notevolmente più grande e assumere persino valori dell'ordine dell'uno sia a causa dell'energia dell'anisotropia « anomalmente » grande sia a causa della debolezza relativa delle interazioni di scambio. Le possibilità della teoria macroscopica in applicazione a questi magnetici sono, ovviamente, più limitate. Uno studio particolareggiato dei meccanismi microscopici di interazioni più disparate in magneti concreti supera i limiti del presente libro.

[3]) Per loro simmetria magnetica macroscopica e per loro comportamento in campi magnetici non troppo forti i ferrimagnetici collineari non si distinguono dai ferromagnetici nel senso stretto di questa parola (cfr. la fine del § 37). La teoria trattata più avanti si riferisce ad ambedue le categorie dei magnetici.

Indichiamo con Φ (**M**, **H**) il potenziale termodinamico dell'unità di volume della sostanza, supposto come funzione della variabile indipendente **M** (accanto ad altre variabili termodinamiche). Per il momento trascuriamo interazioni relativistiche, tenendo conto cioè dell'interazione di scambio fondamentale. Allora Φ (**M**, 0) può essere funzione soltanto di una grandezza assoluta e non della direzione del vettore **M**.

Per trovare grandezze termodinamiche quando il campo **H** è non nullo, procediamo allo stesso modo che nella deduzione della formula (19,3): partiamo dalla relazione $\partial\tilde{\Phi}/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{B}/4\pi$ e troviamo

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{M}, \mathbf{H}) = \Phi(M, 0) - \mathbf{MH} - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{39,1}$$

Di qui per il potenziale Φ ricaviamo

$$\Phi(\mathbf{M}, \mathbf{B}) = \tilde{\Phi} + \frac{\mathbf{HB}}{4\pi} = \Phi(M, 0) + \frac{H^2}{8\pi} = \Phi(M, 0) + \\ + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2. \tag{39,2}$$

Se l'anisotropia magnetica del ferromagnete va trascurata le direzioni dei vettori **M** e **H**, ovviamente, coincidono; perciò nelle formule (39,1-2) si può scrivere al posto dei vettori i loro valori assoluti.

In prossimità del punto di Curie la magnetizzazione **M** è piccola. Consideriamo le proprietà del ferromagnete in questo intorno nei limiti della teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie di Landau [1]). In accordo con questa teoria, sviluppiamo Φ (M, 0) in serie di potenze del vettore **M** che funge da parametro d'ordine. Lo sviluppo di una funzione isotropa in potenze di una grandezza vettoriale non può contenere che termini di potenze pari:

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + AM^2 + BM^4 - MH - \frac{H^2}{8\pi}, \tag{39,3}$$

ove Φ_0, A, B sono funzioni delle sole temperatura e pressione [2]).

Il punto di Curie $T = T_c(P)$ è definito dall'annullamento del coefficiente A; inoltre, $A > 0$ per $T > T_c$ e $A < 0$ per $T < T_c$ (questa disposizione termica delle fasi ha luogo in tutti i ferromagneti noti sebbene non sia necessaria termodinamicamente). In prossimità del punto di Curie abbiamo

$$A = a(T - T_c), \tag{39,4}$$

[1]) Le proprietà dei ferromagneti nel dominio di fluttuazione in prossimità del punto di Curie saranno trattate al § 47.

[2]) Ciò che lo sviluppo contiene termini delle sole potenze pari rispetto alle componenti del vettore **M** ha un'altra ragione, più profonda, non dovuta all'approssimazione di scambio: la grandezza **M** è dispari rispetto all'inversione del tempo, mentre il potenziale termodinamico deve essere invariante, ovviamente, rispetto a questa trasformazione.

ove $a > 0$ è una costante indipendente dalla temperatura. L'espressioni (39,3-4) differiscono dalla (19,3) per solo significato delle grandezze: M e H al posto P_z e E_z, rispettivamente. Perciò diamo le seguenti conclusioni dalle (39,3-4) senza ripetere tutte le considerazioni del § 19.

La magnetizzazione spontanea nella fase ferromagnetica varia con la temperatura secondo la legge

$$M = \sqrt{\frac{a}{2B}(T_c - T)}\,. \tag{39,5}$$

Sopra il punto di Curie la magnetizzazione spontanea non esiste e la suscettività magnetica vale

$$\chi = \frac{1}{2a\,(T - T_c)} \tag{39,6}$$

vale a dire che si verifica il paramagnetismo con suscettività inversamente proporzionale a $T - T_c$ (*legge di Curie-Weiss*). Sotto il punto di Curie abbiamo

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_{H \to 0} = \frac{1}{4a\,(T_c - T)}\,. \tag{39,7}$$

Ricordiamo, tuttavia, che questa grandezza non rappresenta qui suscettività nel senso usuale della parola (cioè coefficiente di proporzionalità tra M e H) poiché $M \neq 0$ anche per $H = 0$.

Infatti, la suscettività (39,7) può assumere valori dell'ordine di 1 soltanto in prossimità immediata del punto di Curie. A prescindere da questo intorno possiamo supporre che la magnetizzazione M cambi assai debolmente sotto influsso del campo magnetico e possa essere considerata per una data temperatura come grandezza costante, ciò che sarà supposto ai paragrafi che seguono.

Sotto questo aspetto esiste una differenza tra corpi ferromagnetici e ferroelettrici nei quali $\partial P/\partial E$, in generale, non è piccolo anche lontano dal punto di Curie. La ragione risiede di nuovo nella piccolezza dei momenti magnetici atomici rispetto ai momenti di dipolo elettrici delle molecole.

È stato notato al § 19 che l'applicazione del campo elettrico smussa il punto discreto della transizione di fase di seconda specie nei ferroelettrici. Lo stesso si verifica, ovviamente, con i ferromagneti nel campo magnetico. Poiché nell'approssimazione di scambio le direzioni di **M** e **H** coincidono, in questa approssimazione lo smussamento della transizione si verifica qualunque sia la direzione cristallografica **H**.

§ 40. *Energia di anisotropia magnetica*

Come è stato già detto, l'anisotropia delle proprietà magnetiche di un ferromagnete è legata all'interazione relativistica debole tra i suoi atomi. Nella teoria macroscopica questa anisotropia è descrivibile mediante l'introduzione nel potenziale termodinamico di termini corrispondenti, ossia dell'*energia di anisotropia magnetica* dipendente dalla direzione della magnetizzazione.

Il calcolo dell'energia dell'anisotropia sulla base della teoria microscopica chiederebbe che sia applicata la teoria quantomeccanica delle perturbazioni nella quale da energia perturbatrice fungono termini nell'operatore di Hamilton del cristallo, che descrivono interazioni relativistiche. Ma la forma generale delle espressioni cercate può essere stabilita senza questi calcoli sulla base di semplici considerazioni di simmetria.

L'operatore di Hamilton delle interazioni relativistiche contiene termini della prima e seconda potenza rispetto agli operatori dei vettori di spin degli elettroni (interazioni spin-orbitale e spin-spin). La piccolezza degli uni e degli altri è determinata dal rapporto v^2/c^2, ove v è l'ordine di grandezza delle velocità degli elettroni atomici e c la velocità della luce. La serie della teoria delle perturbazioni per l'energia dell'anisotropia è lo sviluppo rispetto a questa piccolezza, ma a causa della dipendenza indicata dell'operatore di perturbazione dagli operatori di spin l'energia dell'anisotropia si ottiene automaticamente sotto forma di serie di potenze dei coseni direttori del vettore di magnetizzazione, cioè delle componenti del vettore **m** nella direzione **M**. D'altra parte, l'energia di anisotropia U_{an}, così come il potenziale stesso Φ (cfr. la nota alla pag. 208), è invariante rispetto all'inversione del tempo, mentre la magnetizzazione **M** per questa trasformazione cambia di segno. Ne segue che l'energia dell'anisotropia deve essere funzione pari delle componenti di **m**.

Per i cristalli uni- e biassici lo sviluppo dell'energia di anisotropia comincia dai termini della seconda potenza rispetto alle componenti di **m**. Rappresentiamo questi termini nella forma

$$U_{an} = K_{ik} m_i m_k \tag{40,1}$$

ove K_{ik} è tensore simmetrico di secondo ordine le cui componenti (così come l'energia stessa U_{an}) hanno dimensione della densità di energia. Nei cristalli uni- e biassici questo tensore ha due e tre componenti indipendenti, rispettivamente. Però nel caso in questione si deve anche tener conto che una combinazione quadratica, ossia $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$, è indipendente dalla direzione del vettore **m** e perciò va esclusa dall'energia dell'anisotropia. Di conseguenza, l'espressione (40,1) per i cristalli uni- e biassici contiene uno o due coefficienti indipendenti, rispettivamente.

Così, per i cristalli uniassici l'energia dell'anisotropia si può scrivere nella forma

$$U_{an} = K(m_x^2 + m_y^2) = K \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (40,2)$$

ossia nella forma equivalente [1])

$$U_{an} = -Km_z^2 = -K \cos^2 \theta$$

ove l'angolo θ è formato da **m** e l'asse z coincidente con l'asse principale di simmetria del cristallo. Se il coefficiente $K > 0$ (funzione della temperatura), l'energia dell'anisotropia è minima per magnetizzazione lungo l'asse z; questo asse sarà, come si suole dire, *direzione di magnetizzazione facile* e il ferromagnete si riferisce al tipo « *asse facile* ». Se, invece, $K < 0$, la direzione della magnetizzazione facile giace nel piano xy (piano di base del cristallo); questo ferromagnete si riferisce al tipo « *piano facile* » [2]). L'espressione (40,2) è isotropa nel piano xy. Questa isotropia, tuttavia, è violata nei termini di ordine superiore nello sviluppo di U_{an}, termini che sono a determinare (per $K < 0$) la direzione della magnetizzazione facile nel piano xy. La forma di questi termini dipende da un sistema cristallino concreto cui appartiene il cristallo considerato.

Per i cristalli tetragonali i termini del quarto ordine contengono due invarianti indipendenti: $(m_x^2 + m_y^2)^2$ e $m_x^2 m_y^2$ (gli assi x e y coincidono con due assi del secondo ordine nel piano di base). La seconda di queste invarianti implica l'anisotropia nel piano di base.

Nei cristalli esagonali l'energia di anisotropia contiene un solo termine del quarto ordine proporzionale a $(m_x^2 + m_y^2)^2$; in questa approssimazione l'energia di anisotropia si scrive così:

$$U_{an} = K_1 \operatorname{sen}^2 \theta + K_2 \operatorname{sen}^4 \theta \qquad (40,3)$$

(il coefficiente K della (40,2) è indicato qui con K_1). L'anisotropia nel piano di base, tuttavia, compare soltanto in termini del sesto ordine; l'invariante anisotropa di questo ordine è

$$1/2\,[(m_x + im_y)^6 + (m_x - im_y)^6] = \operatorname{sen}^4 \theta \cos 6\varphi \qquad (40,4)$$

(l'asse x coincide con uno degli assi del secondo ordine nel piano di base; a partire da esso si calcola l'angolo azimutale φ).

[1]) Queste due espressioni differiscono l'una dall'altra per grandezza K indipendente dalla direzione. Il passaggio dall'una all'altra significa inclusione di questa grandezza nella parte isotropa di Φ; in particolare, cambia il coefficiente A nello sviluppo (39,3).

[2]) Di esempio di ferromagnete uniassico serve il cobalto esagonale nel quale K cambia di segno a temperatura $\sim$530 K, fra l'altro, $K > 0$ e $K < 0$ sono sotto e sopra questa temperatura, rispettivamente. Il valore di K estrapolato verso 0 è $K \approx 0{,}8 \cdot 10^7$ erg/cm^3. Il valore $NT_c \sim 2 \cdot 10^{10}$ erg/cm^3.

Infine, la simmetria romboedrica ammette due termini del quarto ordine di invarianti

$$(m_x^2 + m_y^2)^2 = \text{sen}^4\,\theta, \tag{40,5}$$

$$1/2m_z\,[(m_x + im_y)^3 + (m_x - im_y)^3] = \cos\theta\,\text{sen}^3\,\theta\,\cos 3\varphi \tag{40,6}$$

(l'asse y è diretto lungo uno degli assi del secondo ordine e l'angolo φ si calcola a partire dall'asse x). Il fattore m_z nella seconda grandezza invariante fa sì che la direzione della magnetizzazione facile esca dal piano di base verso un piccolo angolo; essendo m_z esiguo, la determinazione della direzione della magnetizzazione facile chiederebbe di tener conto contemporaneamente dei termini sia del quarto che del sesto ordine (tra i quali c'è un termine con la grandezza invariante (40,4)).

Passiamo ai cristalli ferromagnetici del sistema cubico. Le loro proprietà differiscono notevolmente dalle proprietà dei cristalli uniassici (e biassici). Infatti, l'unica combinazione del secondo ordine, invariante rispetto alle trasformazioni della simmetria cubica, che si potrebbe comporre delle componenti del vettore **m** è il quadrato $\mathbf{m}^2 = 1$. Perciò il primo termine non scomparente nello sviluppo dell'energia dell'anisotropia nel cristallo cubico è un termine non del secondo ma del quarto ordine. Ciò premesso, gli effetti di anisotropia magnetica nei cristalli cubici, in generale, sono più deboli che nei cristalli uniassici e biassici.

La simmetria cubica ammette una sola grandezza invariante del quarto ordine dipendente dalla direzione **m**. L'energia dell'anisotropia del ferromagnete cubico può essere rappresentata nella forma

$$U_{an} = K\,(m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2) \tag{40,7}$$

ossia

$$U_{an} = -1/2K\,(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4);$$

l'equivalenza di entrambe le espressioni è evidente dal fatto che la loro differenza è una grandezza $K/2$ indipendente dalla direzione.

Per $K > 0$ (nel ferro, ad esempio) l'energia dell'anisotropia raggiunge minimi uguali di grandezza per tre disposizioni del vettore **m**, ossia parallelamente ai tre spigoli del cubo (gli assi x, y, z; le direzioni cristallografiche sono [100], [010], [001]). In tal modo, in questo caso il cristallo ha tre assi di magnetizzazione facile equivalenti.

Se, invece, $K < 0$ (nel nichel, ad esempio), l'energia dell'anisotropia è minima per $m_x^2 = m_y^2 = m_z^2 = 1/3$, cioè quando il vettore **m** è diretto lungo una delle quattro diagonali spaziali del cubo (le

direzioni cristallografiche [111], [$\bar{1}$11] ecc.), che sono in questo caso direzioni di magnetizzazione facile [1]).

Ad un'approssimazione successiva dopo la (40,7) nell'energia dell'anisotropia del cristallo cubico corrispondono termini del sesto ordine. Escludendo dal loro numero l'invariante $(\mathbf{m}^2)^3$ indipendente dalla direzione e un'espressione che differisce dalla (40,7) per il solo fattore $\mathbf{m}^2$ avremo una sola grandezza invariante con la quale si può intendere $m_x^2 m_y^2 m_z^2$. Allora

$$U_{an} = K_1 (m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2) + K_2 m_x^2 m_y^2 m_z^2. \qquad (40,8)$$

È da notare che un cristallo ferromagnetico cubico magnetizzato spontaneamente lungo uno dei suoi assi di magnetizzazione facile perde, a rigore, la simmetria cubica (per cui si verifica anche spostamento corrispondente degli atomi, cioè la deformazione del reticolo cristallino). Un cristallo magnetizzato lungo uno spigolo del cubo diventa debolmente tetragonale, e per magnetizzazione lungo la diagonale spaziale del cubo diventa romboedrico. Sotto questo aspetto i cristalli cubici differiscono dai cristalli uniassici con la direzione di magnetizzazione leggera lungo asse principale di simmetria; evidentemente, la magnetizzazione in questa direzione non cambia la simmetria del cristallo.

Sottolineiamo di nuovo che considerato in questo paragrafo lo sviluppo dell'energia dell'anisotropia di un ferromagnete in potenze delle componenti del vettore unitario $\mathbf{m}$ non rappresenta sviluppo rispetto alla magnetizzazione stessa $\mathbf{M}$ (la quale lontano dal punto di Curie non è per niente piccola), e la convergenza della serie ottenuta è dovuta unicamente alla debolezza delle interazioni relativistiche. Ma in prossimità del punto di Curie ove la grandezza $\mathbf{M}$ è piccola, esso diventa sviluppo rispetto a $\mathbf{M}$. Nei limiti della teoria di Landau da questa circostanza seguirebbe che in un cristallo uniassico il rapporto K/M^2 (K dalla formula (40,2)) deve tendere a un valore non nullo finito per $T \to T_c$. Per precisare questa proposizione, consideriamo a titolo di esempio la transizione dalla fase paramagnetica a quella ferromagnetica del tipo asse facile. Secondo le formule (39,3) e (40,2) i termini quadratici nello sviluppo del potenziale termodinamico in potenze delle componenti del vettore $\mathbf{M}$ hanno la forma

$$AM_z^2 + (A + K/M^2)(M_x^2 + M_y^2).$$

Il punto di transizione è definito dall'annullamento del coefficiente di M_z^2, mentre il coefficiente di $M_x^2 + M_y^2$ resta finito.

[1]) A titolo di esempio notiamo che per il ferro e il nichel il valore $1/3\ K$ (la differenza di U_{an} per direzioni di magnetizzazione più facile e più difficile) estrapolato verso 0 K costituisce all'incirca $2 \cdot 10^5$ erg/cm^3.

Analogamente in un ferromagnetico cubico dovrebbe tendere a un valore finito il rapporto K/M^4 (K della formula (40,7)).

Nel dominio di fluttuazione, però, il comportamento suindicato dei coefficienti dell'anisotropia in generale va violato.

§ 41. *Curva di magnetizzazione dei corpi ferromagnetici*

Consideriamo la relazione tra la magnetizzazione di un ferromagnete uniassico e il campo magnetico in esso; per fissare le idee, supponiamo che il ferromagnete appartenga al tipo « asse facile ». In questo caso, è più comodo riscrivere l'energia di anisotropia nella forma

$$U_{\text{an}} = \frac{\beta M^2}{2} \operatorname{sen}^2 \theta \tag{41,1}$$

introducendo il coefficiente adimensionale $\beta > 0$ (secondo la relazione $K = \beta M^2/2$) [1]).

Ricordiamo che il valore assoluto della magnetizzazione **M** riteniamo indipendente da **H**, cosicché si tratta soltanto delle rotazioni di questo vettore [2]). Dalle considerazioni di simmetria è evidente che il vettore **M** giace nel piano passante per l'asse z e la direzione **H** (in quanto nell'energia di anisotropia sono trascurati termini di ordine superiore, anisotropi nel piano xy); intendiamo con questo piano il piano xz. Il potenziale termodinamico tenendo conto dell'energia di anisotropia vale [3])

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0(M) + \frac{\beta}{2} M_x^2 - \mathbf{HM} - \frac{H^2}{8\pi} =$$

$$= \Phi_0(M) + \frac{\beta M^2}{2} \operatorname{sen}^2 \theta - M(H_x \operatorname{sen} \theta + H_z \cos \theta) - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{41,2}$$

La dipendenza di **M** da **H** è determinata dalla condizione di equilibrio $\partial\tilde{\Phi}/\partial\theta = 0$ da cui

$$\beta M \operatorname{sen} \theta \cos \theta = H_x \cos \theta - H_z \operatorname{sen} \theta. \tag{41,3}$$

---

[1]) Le considerazioni successive sono basate sull'espressione (41,1) per l'energia dell'anisotropia. Si deve notare, tuttavia, che lo sviluppo, il cui primo termine è questa espressione, in casi reali gode di solito di convergenza sufficientemente cattiva. Perciò una descrizione quantitativa soddisfacente dei fenomeni chiede che sia tenuto conto di un altro termine del prossimo (quarto) ordine.

[2]) Accanto al processo di rotazione del vettore **M** qui considerato nei ferriti in campi molto forti è possibile un altro processo: i momenti magnetici antiparalleli ruotano l'uno incontro all'altro diventando così paralleli. Ciò ha luogo, però, soltanto in campi «di scambio» $H \sim T_c/\mu$; per ferrite $FeO \cdot Fe_2O_3$ ($T_c \approx 580\,K$, $\mu \sim \mu_B$) questi campi $H \sim 10^7$ Oe.

[3]) Includendo U_{an} nel potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ con ciò supponiamo che le costanti anisotrope siano definite per sforzi elastici dati.

Rispetto all'incognita $\xi = \operatorname{sen}\theta$ questa espressione è equazione algebrica di quarto grado

$$(\beta M\xi - H_x)^2 (1 - \xi^2) = H_z^2\xi^2$$

con coefficienti non nulli delle potenze dispari di ξ. Questa equazione ha ora due ora quattro radici reali (e tutte esse < 1). Poiché tutte queste radici corrispondono ad estremi di una funzione $\widetilde{\Phi}(\theta)$, è chiaro che nel primo caso questa funzione ha un minimo e un massimo, e nel secondo caso due minimi e due massimi. In altre parole, nel primo caso a un valore del campo **H** corrisponde una direzione di magnetizzazione. Nel secondo caso, invece, per **H** assegnato sono possibili due direzioni di **M** delle quali una (corrispondente al più piccolo dei minimi di $\widetilde{\Phi}$) è termodinamicamente completamente stabile, mentre la seconda (corrispondente al più grande dei minimi di $\widetilde{\Phi}$) resta termodinamicamente metastabile.

Il primo e il secondo caso si verificano a seconda dei valori H_x e H_z. Per una variazione graduale di questi parametri un caso si trasforma nell'altro all'istante in cui uno dei massimi si fonde con uno dei minimi. In questo caso la curva $\widetilde{\Phi}(\theta)$ ha al posto di estremo il punto di flesso, vale a dire che con $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta$ si annulla anche la derivata seconda $\partial^2\widetilde{\Phi}/\partial\theta^2$. Riscrivendo l'equazione (41,3) nella forma

$$\frac{H_x}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{H_z}{\cos\theta} = \beta M$$

e derivandola ancora una volta rispetto a θ, otteniamo

$$\frac{H_x}{\operatorname{sen}^3\theta} = -\frac{H_z}{\cos^3\theta}.$$

Escludendo θ da queste due equazioni abbiamo

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \qquad (41,4)$$

Nel diagramma H_x, H_z l'equazione (41,4) definisce la curva chiusa (astroide) rappresentata nella fig. 21. Essa divide il piano H_xH_z in due parti delle quali in una è possibile e nell'altra impossibile l'esistenza di stati metastabili. Senza analisi complementare è evidente che il dominio in cui sono impossibili stati metastabili è quello esterno alla curva. Ciò è chiaro anche dal fatto che per $H \to \infty$ può essere l'unica direzione **M** lungo il campo **H**.

L'esistenza degli stati metastabili rende possibile l'*isteresi*, ossia un cambiamento irreversibile della magnetizzazione passante per questi stati al variare del campo magnetico esterno. Perciò la curva rappresentata nella fig. 21 rappresenta la frontiera assoluta

dell'isteresi; per valori del campo all'esterno di questa curva l'isteresi comunque è impossibile [1]).

Uno studio particolare chiedono gli stati in cui l'intensità **H** è perpendicolare all'asse di magnetizzazione facile ($H_x = H$, $H_z = 0$). Il potenziale termodinamico è

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{\beta M^2}{2} \operatorname{sen}^2 \theta - HM \operatorname{sen} \theta. \qquad (41,5)$$

Se $H > \beta M$, allora $\tilde{\Phi}$ ha un solo minimo per $\theta = \pi/2$, vale a dire che la magnetizzazione è diretta lungo il campo. Se, invece, $H < \beta M$, allora $\tilde{\Phi}$ ha un minimo per

$$M_x = M \operatorname{sen} \theta = H/\beta, \qquad (41,6)$$

cui corrispondono due posizioni possibili del vettore **M** (sotto gli angoli θ e $\pi - \theta$), simmetriche rispetto all'asse x. Quindi, in questo

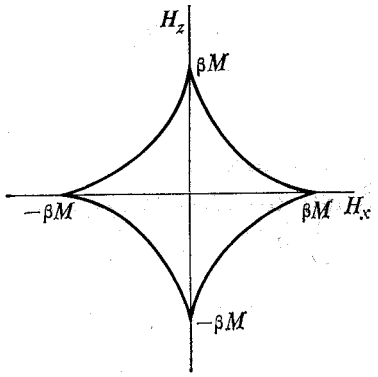


Fig. 21

caso esistono due stati d'equilibrio, fra l'altro, con valori uguali di $\tilde{\Phi}$ e perciò in misura uguale stabili.

Questa circostanza è di estrema importanza in quanto conduce alla possibilità dell'esistenza di due fasi in contatto in cui l'intensità **H** è uguale ma la magnetizzazione **M** (e perciò l'induzione **B**) diversa. Come risultato compare una possibilità nuova di diminuzione del potenziale termodinamico totale del corpo: il suo volume si può dividere in serie di domini separati in ciascuno dei quali la magnetiz-

[1]) In tutta l'esposizione del materiale nel presente capitolo siamo limitati alla considerazione dei soli stati termodinamicamente d'equilibrio dei ferromagnetici e, quindi, dei processi riversibili in essi. In particolare, non trattiamo per niente il meccanismo di fenomeni d'isteresi che possono essere legati a difetti del cristallo, sforzi interni nel campione, policristallizzazione e altre cause.

zazione ha una delle sue due direzioni possibili; questi domini si chiamano *domini di magnetizzazione spontanea*. In effetti la definizione di struttura d'equilibrio termodinamico dei ferromagneti richiede di studiare il solido nel suo insieme tenendo conto della sua concreta forma e dimensione; torneremo a questa questione al § 44.

Consideriamo un tratto di un corpo piccolo rispetto al suo volume totale ma grande rispetto alle dimensioni dei domini di magnetizzazione spontanea. L'intensità H_x si può supporre costante lungo tutto questo tratto; indichiamo con $\overline{\mathbf{M}}$ e $\overline{\mathbf{B}}$ le medie di $\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}$ rispetto al suo volume. Assieme a H_x è costante anche la componente trasversale $M_x = H_x/\beta$ della magnetizzazione. La componente longitudinale M_z in diversi domini differisce per segno, cosicché la sua media in ogni caso non è superiore a $|M_z|$. Tenendo conto che ovunque $H_z = 0$ troviamo la media dell'induzione

$$\overline{B}_x = H_x\left(1+\frac{4\pi}{\beta}\right), \quad \overline{B}_z < 4\pi\sqrt{M^2-\frac{H_x^2}{\beta^2}}. \qquad (41,7)$$

Queste formule determinano la regione dei valori dell'induzione media corrispondente alla struttura a domini dei ferromagneti uniassici.

Lo studio della dipendenza di $\mathbf{M}$ da $\mathbf{H}$ per un cristallo cubico può essere condotto in linea di massima analogamente alle considerazioni precedenti per i cristalli uniassici. Tuttavia, a causa di grande complicazione di equazioni corrispondenti la deduzione di formule analitiche esplicite è qui impossibile e non ci soffermiamo più su questa questione.

Problemi

1. Un cristallo ferromagnetico uniassico ha la forma dell'ellissoide di rotazione (in cui l'asse di magnetizzazione facile coincide con l'asse di rotazione) e si trova in un campo magnetico esterno $\mathfrak{H}$. Determinare la regione di valori di $\mathfrak{H}$ per quali il corpo godrà della struttura a domini.

Soluzione. Secondo le proprietà generali dei corpi ellissoidali nel campo esterno omogeneo (§ 8), le medie dell'induzione $\overline{\mathbf{B}}$ e dell'intensità $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ rispetto alla struttura a domini sono legate con $\mathfrak{H}$ mediante le relazioni

$$n\overline{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{H}_z, \quad \frac{1-n}{2}\overline{B}_x + \frac{1+n}{2}H_x = \mathfrak{H}_x,$$

ove n è il coefficiente di smagnetizzazione lungo l'asse principale dell'ellissoide (asse z). Ponendo $H_z = 0$ e usando le formule (41,7) otteniamo

$$H_x = \frac{\mathfrak{H}_x}{1+2\pi(1-n)/\beta}, \quad \overline{B}_z = \frac{\mathfrak{H}_z}{n} < 4\pi\sqrt{M^2-\frac{H_x^2}{\beta^2}}.$$

Escludendo di qui H_x troviamo la disuguaglianza cercata

$$\frac{\mathfrak{H}_z^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{H}_x^2}{[\beta+2\pi(1+n)]^2} < M^2,$$

che determina la regione dell'esistenza della struttura a domini.

2. Per un corpo policristallino in un campo magnetico forte ($H \gg 4\pi M$) determinare la media magnetizzazione rispetto a cristalliti a simmetria uniassica.

Soluzione. Supponiamo che nei limiti di un cristallito θ e ψ siano due angoli tra la direzione di magnetizzazione facile e i vettori **M** e **H**, rispettivamente. È evidente a priori che in un campo forte la direzione **M** sarà vicina alla direzione **H**, vale a dire che l'angolo $\vartheta = \theta - \psi$ è piccolo. Scrivendo $\mathbf{MH} = MH \times \times \cos(\theta - \psi)$ nella (41,2) ed uguagliando a zero $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta$ otteniamo

$$\vartheta \approx \operatorname{sen} \vartheta = -\frac{\beta M}{H} \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

La magnetizzazione media è diretta, evidentemente, lungo **H** e vale

$$\overline{M} = M\,\overline{\cos \vartheta} = M\left(1 - \frac{1}{2}\,\overline{\vartheta^2}\right) = M\left[1 - \frac{\beta^2 M^2}{2H^2}\,\overline{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}\right],$$

ove il trattino orizzontale significa la media rispetto ai cristalliti. Supponendo equiprobabili tutte le direzioni dell'asse di magnetizzazione leggera dei cristalliti otteniamo

$$\overline{M} = M\left(1 - \frac{\beta^2 M^2}{15H^2}\right).$$

In tal modo, la magnetizzazione media si avvicina alla saturazione secondo la legge $\overline{M} - M \backsim H^{-2}$.

3. Risolvere il problema 2 per i cristalliti a simmetria cubica.

Soluzione. Le condizioni di minimo dell'espressione

$$-\frac{\beta}{4}\left(M_x^4 + M_y^4 + M_z^4\right) - \left(H_x M_x + H_y M_y + H_z M_z\right)$$

(nella formula (40,7) abbiamo posto $K = \beta M^2/2$) sotto la condizione complementare $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 =$ costante sono

$$\beta M_x^3 + H_x = \lambda M_x, \quad \beta M_y^3 + H_y = \lambda M_y, \quad \beta M_z^3 + H_z = \lambda M_z,$$

ove λ è un fattore di Lagrange indefinito. Di qui ricaviamo per H grande

$$M_x \approx \frac{1}{\lambda} H_x + \frac{\beta}{\lambda^4} H_x^3 + \ldots,$$

e sommando i quadrati di queste uguaglianze troviamo che $M^2 \approx H^2/\lambda^2$, cioè $\lambda \approx H/M$. L'angolo ϑ tra **M** e **H** troviamo come

$$\vartheta^2 \approx \operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{[\mathbf{MH}]^2}{M^2 H^2} = \frac{\beta^2 M^6}{H^{10}} \sum H_x^2 H_y^2 \left(H_x^2 - H_y^2\right)^2,$$

ove la sommatoria è estesa alle permutazioni cicliche degli indici x, y, z. Il calcolo della media di questa espressione rispetto alle orientazioni dei cristalliti è equivalente alla media rispetto alle direzioni del vettore **H**. Quest'ultimo calcolo si effettua integrando rispetto agli angoli sferici che determinano la direzione **H** e come risultato si ottiene

$$\overline{M} = M\left(1 - \frac{1}{2}\,\overline{\vartheta^2}\right) = M\left(1 - \frac{2\beta^2 M^6}{105H^2}\right).$$

§ 42. *Magnetostrizione dei ferromagneti*

La variazione della magnetizzazione dei ferromagneti nel campo magnetico conduce alla loro deformazione (*magnetostrizione*). Questo fenomeno può essere legato sia all'interazione di scambio sia alle interazioni relativistiche nel corpo. Poiché l'energia di scambio dipende esclusivamente dal valore assoluto della magnetizzazione, quindi, anche la sua variazione può essere causata soltanto da cambiamento della grandezza M nel campo magnetico. Benché quest'ultimo, in generale, sia relativamente piccolo, ma l'energia di scambio stessa è grande rispetto a quella dell'anisotropia. Perciò gli effetti di magnetostrizione dovuti ai due tipi dell'interazione possono essere comparabili.

Questa situazione si verifica nei cristalli uniassici. Deformazioni sensibili al variare della direzione **M** hanno luogo nei campi $H \sim \beta M$, mentre il cambiamento della grandezza M diventa notevole nei campi $H \sim 4\pi M$. Se queste zone praticamente coincidono, allora nel considerare la magnetostrizione dei ferromagneti uniassici è necessario, in generale, tener conto di ambedue gli effetti insieme. Non ci soffermiamo qui sulla deduzione di formule corrispondenti molto complicate.

Nei cristalli cubici la situazione è diversa per relativa piccolezza dell'energia dell'anisotropia (quale grandezza del quarto ordine). Una magnetostrizione sensibile dovuta alla variazione della direzione **M** si verifica già in campi relativamente deboli in cui si può trascurare il cambiamento della grandezza assoluta M. Consideriamo questi effetti.

La variazione dell'energia delle interazioni relativistiche in un corpo deformato si descrive mediante l'introduzione nel potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ di termini addizionali *magnetoelastici* dipendenti dalle componenti del tensore degli sforzi elastici σ_{ik} e dalla direzione del vettore **M** (*N. S. Akulov*, 1928). I primi termini non scomparenti di questo genere sono lineari rispetto a σ_{ik} e quadratici rispetto ai coseni direttori del vettore **M** (quest'ultimo fatto è dovuto di nuovo alla simmetria rispetto all'inversione del tempo). Nel caso generale otteniamo così la seguente espressione per l'energia magnetoelastica:

$$U_{\mathrm{m.e}} = -a_{ik\,lm}\sigma_{ik}m_l m_m, \tag{42,1}$$

ove $a_{ik\,lm}$ è tensore adimensionale del quarto ordine, simmetrico rispetto alle coppie di indici ik e lm (ma non rispetto alla permutazione della coppia ik con la coppia lm). In prossimità del punto di Curie, ove lo sviluppo in potenze dei coseni direttori del vettore **M** è equivalente allo sviluppo in potenze delle sue componenti, le grandezze $a_{ik\,lm}/M^2$ tendono a limiti costanti.

Nel calcolare il numero di componenti indipendenti del tensore a_{iklm} si deve tener conto di nuovo che i termini nella (42,1) contenenti le componenti di **m** nella combinazione $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2$ sono indipendenti dalla direzione del vettore **m** e perciò possono essere esclusi dall'energia magnetoelastica [1]). Ciò premesso, troviamo che l'energia magnetoelastica dei cristalli cubici ha due coefficienti indipendenti e scriviamola nella forma

$$U_{\text{m.e}} = -a_1 (\sigma_{xx} m_x^2 + \sigma_{yy} m_y^2 + \sigma_{zz} m_z^2) - \\ -2a_2 (\sigma_{xy} m_x m_y + \sigma_{xz} m_x m_z + \sigma_{yz} m_y m_z). \qquad (42,2)$$

Il tensore di deformazione si ottiene derivando $\widetilde{\Phi}$ rispetto alle componenti corrispondenti del tensore σ_{ik}:

$$u_{ik} = -\partial\widetilde{\Phi}/\partial\sigma_{ik}$$

ove in $\widetilde{\Phi}$ bisogna includere (con segno opposto; cfr. la nota alla pag. 109) anche l'energia elastica ordinaria. Quest'ultima nei cristalli cubici contiene tre coefficienti elastici indipendenti e può essere rappresentata, ad esempio, nella forma

$$U_{\text{e}} = \frac{\mu_1}{2} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \\ + \frac{\mu_2}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 + \mu_3 (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2), \qquad (42,3)$$

ove μ_1, μ_2, μ_3 sono grandezze positive. Otteniamo la seguente espressione per il tensore di deformazione [2]):

$$u_{xx} = (\mu_1 + \mu_2)\, \sigma_{xx} + \mu_2 (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + a_1 m_x^2, \\ u_{xy} = \mu_3 \sigma_{xy} + a_2 m_x m_y \qquad (42,4)$$

e analogamente per le altre componenti.

Queste formule contengono in sé tutti gli effetti di magnetostrizione (nella regione dei campi considerata). In particolare, se non esistono sforzi interni le formule

$$u_{xx} = a_1 m_x^2, \quad u_{xy} = a_2 m_x m_y, \ \ldots \qquad (42,5)$$

definiscono il cambiamento della deformazione al variare della direzione della magnetizzazione. Ricordiamo che il valore assoluto della deformazione è convenzionale in un certo senso in quanto è convenzionale la direzione **m** nella quale la deformazione è supposta non esistente.

---

[1]) Qui esiste un arbitrio nella considerazione di a_{iklm} che non esprime altro che la direzione **m** è convenzionale (se non sono applicate forze meccaniche dall'esterno) in quanto il cristallo è supposto non deformato.

[2]) Nella derivazione di $\widetilde{\Phi}$ si deve tener conto della nota alla pag. 112.

Il tensore degli sforzi definito in seguito alla soluzione di un problema concreto (per un cristallo serrato, ad esempio) è per ordine di grandezza $\sigma \sim a/\mu$, ove a e μ sono gli ordini di grandezza dei coefficienti di a_{iklm} e dei coefficienti elastici, rispettivamente. In questo senso l'energia magnetoelastica (per unità di volume, come sempre) è una grandezza dell'ordine di a^2/μ. I coefficienti a sono grandezze del primo ordine nell'interazione relativistica spin-spin, cosicché l'energia magnetoelastica in essa è una grandezza del secondo ordine. In un cristallo uniassico l'energia dell'anisotropia è una grandezza del primo ordine rispetto all'interazione relativistica e perciò, come regola, grande rispetto all'energia magnetoelastica. Nei cristalli cubici, invece, l'energia dell'anisotropia è del secondo ordine rispetto all'interazione indicata e in questo senso, in generale, commensurabile con l'energia magnetoelastica [1]). Quindi, può comparire la necessità di tener conto contemporaneamente delle due forme dell'energia (nello studio della curva di magnetizzazione, ad esempio), ciò che rende più complicato il problema.

Consideriamo ora la magnetostrizione di un magnetico in campi forti ($H \gg 4\pi M$) tali per i quali è inessenziale l'energia dell'anisotropia e la struttura a domini non esiste più, cosicché si può supporre la direzione **M** coincidente con la direzione **H**.

In quanto trascuriamo l'energia di anisotropia in questo caso, la simmetria concreta del cristallo è inessenziale in modo che le formule che diamo più avanti sono applicabili in misura uguale a ogni ferromagnete.

Supponiamo che il corpo considerato si trovi in un campo magnetico omogeneo esterno $\mathfrak{H}$. Il suo potenziale termodinamico totale $\tilde{\mathfrak{F}}$ [2]) è dato dalla formula

$$\tilde{\mathfrak{F}} = -\mathcal{M}\mathfrak{H} = -MV\mathfrak{H}, \tag{42,6}$$

ove $\mathcal{M} = MV$ è il momento magnetico totale del corpo magnetizzato omogeneamente nella direzione coincidente con quella del campo; abbiamo omesso qui il termine $\mathfrak{F}_0$ non legato con il campo magnetico. La media del tensore di deformazione rispetto al volume del corpo è data dalla formula

$$\bar{u}_{ik} = -\frac{1}{V}\frac{\partial \tilde{\mathfrak{F}}}{\partial \sigma_{ik}},$$

di qui

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V}\frac{\partial (VM)}{\partial \sigma_{ik}}. \tag{42,7}$$

[1]) Ma anche nei cristalli cubici l'energia magnetoelastica può essere piccola rispetto a quella dell'anisotropia. Così, per il ferro (a temperatura ambiente) il loro rapporto $\sim 10^{-2}$.

[2]) Qui intendiamo la definizione di $\tilde{\mathfrak{F}}$ data al § 12. Ma essa è inapplicabile a corpi deformati notevolmente in modo non omogeneo.

In tal modo, la deformazione è definita dalla dipendenza della magnetizzazione dagli sforzi interni.

Nei cristalli a simmetria cubica ogni tensore simmetrico del secondo ordine che ne caratterizza le proprietà si riduce a uno scalare dal quale si ottiene moltiplicato per δ_{ik}. Ciò si riferisce anche al tensore $\partial\,(VM)/\partial\sigma_{ik}$, cosicché la deformazione dovuta alla magnetostrizione si riduce, in questo caso, a onnilaterale compressione o estensione.

Nel caso in cui presenta interesse la sola variazione δV del volume totale la si può ottenere semplicemente derivando $\widetilde{\mathfrak{F}}$ rispetto alla pressione, e cioè

$$\delta V = \frac{\partial \widetilde{\mathfrak{F}}}{\partial P} = -\mathfrak{H}\,\frac{\partial\,(MV)}{\partial P}\,, \tag{42,8}$$

ove con P si deve intendere una pressione onnilaterale applicata uniformemente al corpo.

Problemi

1. Trovare una estensione relativa di un cristallo ferromagnetico cubico a seconda della direzione della magnetizzazione **m** e della direzione di misura **n**.

Soluzione. La estensione relativa nella direzione del vettore unitario **n** si esprime in funzione del tensore di deformazione mediante la formula

$$\delta l/l = u_{ik} n_i n_k.$$

Sostituendovi u_{ik} (se non esistono sforzi interni) dalla formula (42,5) otteniamo

$$\delta l/l = a_1\,(m_x^2 n_x^2 + m_y^2 n_y^2 + m_z^2 n_z^2) + a_2\,(m_x m_y n_x n_y + m_x m_z n_x n_z + m_y m_z n_y n_z).$$

Ricordiamo che il significato incondizionato ha non questa grandezza stessa, ma le sole differenze di suoi valori per direzioni distinte **m** e **n**. Così, se **m** è diretto lungo l'asse x, la differenza di valori $\delta l/l$ lungo gli assi x e y vale a_1. Se la direzione **m** coincide con una delle diagonali spaziali la differenza di valori $\delta l/l$ in questa direzione e lungo le tre altre diagonali spaziali vale $4a_2/9$.

2. Trovare la variazione del volume per magnetostrizione di un ellissoide ferromagnetco nel campo esterno $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$ parallelo a uno dei suoi assi; il corpo ferromagnetico è supposto cubico [1]).

Soluzione. Se trascuriamo l'energia dell'anisotropia, la regione dell'esistenza della struttura a domini è data dalla disuguaglianza $\overline{B} < 4\pi M$ per $H = 0$ (il trattino sopra B significa la media rispetto al volume del corpo; cfr. § 41). Nell'ellissoide abbiamo $n\overline{B} + (1 - n)\overline{H} = \mathfrak{H}$ e, ponendo $H = 0$, troviamo che la struttura a domini esiste per

$$\mathfrak{H} < 4\pi n M.$$

In questo caso, $n\overline{B} = 4\pi n \overline{M} = \mathfrak{H}$, vale a dire che la magnetizzazione media è

$$\overline{M} = \mathfrak{H}/4\pi n.$$

[1]) In un corpo ferromagnetico uniassiale per $\mathfrak{H} \sim 4\pi M$ si dovrebbe tener conto dell'energia dell'anisotropia il che non si fa in un cristallo cubico.

Di qui il potenziale termodinamico vale

$$\tilde{\mathfrak{P}} = -V \int_0^{\mathfrak{H}} \overline{M}\, d\mathfrak{H} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n} V. \tag{1}$$

Se, invece, $\mathfrak{H} > 4\pi n M$, l'ellissoide è magnetizzato completamente lungo il campo: $\overline{M} = M$. In questo caso

$$\tilde{\mathfrak{P}} = -M\mathfrak{H}V + 2\pi M^2 V n \tag{2}$$

(per $\mathfrak{H} = 4\pi M n$ le espressioni (1) e (2) coincidono).

La variazione del volume cercata si ottiene derivando $\tilde{\mathfrak{P}}$ rispetto alla pressione:

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi n}\frac{\partial V}{\partial P} \quad \text{per} \quad \mathfrak{H} < 4\pi n M,$$

$$\delta V = -\mathfrak{H}\frac{\partial (MV)}{\partial P} + 2\pi n \frac{\partial (M^2 V)}{\partial P} \quad \text{per} \quad \mathfrak{H} > 4\pi n M.$$

Per $\mathfrak{H} \gg 4\pi n M$ riotteniamo la formula (42,8) data nel testo.

§ 43. Tensione superficiale della parete di dominio

Come è stato notato al § 41, esiste una larga gamma di stati in cui i ferromagneti devono avere la struttura a domini, cioè scindere in tratti con direzioni di magnetizzazione distinte. Ciò si riferisce, in particolare, a un corpo ferromagnetico che non si trova nel campo magnetico esterno.

Dal punto di vista termodinamico i domini a contatto rappresentano diverse fasi ferromagnetiche che differiscono per direzione della loro magnetizzazione spontanea. Consideriamo prima di tutto le proprietà delle frontiere tra fasi (o, come si suole dire, delle *pareti di dominio*) e definiamone la tensione superficiale (*L. D. Landau, E. M. Lifšits*, 1935).

In effetti le frontiere tra fasi rappresentano strati transitori relativamente sottili in cui la direzione della magnetizzazione varia con continuità da una direzione all'altra in un dominio. La « larghezza » di questo strato e l'andamento di variazione di M in esso sono definiti dalle condizioni dell'equilibrio termodinamico. In questo caso si deve tener conto di un'energia complementare causata dalla magnetizzazione non omogenea. Il contributo più grande in questa *energia di disuniformità* è dato dall'interazione di scambio. Dal punto di vista macroscopico la si può esprimere in funzione delle derivate di M rispetto alle coordinate. Ciò si può realizzare nella forma generale supponendo relativamente piccolo il gradiente della direzione M; questa condizione significa che un cambiamento notevole della direzione dei momenti magnetici si verifica esclusiva-

mente a distanze grandi rispetto alle distanze interatomiche. Nel caso considerato questa condizione, evidentemente, è soddisfatta poiché una distinzione notevole tra le direzioni dei momenti magnetici atomici vicini condurrebbe ad aumento molto grande dell'energia di scambio, ciò che è termodinamicamente svantaggioso.

Indichiamo la densità di energia di disuniformità con U_{disun}. Nel suo sviluppo non possono esistere termini lineari rispetto alle derivate prime della forma $a_{ik}(M)\,\partial M_i/\partial x_k$; ciò è impossibile già in virtù della condizione di simmetria rispetto all'inversione del tempo (per questa operazione il vettore **M** cambia di segno, mentre l'energia deve restare invariata). La simmetria del cristallo potrebbe consentire l'esistenza di termini contenenti prodotti delle derivate $\partial M_i/\partial x_k$ per le componenti del vettore stesso **M**. Qui presenta interesse l'energia di scambio di disuniformità; i termini corrispondenti in U_{disun} devono essere invarianti rispetto alla contemporanea uguale rotazione dei vettori **M** in tutto lo spazio (per sistema di coordinate invariabile) [1]. Allora i termini con i prodotti suindicati possono avere la sola forma

$$a_i(M)\,M_l\,\frac{\partial M_l}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\,\mathbf{a}(M)\,\nabla M^2$$

Tuttavia, questi termini non possono avere senso reale di energia di disuniformità anche se è supposto che lungo il cristallo cambi non soltanto la direzione ma persino la grandezza del vettore **M**. Il fatto è che un significato termodinamico reale ha non la grandezza stessa U_{disun} bensì il suo solo integrale esteso al volume del corpo; ma per questa integrazione i termini nella forma scritta precedentemente si ridurrebbero ad espressioni dipendenti esclusivamente da valori della magnetizzazione sulla superficie del corpo e non dall'andamento di sua variazione nel volume [2].

Per la stessa ragione si possono non scrivere tra i termini infinitesimi dell'ordine successivo in U_{disun} quelli lineari rispetto alle derivate seconde di **M** rispetto alle coordinate: nell'integrazione rispetto al volume essi si trasformano in espressioni quadratiche rispetto alle derivate prime. Sono le espressioni quadratiche a rappresentare termini principali non scomparenti nello sviluppo dell'energia di scambio di disuniformità.

La forma più generale di questi termini è

$$U_{\text{disun}}=\frac{1}{2}\,\alpha_{ik}\,\frac{\partial M_l}{\partial x_i}\,\frac{\partial M_l}{\partial x_k}, \tag{43,1}$$

[1]) Ciò vuol dire che l'espressione scalare di U_{disun} deve essere costruita in modo tale che la convoluzione avvenga soltanto tra gli indici vettoriali « magnetici » e « di coordinate », ma non tra l'uno e l'altro.

[2]) La simmetria del cristallo, tuttavia, può consentire l'esistenza di termini della forma $a_{ikl}M_i\partial M_k/\partial x_l$ della natura non di scambio. Ciò implicherebbe cambiamento del carattere di ordine ferromagnetico nel cristallo; cfr. § 52.

ove α_{ik} è un tensore simmetrico; perché l'ordine ferromagnetico sia stabile questa espressione deve essere essenzialmente positiva, vale a dire che i termini principali del tensore α_{ik} devono essere positivi. Nei cristalli cubici il tensore α_{ik} si riduce a uno scalare ($\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$, $\alpha > 0$) in modo che [1])

$$U_{\text{disun}} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}. \tag{43,2}$$

Nei cristalli uniassici il tensore α_{ik} ha due componenti indipendenti e l'energia di disuniformità ha la forma

$$U_{\text{disun}} = \frac{\alpha_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\alpha_2}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2. \tag{43,3}$$

Sottolineiamo che lontano dal punto di Curie le espressioni (43,1-3) vanno considerate come primi termini dello sviluppo in potenze delle derivate del vettore unitario $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$ e non della magnetizzazione stessa $\mathbf{M}$. Soltanto in prossimità di questo punto l'ultima espressione diventa sviluppo in potenze delle derivate del vettore stesso $\mathbf{M}$. Ciò premesso, nei limiti della teoria di Landau i coefficienti α_{ik} in queste espressioni dovrebbero tendere per $T \to T_c$ a valori finiti non nulli (sul ruolo delle fluttuazioni in questo caso si veda § 47).

A titolo di esempio consideriamo la frontiera di separazione tra fasi in un cristallo uniassico del tipo « asse facile » supponendo in questo caso che il vettore $\mathbf{M}$ sia parallelo (o antiparallelo) all'asse di magnetizzazione facile (asse z).

La struttura dello strato transitorio è definita dalla condizione di minimo della sua energia libera totale [2]). In questo caso l'energia di scambio agisce nella direzione di crescita dello spessore dello strato (cioè di variazione meno brusca della direzione $\mathbf{M}$ in esso). Nella direzione opposta agisce l'energia dell'anisotropia poiché qualsiasi deviazione di $\mathbf{M}$ dalla direzione di magnetizzazione leggera la fa aumentare.

Consideriamo l'asse x nella direzione perpendicolare al piano dello strato; la distribuzione di $\mathbf{M}$ non dipende che da questa coordinata. Una rotazione del vettore $\mathbf{M}$ lungo lo spessore dello strato

---

[1]) Per ordine di grandezza (per il ferro, ad esempio) $\alpha \sim 10^{-12}$ cm.

[2]) Se è trascurata la magnetostrizione, non è necessario fare distinzione tra energia libera $\tilde{\mathcal{F}}$ e potenziale termodinamico $\tilde{\mathcal{G}}$. Se si tiene conto delle energie elastica e magnetoelastica della deformazione non omogenea (ciò che può essere indispensabile in alcuni casi; si veda il problema 2), si deve trattare anche l'energia libera totale. Ricordiamo in proposito che le equazioni di equilibrio del mezzo si ottengono facendone variare l'energia libera totale rispetto alle componenti del vettore di deformazione $\mathbf{u}$ (cfr. la deduzione data alla fine del § 15 per il liquido: l'equazione di equilibrio $\mathbf{f} = 0$ si ottiene uguagliando a zero la variazione $\delta\mathcal{F}$).

deve effettuarsi nel piano yz, cioè ovunque $M_x = 0$. Ciò è chiaro dalle considerazioni semplici seguenti. Le energie di disuniformità e di anisotropia nei cristalli uniassici, in generale, non dipendono dai piani in cui si effettua la rotazione della magnetizzazione. Ma l'esistenza della componente M_x non nulla condurrebbe inevitabilmente alla comparsa di un campo magnetico, ciò che è termodinamicamente svantaggioso a priori a causa dell'energia magnetica complementare legata a questo campo. Infatti, dall'equazione div $\mathbf{B} = dB_x/dx = 0$ segue che lungo lo strato transitorio $B_x =$ costante, e poiché in profondità dei domini di magnetizzazione spontanea $M_x = 0$ e $H_x = 0$, allora ovunque $B_x = 0$. Perciò assieme alla componente $M_x \neq 0$ deve comparire anche il campo $H_x = -4\pi M_x$. Rispettivamente nell'energia libera $\tilde{F}$ compare il termine [1])

$$-M_x H_x - \frac{H_x^2}{8\pi} = \frac{H_x^2}{8\pi} > 0.$$

Sia θ l'angolo tra $\mathbf{M}$ e l'asse z. Allora le componenti di $\mathbf{M}$ sono

$$M_x = 0, \quad M_y = M \operatorname{sen} \theta, \quad M_z = M \cos \theta.$$

La somma delle energie di disuniformità (43,3) e di anisotropia (41,1) è data dall'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\alpha_1}{2} (M_y'^2 + M_z'^2) + \frac{\beta}{2} M_y^2\right] dx = \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 \theta'^2 + \beta \operatorname{sen}^2 \theta)\, dx \quad (43,4)$$

(l'apice significa la derivazione rispetto a x). Gli altri termini nell'energia libera sono indipendenti dalla struttura dello strato e perciò possono essere omessi.

Per la definizione della funzione $\theta(x)$ che minimizza questo integrale, scriviamo l'equazione di Eulero corrispondente

$$\alpha_1 \theta'' - \beta \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0$$

Supponendo lo spessore dello strato transitorio piccolo rispetto alla larghezza dei domini stessi, si possono scrivere condizioni di frontiera per questa equazione nella forma

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \theta'(\pm\infty) = 0. \quad (43,5)$$

---

[1]) Più precisamente, nel caso in esame si deve considerare il potenziale termodinamico $\mathcal{F}'$; cfr. la fine del § 44. Per un valore $B_n = B_x$ questo potenziale deve avere minimo rispetto a M_x o H_x. Ma per $B_x = 0$ i potenziali $\tilde{F}$ e F' coincidono.

Esse esprimono il fatto che i domini vicini sono magnetizzati in direzioni mutuamente opposte. Il primo integrale dell'equazione di Eulero, soddisfacente a queste condizioni, è [1])

$$\theta'^2 - \frac{\beta}{\alpha_1} \operatorname{sen}^2 \theta = 0. \tag{43,6}$$

Integrando ancora una volta troviamo

$$\cos\theta = \operatorname{th}(\sqrt{\beta/\alpha_1}\, x), \tag{43,7}$$

ciò che determina l'andamento di variazione della magnetizzazione nello strato transitorio. La sua larghezza è

$$\delta \sim \sqrt{\alpha_1/\beta}.$$

Tenendo conto dell'eguaglianza (43,6) l'integrale (43,4) vale

$$M^2\alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} \theta'^2\, dx = M^2\sqrt{\alpha_1\beta} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2M^2\sqrt{\alpha_1\beta}.$$

Se la frontiera di separazione tra domini è considerata come piano geometrico, questa grandezza rappresenta tensione superficiale da ascrivere alla frontiera per tener conto dell'energia indispensabile che quest'ultima formasse. Indichiamo la tensione superficiale della parete di dominio con $M^2\Delta$, ove Δ ha la dimensione di lunghezza. Allora

$$\Delta = 2\sqrt{\alpha_1\beta}. \tag{43,8}$$

Problemi

1. Trovare la tensione superficiale della parete di dominio per un ferromagnete cubico con assi di magnetizzazione facile diretti lungo gli spigoli del cubo (assi x, y, z). I domini sono magnetizzati parallelamente e antiparallelamente all'asse z, mentre la parete di dominio è disposta a) parallelamente al piano (100); b) parallelamente al piano (110) (*E. M. Lifšits*, 1944; *L. Néel*, 1944).

Soluzione. a) La parete di dominio è parallela al piano yz e tutte le grandezze in essa dipendono dalla sola coordinata x; la rotazione del vettore **M** si effettua nel piano yz (all'argomentazione data nel testo del presente paragrafo per i cristalli uniassici si deve aggiungere anche il fatto che la deviazione di **M** dal piano yz condurrebbe nel caso considerato ad aumento dell'energia dell'anisotropia). Trascurando l'energia di magnetostrizione e usando la formula (43,2) per

[1]) Questa espressione, ovviamente, si potrebbe scrivere immediatamente (senza scrivere l'equazione di Eulero) se si tiene conto che l'integrale nella (43,4) ha la forma dell'integrale d'azione per il moto unidimensionale della particella in un campo di energia potenziale $-\beta \operatorname{sen}^2\theta$ (ove θ funge da coordinata e x da tempo). Allora la formula (43,6) esprime la « conservazione dell'energia della particella ».

l'energia di disuniformità e la formula (40,7) per l'energia di anisotropia (ponendo in essa $K = \beta M^2/2$), troviamo l'energia libera della parete nella forma

$$\frac{M^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha\theta'^2+\beta\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta)\,dx$$

(θ è l'angolo tra **M** e l'asse z). Il primo integrale dell'equazione di Eulero per il problema della minimizzazione di questo funzionale, soddisfacente alle condizioni di frontiera (43,5), è

$$\alpha\theta'^2-\beta\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta=0,$$

ossia

$$\theta'=\sqrt{\beta/\alpha}\,\mathrm{sen}\,\theta\,|\cos\theta|$$

(scrivendo $|\cos\theta|$ garantiamo così una variazione monotona dell'angolo θ nello strato transitorio). Questa equazione non ha soluzione che potrebbe descrivere la struttura a domini di spessore finito (a tale scopo è necessario tener conto dell'energia di magnetostrizione: si veda il problema 2), ma essa è sufficiente per il calcolo della tensione superficiale che diventa finita già trascurando l'energia di magnetostrizione:

$$\Delta_{(100)}=\sqrt{\alpha\beta}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta=\sqrt{\alpha\beta}.$$

b) La parete di dominio passa per l'asse z sotto l'angolo di 45° verso gli assi x e y. Affinché non compaia campo magnetico notevole è sempre necessario che il vettore **M** resti nel piano della parete. Ma l'anisotropia magnetica in questo caso fa spostare un po' il vettore **M** dal piano indicato. Cionondimeno, in quanto l'energia di anisotropia nel cristallo cubico è supposta piccola, questa deviazione sarà esigue che la si può trascurare con buona approssimazione. Allora

$$M_x=M_y=\frac{M}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad M_z=M\cos\theta$$

(θ è sempre l'angolo tra **M** e l'asse z) e l'energia dell'anisotropia è

$$U_{\mathrm{an}}=\frac{\beta M^2}{8}\,\mathrm{sen}^2\theta\,(3\cos^2\theta+1).$$

Scriviamo immediatamente il primo integrale dell'equazione di Eulero del problema variazionale:

$$\theta'^2=A\,\mathrm{sen}^2\theta\,(\cos^2\theta+B), \tag{1}$$

ove $A = 3\beta/4\alpha$, $B = 1/3$ e l'apice significa derivazione rispetto alla coordinata del piano normale della parete (indichiamola con ξ). Di qui, sempre tenendo conto delle condizioni (43,5), troviamo l'equazione descrivente la struttura della parete

$$\mathrm{sh}\,\xi\sqrt{A(1+B)}=\sqrt{\frac{1+B}{B}}\,\mathrm{cotg}\,\theta \tag{2}$$

cioè

$$\mathrm{sh}\sqrt{\beta/\alpha}\,\xi=2\,\mathrm{cotg}\,\theta.$$

Per la tensione superficiale otteniamo

$$\Delta = \alpha \sqrt{A} \left\{ \sqrt{1+B} + B \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{B}} \right\}, \tag{3}$$

ossia per i valori indicati di A e B:

$$\Delta_{(110)} = 1{,}38 \sqrt{\alpha\beta}.$$

2. Trovare la struttura della parete di dominio nel piano (100) la cui tensione superficiale è stata calcolata nel problema 1a (*E.M. Lifšits*, 1944).

Soluzione. Come è stato detto, un valore finito della larghezza della parete in questione si ottiene soltanto se si tiene conto dell'energia di magnetostrizione. La strutura della parete è definita dalla condizione di minimo dell'energia libera $\widetilde{\mathscr{F}}$ la cui densità $\widetilde{F}$ deve essere espressa in funzione di u_{ik} (cfr. la nota alla pag. 225). Le espressioni corrispondenti per le energie magnetoelastica ed elastica hanno la forma analoga alle espressioni (42,2-3) (con altri coefficienti):

$$U_{\text{m. elas.}} = b_1 (u_{yy} m_y^2 + u_{zz} m_z^2) + 2 b_2 u_{yz} m_y m_z,$$

$$U_{\text{e}} = \frac{\lambda_1}{2} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \frac{\lambda_2}{2} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})^2 + \lambda_3 (u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2)$$

(qui è già posto $m_x = 0$).

Nello strato transitorio può dipendere unicamente da x non soltanto la distribuzione di magnetizzazione, ma anche la deformazione. Ne segue che le componenti y e z del vettore spostamento $\mathbf{u}$ devono avere la forma $u_y = \text{cost} \cdot y$, $u_z = \text{cost} \cdot z$: se al posto di costante figurassero le funzioni di x, allora u_{xy}, u_{xz} sarebbero dipendenti da y o z. In tal modo, u_{yy}, u_{zz}, u_{yz} sono costanti. In seguito, dalle equazioni di equilibrio elastico $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ segue che $\sigma'_{ix} = 0$; poiché per $x = \pm\infty$, ove non esiste deformazione, deve essere $\sigma_{ik} = 0$, allora ovunque $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$. Calcolando queste componenti del tensore degli sforzi come derivate $\sigma_{ik} = \partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$, troviamo che $u_{xy} = u_{xz} = 0$ e $u_{xx} = \text{costante}$. In tal modo, tutte le u_{ik} sono effettivamente costanti. Perciò è sufficiente calcolarne i valori all'infinito ove tutte le $\sigma_{ik} = 0$, mentre $m_y = 0$ e $m_z = \pm 1$. Dalle uguaglianze $\sigma_{yz} = 0$ e $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = 0$ ricaviamo

$$u_{yz} = 0, \quad u_{yy} - u_{zz} = b_1/\lambda_1.$$

Omettendo in $U_{\text{m.elas}}$ e U_{elas} termini costanti, troviamo che alla somma $U_{\text{disun}} + U_{\text{an}}$ si deve associare il termine

$$U_{\text{m. elas}} = \frac{b_1^2}{\lambda_1} \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Come risultato la definizione della dipendenza $\theta(x)$ si riduce alla soluzione di un'equazione della forma (1) nella quale ora

$$A = \frac{\beta}{\alpha}, \quad B = \frac{2b_1^2}{\lambda_1 \beta M^2}.$$

La costante B che caratterizza il rapporto tra energie di magnetostrizione e di anisotropia è piccola [1]). Ponendo nella formula (3) $B = 0$, otteniamo già noto dal problema 1a il valore di $\Delta_{(100)}$. Dalla formula (2) ricaviamo la distribuzione di magnetizzazione nella parete

$$\operatorname{sh} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, x = \sqrt{\frac{\lambda_1 \beta M^2}{2b_1^2}} \operatorname{cotg} \theta.$$

[1]) Così, per il ferro a temperatura ambiente $B \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

La larghezza di questa distribuzione è

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \ln \frac{\lambda_1 \beta M^2}{b_1^2}$$

dipende essenzialmente dalla costante di magnetostrizione [1]).

3. Nel cristallo del problema 1 trovare la tensione superficiale della parete che separa domini magnetizzati nelle direzioni [001] e [010] (assi z e y) nei casi seguenti: a) la parete è parallela al piano (100), b) la parete è parallela al piano (011) (*S.V. Vonsovskij*, 1944; *L. Néel*, 1944) [2]).

Soluzione. In ambedue i casi si può trascurare l'energia magnetoelastica.

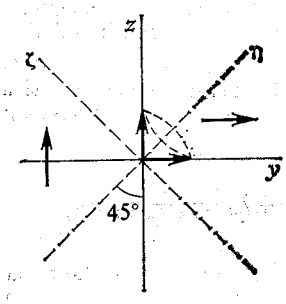


Fig. 22

a) In questo caso il vettore **M** ruota restando nel piano della parete, ossia nel piano yz. La differenza dal problema 1 consiste nelle sole condizioni di frontiera:

$$\theta(-\infty)=0, \quad \theta(+\infty)=\frac{\pi}{2}, \quad \theta'(\pm\infty)=0.$$

La struttura della parete è descritta dalla soluzione

$$\operatorname{tg}\theta = \exp\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, x\right),$$

mentre la tensione superficiale costituisce

$$\Delta_{(100)}^{90^\circ} = {}^1/_2 \sqrt{\alpha\beta}$$

cioè la metà del valore per la parete di 180°.

b) Accanto agli assi cristallografici x, y, z introduciamo gli assi x, η, ζ come si vede nella fig. 22 (l'asse x è perpendicolare al piano della figura; le frecce indicano le direzioni **M** nei domini separati dal piano $\eta = 0$). Nello strato transitorio il vettore **M** ruota descrivendo la metà del conocircolare con asse diretto lungo l'asse η; in questo caso M_η = costante $= 1/\sqrt{2}$ in modo che div $\mathbf{M} = M'_\eta = 0$, come deve essere (l'apice significa derivazione rispetto a η). Indichiamo con φ l'angolo compreso tra la proiezione di **M** sul piano $x\zeta$ e l'asse ζ (φ assume valori da 0 a π). Allora

$$m_\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_\zeta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \quad m_x = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{2}}$$

$$m_y = \frac{1-\cos\varphi}{2}, \quad m_z = \frac{1+\cos\varphi}{2}$$

Le energie di disuniformità e di anisotropia sono

$$U_{\text{disun}} = \frac{\alpha M^2}{4}\varphi'^2, \quad U_{\text{an}} = \frac{\beta M^2}{4}\left(\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{3}{8}\operatorname{sen}^4\varphi\right)$$

---

[1]) Per $b_1 \to 0$ la parete considerata di 180° (secondo l'angolo di rotazione del vettore **M** in essa) come se dividesse in due pareti di 90° separate da una zona tendente all'infinito con $\theta = \pi/2$.

[2]) Nei cristalli cubici (a differenza di quelli uniassici, si veda più avanti la nota alla pag. 233) la parete di 90° è una vera e propria frontiera tra fasi poiché ambedue i domini rappresentano fasi stabili ciascuna delle quali è magnetizzata in una delle direzioni leggere.

Per la tensione superficiale troviamo

$$\Delta_{(110)}^{90^\circ}=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{4}\,2\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\left[1-\frac{3}{8}\operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2}d\theta=$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}\left[1+\frac{5}{2\sqrt{6}}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{3}{5}}\right]=1{,}73\,\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2}.$$

4. Trovare la tensione superficiale della parete di dominio in un cristallo uniassico se la transizione tra domini si realizza per cambiamento della grandezza del vettore **M** senza sua rotazione: la direzione **M** cambia in opposta al passaggio di M attraverso lo zero. La dipendenza dell'energia libera da M (per $\mathbf{H}=0$) si considera nella forma dello sviluppo (39,3) corrispondente alla prossimità al punto di Curie (*V.A. Žirnov*, 1958).

Soluzione. In tutto lo strato transitorio M_z è uguale a M e varia lungo l'asse x perpendicolare al piano della parete. La densità di energia libera, tenendo conto dell'energia di disuniformità, è

$$F=F_0-|A|\,M^2+BM^4+\frac{\alpha_1}{2}M'^2. \tag{1}$$

Indichiamo qui il valore d'equilibrio della magnetizzazione in profondità dei domini con M_0 : $M_0^2=|A|/2B$ (cfr. la (39,5)). Introducendo il vettore $\mathbf{m}=\mathbf{M}/M_0$ ($m\neq 1$), scriviamo l'energia libera della parete nella forma

$$\frac{1}{2}|A|\,M_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[(1-m^2)^2+\frac{\alpha_1}{|A|}m'^2\right]dx$$

(la costante additiva in F è considerata in modo tale che F si annulli in profondità dei domini). La minimizzazione di questo integrale deve essere realizzata sotto le condizioni di frontiera

$$m(+\infty)=1,\quad m(-\infty)=-1,\quad m'(\pm\infty)=0.$$

Il primo integrale dell'equazione di Eulero di questo problema variazionale è

$$\frac{\alpha_1}{|A|}m'^2=(1-m^2)^2.$$

Di qui troviamo

$$m(x)=\operatorname{th}\sqrt{\frac{|A|}{\alpha_1}}\,x,$$

e il calcolo dell'integrale dà per la tensione superficiale $M_0^2\Delta$ il valore

$$\Delta={}^4/_3\sqrt{\alpha_1|A|}. \tag{2}$$

La struttura considerata della parete può avere luogo in linea di massima in prossimità sufficiente del punto di Curie (se il rapporto $\beta/|A|$ tende all'infinito per $T\to T_c$) ove la variazione della grandezza di **M** diventa energeticamente più vantaggiosa che la deviazione di questo vettore dalla direzione di magnetizzazione leggera.

§ 44. *Struttura a domini dei corpi ferromagnetici*

Vediamo infatti quali sono forma e dimensioni dei domini [1]).

Alcune conclusioni circa la forma delle superficie di separazione tra domini si possono trarre immediatamente dalle condizioni di frontiera per il campo magnetico. Poiché l'intensità **H** nei domini vicini è uguale, la condizione di continuità della componente normale dell'induzione B_n si riduce alla condizione di continuità di M_n. Nei cristalli uniassici la magnetizzazione di domini distinti differisce per segno di M_z con M_x, M_y uguali. In queste condizioni la continuità di M_n significa che la superficie di separazione deve essere parallela all'asse z, cioè all'asse di magnetizzazione facile.

La forma e le dimensioni dei domini in equilibrio termodinamico sono definite dalla condizione di minimo dell'energia libera totale. Esse dipendono notevolmente da forma e dimensioni concrete del corpo. Nel caso elementare di un ferromagnete in forma della lamina pianoparallela i domini possono avere, in principio, la forma di strati paralleli passanti attraverso il corpo da una sua superficie all'altra. Nel seguito tratteremo proprio questa struttura.

La comparsa di ogni nuova frontiera tra domini implica aumento dell'energia totale della tensione superficiale. Questo fatto, quindi, agisce nella direzione di diminuzione del numero di domini, cioè di crescita del loro spessore.

Nella direzione opposta agisce l'energia d'accesso che compare in prossimità della superficie esterna del corpo sulla quale fanno comparizione domini. In profondità del corpo il campo magnetico $\mathbf{H} = 0$; l'energia dell'anisotropia è anch'essa nulla poiché il vettore **M** giace nelle direzioni di magnetizzazione facile. Ma in prossimità della superficie la situazione cambia.

Il carattere della comparsa dei domini sulla superficie del corpo è diverso nei casi limite dell'anisotropia magnetica grande e piccola. La misura naturale di questa grandezza, quindi è non il coefficiente stesso β nell'espressione (41,1) ma $\beta/4\pi$. Ciò si vede già dall'espressione della permeabilità magnetica trasversale di un ferromagnete uniassico $\mu_{xx} = 1 + 4\pi/\beta$ (si veda la (41,7)).

Per grande anisotropia magnetica gli strati devono uscire alla superficie del corpo con direzione invariabile **M** (fig. 23, *a*; per semplicità, supponiamo che la superficie della lamina sia perpendicolare alla direzione di magnetizzazione facile). Ma in questo caso in prossimità della superficie compare il campo magnetico che penetra nello spazio circostante e in profondità del corpo a distanze dell'ordine di grandezza dello spessore degli strati a.

---

[1]) La nozione di domini è stata introdotta originariamente da *P. Weiss* (1907). La teoria termodinamica dei domini appartiene a *L. D. Landau* e *E. M. Lifšits* (1935).

Nel caso inverso di anisotropia debole più vantaggiosa è la distribuzione di magnetizzazione tale da escludere la comparsa di campo magnetico a prezzo di deviazione di **M** dalla direzione di magnetizzazione facile. Per $\mathbf{H} = 0$ deve essere ovunque div $\mathbf{B} = 4\pi$ div $\mathbf{M} = 0$ e M_n deve essere continua su tutte le frontiere dei domini e sulla superficie libera del corpo. Ciò si ottiene grazie alla comparsa dei *domini di chiusura* di sezione triangolare (fig. 23, *b*) in cui la magnetizzazione è parallela alla superficie del corpo. Il volume totale di queste zone e con esso l'energia di anisotropia in esse sono proporzionali allo stesso spessore a degli strati [1]).

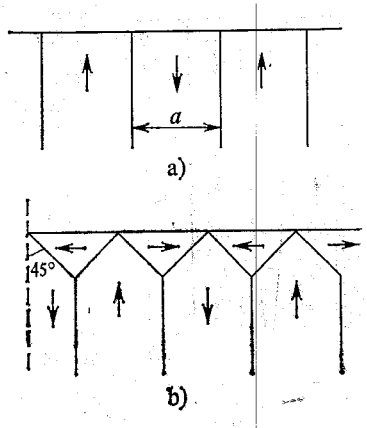


Fig. 23

Quindi, in tutti i casi la comparsa dei domini sulla superficie del corpo è dovuta alla formazione di energia d'eccesso, tanto più grande quanto più larghi sono i domini. Con ciò l'effetto si verifica nella direzione di « dimagrimento » dei domini.

La larghezza dei domini che si stabilisce è determinata dal gioco di queste due tendenze opposte, ossia dall'energia superficiale delle pareti di domini e dall'*energia di emersione* dei domini alla superficie del corpo. Il numero di domini (di strati pianoparalleli) nella lamina è proporzionale a $1/a$, mentre l'energia della tensione superficiale è proporzionale all'area totale delle frontiere di separazione, cioè a l/a, ove l è lo spessore della lamina. L'energia di emersione è proporzionale ad a. La somma di queste due energie quale funzione di a è minima per un determinato valore di a, proporzionale a $\sqrt{l}$.

Così, nel caso di anisotropia debole (fig. 23, *a*) l'energia di emersione (riferita ad unità d'area della lamina da ambedue i suoi

[1]) Si deve sottolineare che la frontiera tra i domini fondamentale e di chiusura, che separa le zone con la direzione **M** ruotata di 90°, non è nel caso considerato (cioè nei cristalli uniassici) frontiera tra fasi nel senso letterale della parola. Ciò si vede già con chiarezza dal fatto che lo stato di magnetizzazione perpendicolare all'asse facile (per $\mathbf{H} = 0$) di per sé è instabile e non rappresenta fase possibile della sostanza. A rigore, il quadro della distribuzione di magnetizzazione rappresentato nella fig. 23, *b* si riferisce soltanto al limite $\beta \to 0$. Già nella prima approssimazione rispetto alla piccola grandezza $\beta/4\pi$ si verificano deviazioni da questo quadro e la transizione tra domini fondamentale e di chiusura si realizza a distanze piccole rispetto alla larghezza a dei domini soltanto a causa della piccolezza di $\beta/4\pi$; in questo caso compaiono dei campi $\sim \beta M$ (ciò che non incide, però, sulla stima dell'energia di emersione dei domini alla superficie del campione).

lati) $\sim a\beta M^2$; l'energia superficiale vale $M^2 \Delta l/a$ (lo spessore l della lamina è supposto, ovviamente, grande rispetto alla larghezza dei domini). Di qui

$$a \sim \sqrt{l\Delta/\beta} \sim \sqrt{l\delta}. \qquad (44,1)$$

In tal modo, lo spessore dei domini cresce all'aumentare delle dimensioni del corpo. Ma la legge quantitativa $a \backsim l^{1/2}$ di questa crescita, legata all'ipotesi della costanza dello spessore dei domini, non può verificarsi a priori per qualsiasi l. Infatti, lo spessore dei domini che emergono alla superficie del corpo non può superare un determinato valore limite a_k dipendente dalle proprietà dei ferromagneti stessi e non dalla forma e delle dimensioni del corpo come un tutt'uno. Esso è determinato dal momento in cui a misura di aumento di a diviene termodinamicamente vantaggiosa la scissione del dominio in prossimità della superficie del corpo a profondità $\sim a$. Questo momento è inevitabile poiché l'energia di uscita di un dominio cresce come a^2, mentre l'energia in eccesso della tensione superficiale che compare per scissione del dominio aumenta semplicemente come a.

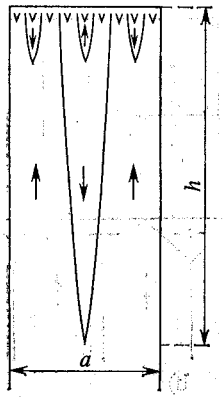


Fig. 24

Possiamo concludere quindi che all'aumentare delle dimensioni del corpo e, al tempo stesso, dello spessore dei domini deve verificarsi una ramificazione progressiva dei domini per loro uscita alla superficie del corpo (*E.M. Lifšits*, 1944) [1]. In linea di massima, per aumento sufficiente delle dimensioni l la ramificazione continua finché lo spessore dei rami formatisi in prossimità della superficie stessa del corpo non sarà comparabile con lo spessore della parete di dominio δ.

Determiniamo la dipendenza $a(l)$ per questo caso limite. Per fissare le idee, nei calcoli supporremo debole l'anisotropia.

Nella fig. 24 è rappresentato lo schema di ramificazione di un dominio. L'energia di emersione dei domini è composta in questo caso dell'energia superficiale complementare dei domini « cuneiformi » e dell'energia dell'anisotropia dovuta alla deviazione del vettore **M** dall'asse z in seguito alla ramificazione; non esistono più domini triangolari di chiusura. Supponendo rapida la convergenza della somma estesa alle ramificazioni successive, è sufficiente considerare

[1]) Il valore critico della lunghezza l per cui comincia la ramificazione dipende dal carattere dell'anisotropia magnetica e dalla posizione della superficie del campione rispetto ai suoi assi cristallografici. Per studio degli stadi iniziali di ramificazione dei domini cfr. *Lifšits E. M.* — JETF, 1945, v. 15, p. 97; J. of Physics USSR, 1944, v. 8, p. 337.

il primo cuneo; indichiamone la lunghezza con h. Dalle considerazioni di utilità energetica si vede facilmente che la lunghezza h del cuneo è grande rispetto al suo spessore (o, che è lo stesso, per ordine di grandezza, rispetto ad a), vale a dire che l'angolo di inclinazione della sua frontiera verso l'asse z è $\vartheta \sim a/h \ll 1$. Infatti, l'energia superficiale del cuneo $\sim hM^2\Delta$ e legata con esso l'energia dell'anisotropia $\sim ha\beta M^2\vartheta^2 \sim a^3\beta M^2/h$; la somma di queste due energie (energia d'emersione) è minima per $h^2 \sim a^3\beta/\Delta$, cioè

$$a/h \sim \sqrt{\Delta/a\beta} \sim \sqrt{\delta/a} \ll 1 \tag{44,2}$$

(è supposto, ovviamente, che $a \gg \delta$). Quindi, l'energia di emersione (riferita a unità di superficie della lamina) $\sim a^{3/2}M^2\sqrt{\beta\Delta}/a$. L'energia superficiale delle frontiere fondamentali tra domini: $\sim M^2\,\Delta l/a$. Minimizzando la somma di entrambe le espressioni troviamo la dipendenza cercata:

$$a \sim l^{2/3}\,(\Delta/\beta)^{1/3} \sim (l^2\delta)^{1/3} \tag{44,3}$$

(*I.A. Privorotskij*, 1970) [1]).

Per concludere, consideriamo la questione sulle condizioni di equilibrio delle fasi ferromagnetiche da un punto di vista che differenzia di quello usato nell'esposizione precedente, ossia non supponiamo ora uguaglianza di tutte le componenti del vettore **H** in ambedue le fasi (questa impostazione può essere utile, ad esempio, per lo studio delle frontiere incurvate dei domini).

Prima di tutto, devono essere soddisfatte le condizioni magnetostatiche generali (29,13):

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}, \tag{44,4}$$

che sono conseguenza delle equazioni di Maxwell stesse div $\mathbf{B} = 0$ e rot $\mathbf{H} = 0$. Ma accanto a queste uguaglianze deve essere verificata anche una condizione termodinamica esprimente equilibrio rispetto a una traslazione della superficie di separazione (nella sua direzione normale), cioè rispetto alla transizione della sostanza da una fase all'altra. Questa condizione è espressa dall'uguaglianza in ambedue le fasi delle grandezze che sono potenziali termodinamici rispetto alle variabili B_n e $\mathbf{H}_t$ [2]). Per trovare queste grandezze è sufficiente nell'espressione del differenziale $d\tilde{F}$ (31,6), trascurando di nuovo

[1]) L'idea di ramificazione dei domini e la deduzione della legge limite $a \backsim l^{2/3}$ appartengono a *L. D. Landau* che le applicò per la prima volta allo stato intermedio dei superconduttori (§ 57).

[2]) L'argomentazione di questa proposizione è analoga alla deduzione della condizione ordinaria di equilibrio di fasi, ossia di uguaglianza dei potenziali chimici nelle due fasi in cui da variabili indipendenti fungono la temperatura e la pressione, uguali in ambedue le fasi (cfr. V § 81).

magnetostrizione, riscrivere il prodotto $-\mathbf{B}\,d\mathbf{H}$ nella forma

$$-\mathbf{B}\,d\mathbf{H} = -\mathbf{B}_t\,d\mathbf{H}_t - B_n\,dH_n = -d\,(B_nH_n) - \mathbf{B}_t\,d\mathbf{H}_t + H_n\,dB_n.$$

Ne segue con chiarezza che il potenziale termodinamico cercato (indichiamolo con F') è

$$F' = \widetilde{F} + \frac{1}{4\pi}\,B_nH_n, \tag{44,5}$$

e la condizione di frontiera cercata

$$F'_1 = F'_2 \tag{44,6}$$

(*I.A. Privorotskij, M.J. Azbel*, 1969).

Problema

Trovare l'energia del campo magnetico in prossimità della superficie ferromagnetica alla quale emergono perpendicolarmente al suo piano domini pianoparalleli senza cambiare la direzione della loro magnetizzazione (fig. 23, *a*).

Soluzione. Il problema della determinazione del campo magnetico in prossimità della siffatta superficie è equivalente al problema del campo generato da un piano le cui bande alternantisi sono cariche positivamente e negativamente con densità superficiale $\sigma = \pm M$.

Supponiamo che la superficie considerata coincida con il piano $z = 0$ e l'asse x sia diretto perpendicolarmente al piano dei domini. La « densità superficiale di cariche » $\sigma\,(x)$ è una funzione periodica di periodo $2a$ (a è la larghezza del dominio) che vale in uno dei periodi

$$\sigma = -M \text{ per } -a < x < 0,\ \sigma = +M \text{ per } 0 < x < a.$$

Il suo sviluppo in serie di Fourier è

$$\sigma\,(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\,\pi x}{a},\quad c_n = \frac{4M}{\pi\,(2n+1)}.$$

Il potenziale del campo verifica l'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Cerchiamolo nella forma della serie

$$\varphi\,(x,\ z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\,\pi x}{a}\,e^{\mp(2n+1)\pi z/a}$$

(due segni nell'esponente corrispondono ai semispazi $z > 0$ e $z < 0$). I coefficienti b_n sono definiti dalla condizione di frontiera

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=+0} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=-0} = 4\pi\sigma,$$

dalla quale

$$b_n = \frac{2a}{2n+1}\,c_n.$$

L'energia cercata del campo si può calcolare come integrale $\frac{1}{2}\int \sigma\varphi\, df$ esteso a « superficie carica ». Riferendo l'energia a 1 cm² della superficie abbiamo

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(\sigma\varphi)|_{z=0}\,dx=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}c_n b_n=\frac{8aM^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-3}=\frac{7aM^2}{\pi^2}\zeta(3).$$

Per il valore della funzione ζ $\zeta(3)=1{,}202$ otteniamo

$$0{,}852M^2a.$$

La larghezza dei domini nella lamina si ottiene minimizzando la somma

$$1{,}7M^2a+M^2\,\Delta l/a$$

nella quale il primo termine corrisponde all'energia di emersione dei domini verso i due lati della lamina, e il secondo all'energia superficiale. Di qui $a=0{,}8\sqrt{\Delta l}$ (*Ch. Kittel*, 1946).

§ 45. *Particelle a un dominio*

A misura che le dimensioni del corpo vanno diminuendo la formazione dei domini in fin dei conti diventa inopportuna termodinamicamente, cosicché particelle ferromagnetiche sufficientemente piccole rappresentano formazioni magnetizzate omogeneamente « a un dominio ». Un criterio per le loro dimensioni l si ottiene confrontando l'energia magnetica di una particella magnetizzata uniformemente con l'energia di disuniformità che comparirebbe per disuniformità sostanziale nella distribuzione di magnetizzazione nel volume della particella. La prima energia è dell'ordine di grandezza M^2V e la seconda $\sim\alpha M^2V/l^2$. Perciò le dimensioni delle particelle a un dominio sono [1])

$$l\lesssim\sqrt{\alpha}. \tag{45,1}$$

Per determinare il comportamento della particella magnetizzata uniformemente in un campo magnetico esterno bisogna considerarne l'energia libera totale sostituendo nella formula (32,7) per $\widetilde{F}$ la somma dell'espressione (39,1) e dell'energia dell'anisotropia [2])

$$\widetilde{\mathscr{F}}=VU_{\text{an}}-\frac{\mathbf{M}}{2}\int(\mathbf{H}+\mathfrak{H})\,dV, \tag{45,2}$$

ove si integra esclusivamente rispetto al volume del corpo; la costante inessenziale VF_0 è omessa. Supponiamo che la particella abbia la

[1]) Talvolta l'insieme di proprietà di queste particelle si chiama *micromagnetismo*.

[2]) Trascurando la magnetostrizione non facciamo distinzione tra potenziale termodinamico e energia libera considerando quest'ultima per un dato volume V del corpo.

forma di un ellissoide. Allora il campo **H** al suo interno è definito dall'uguaglianza (29,14) oppure

$$H_i = \mathfrak{H}_i - 4\pi n_{ik} M_k \; ; \tag{45,3}$$

qui il secondo termine rappresenta il « campo di smagnetizzazione » creato dal corpo. In tal modo troviamo

$$\tilde{\mathscr{F}} = 2\pi n_{ik} M_i M_k V - V\mathbf{M}\mathfrak{H} + V U_{\text{an}}. \tag{45,4}$$

Il primo termine si chiama *energia magnetostatica* propria della particella magnetizzata e il secondo ne rappresenta l'energia nel campo esterno.

La direzione di magnetizzazione della particella nel campo esterno $\mathfrak{H}$ è determinata dalla condizione di minimo di $\tilde{\mathscr{F}}$ come funzione della direzione **M**. Per un cristallo cubico si può trascurare nella formula (45,4) l'energia dell'anisotropia. Per i cristalli uniassici, scrivendo l'energia dell'anisotropia nella forma $\beta_{ik} M_i M_k / 2$, abbiamo

$$\tilde{\mathscr{F}} = \frac{V}{2} (4\pi n_{ik} + \beta_{ik}) M_i M_k - V\mathfrak{H}\mathbf{M} \tag{45,5}$$

Il problema così posto coincide sotto aspetto matematico con quello studiato nel § 41 inerente alla dipendenza della direzione locale **M** dal campo locale **H** con sola differenza che al posto di **H** si scrive $\mathfrak{H}$ e al posto di β_{ik} qui abbiamo $4\pi n_{ik}$ o $4\pi n_{ik} + \beta_{ik}$.

Deduciamo infine un'equazione cui deve soddisfare la distribuzione di magnetizzazione nel campione a un dominio nelle condizioni in cui questa distribuzione non si può ancora ritenere uniforma. A tale scopo si deve chiedere che l'energia libera totale del corpo sia minima; scriviamola nella forma dell'integrale

$$\tilde{\mathscr{F}} = \int \tilde{F}\, dV = \int \left\{ F_0(M) + U_{\text{disun}} + U_{\text{an}} - \mathbf{MH} - \frac{H^2}{8\pi} \right\} dV, \tag{45,6}$$

esteso a tutto lo spazio. Facciamo variare rispetto a **M** (che è ora funzione delle coordinate) per un dato valore **H** in ogni punto; il valore assoluto M è supposto assegnato in modo che è soggetta alla variazione la sola direzione **M**. Omettendo nell'espressione integranda termini dipendenti unicamente da M e da **H**, facciamo variare l'integrale

$$\int \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{ik} M^2 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_k} + U_{\text{an}} - M\mathbf{mH} \right\} dV,$$

che ora è esteso soltanto al volume del corpo (ove $\mathbf{M} \neq 0$). Integriamo per parti (dopo variazione) il primo termine e otteniamo

$$\delta\tilde{\mathscr{F}} = -\int \left\{\alpha_{ik} M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial U_{\text{an}}}{\partial \mathbf{m}} + M\mathbf{H}\right\} \delta\mathbf{m}\, dV + \\ + \oint \alpha_{ik} M^2 \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_k}\, \delta\mathbf{m} \cdot df_i; \tag{45,7}$$

il secondo integrale si calcola rispetto alla superficie del corpo. Poiché $\mathbf{m}^2 = 1$, allora $\mathbf{m}\,\delta\mathbf{m} = 0$, vale a dire che la variazione ha la forma $\delta\mathbf{m} = [\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}]$ con $\delta\boldsymbol{\omega}$ una funzione (piccola) di coordinate qualsiasi. Dalla condizione $\delta\tilde{\mathscr{F}} = 0$ ricaviamo, uguagliando a zero il fattore di $\delta\boldsymbol{\omega}$ nell'espressione integranda dell'integrale di volume, l'equazione cercata [1])

$$\left[\mathbf{m}\left(\alpha_{ik} M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial U_{\text{an}}}{\partial \mathbf{m}} + M\mathbf{H}\right)\right] = 0. \tag{45,8}$$

Dall'annullamento dell'integrale di superficie ricaviamo la condizione di frontiera per questa equazione; così, per $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$ questa condizione assume la forma

$$\left[\mathbf{m}\, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial n}\right] = 0, \tag{45,9}$$

dove $\mathbf{n}$ è la direzione della normale alla superficie del corpo.

Accanto all'equazione (45,8) in tutto lo spazio devono essere soddisfatte, ovviamente, le equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi M\mathbf{m}) = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \tag{45,10}$$

con le condizioni di frontiera ordinarie per esse sulla superficie del corpo e con la condizione $\mathbf{H} \to \mathfrak{H}$ all'infinito [2]).

Per un corpo magnetizzato in modo omogeneo (ellissoide) il primo termine tra parentesi tonde nella formula (45,8) scompare. L'equazione restante (con $\mathbf{H}$ dalla (45,3)) coincide con la condizione di minimo dell'energia libera (45,5).

---

[1]) Essa coincide naturalmente con l'equazione del moto (precessione) del momento magnetico nei ferromagnetici se in essa poniamo nulla la velocità $\partial\mathbf{M}/\partial t$ (cfr. IX § 69).

[2]) Può sorgere un dubbio sulla legittimità di variazione dell'integrale (45,6) rispetto a $\mathbf{m}$ per $\mathbf{H}$ costante sebbene queste grandezze siano legate mutuamente mediante la prima delle equazioni (45,10). Cionondimeno il fatto è che ponendo $\mathbf{H} = -\nabla\varphi$ (in virtù della seconda equazione) e calcolando la variazione dell'integrale rispetto a φ, quest'ultima si annulla in virtù della prima equazione, cosicché la variazione rispetto a $\mathbf{H}$ non dà contributo in $\delta\tilde{\mathscr{F}}$.

§ 46. *Transizioni di orientazione*

La costante di anisotropia dei ferromagneti è funzione della temperatura e come tale può cambiare di segno in un punto. In questo caso cambia la direzione di magnetizzazione spontanea e, quindi, la simmetria della struttura magnetica. Le transizioni che si realizzano così tra diverse fasi di un corpo magnetico si chiamano transizioni *di orientazione*. Vediamo come esse si svolgono in un cristallo ferromagnetico esagonale uniassico (*H. Horner, C.M. Varma*, 1968).

Poiché ci proponiamo di considerare l'intorno del punto in cui la costante di anisotropia K_1 si annulla, è necessario anche tener conto del termine successivo nello sviluppo dell'energia di anisotropia; per un ferromagnete esagonale questa espressione di U_{an} è data dalla formula (40,3).

Supponiamo dapprima che $K_2 > 0$. Allora a seconda dei valori K_1 e K_2 al minimo di U_{an} corrispondono le seguenti fasi:

$$\begin{aligned} &\text{I)}\ \theta = 0,\ \pi \text{ per } K_1 > 0, \\ &\text{II)}\ \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{-K_1/2K_2} \text{ per } -2K_2 < K_1 < 0, \\ &\text{III)}\ \theta = \pi/2 \text{ per } K_1 < -2K_2. \end{aligned} \tag{46,1}$$

Le fasi I e III sono dei tipi « asse facile » e « piano facile », rispettivamente. Nella fase II il vettore di magnetizzazione non ha orientazione fissa (come nelle fasi I e III), e al variare della temperatura la sua direzione cambia con continuità tra i valori dell'angolo $\theta = 0$ (o $\theta = \pi$) e $\theta = \pi/2$; la simmetria di questa fase (talvolta detta *angolare*) è inferiore alla simmetria sia della fase I sia della fase III. Le transizioni tra le fasi I e II e tra le fasi II e III si realizzano come transizioni di fase di seconda specie a temperature T_1 e T_2 determinate dalle condizioni

$$K_1(T_1) = 0,\ K_1(T_2) + 2K_2(T_2) = 0. \tag{46,2}$$

Più avanti supporremo, per fissare le idee, che $K_1 > 0$ per $T > T_1$. Allora $T_2 < T_1$ (se è supposto che $K_2 > 0$).

Se esiste un campo magnetico il potenziale termodinamico è

$$\tilde{\Phi} = K_1 \operatorname{sen}^2\theta + K_2 \operatorname{sen}^4\theta - \mathbf{HM}; \tag{46,3}$$

qui sono scritti i soli termini dipendenti dalla direzione $\mathbf{M}$. In prossimità del punto di transizione tra le fasi I e II da parametro d'ordine funge una piccola grandezza $\operatorname{sen}\theta \approx \theta \equiv \eta$. In questa zona il potenziale termodinamico in campo magnetico trasversale debole $H = H_x$ assume la forma

$$\tilde{\Phi} = K_1\eta^2 + K_2\eta^4 - MH_x\eta,$$

ove $K_1 = \text{cost} \cdot (T - T_1)$. Di qui troviamo in modo ordinario (cfr. § 39) che nel punto di transizione la suscettività trasversale diventa infinita (secondo una legge analoga a quella espressa dalle formule (39,6-7)):

$$\chi_\perp = \left(\frac{\partial M_x}{\partial H_x}\right)_{H_x \to 0} \approx M \left(\frac{\partial \theta}{\partial H_x}\right)_{H_x \to 0}.$$

Analogamente, in prossimità del punto di transizione tra le fasi II e III da parametro d'ordine funge un piccolo angolo $\eta = \pi/2 - \theta$. Nel campo longitudinale $H = H_z$ il potenziale termodinamico contiene un termine $-MH_z\eta$ e nel punto di transizione diventa infinita la suscettività longitudinale $\chi_{\parallel}$.

Tutte le considerazioni precedenti non superano i limiti della teoria delle transizioni di fase di Landau. Notiamo che per le transizioni di orientazioni questa teoria è praticamente valida senza eccezioni. La vicinanza ammissibile della teoria di Landau al punto di transizione è determinata da un criterio (si veda più avanti la (47,1)) nel cui denominatore figura il cubo del coefficiente α nel termine (43,1) del potenziale termodinamico, legato alla distribuzione non omogenea del parametro d'ordine. Nel caso in esame questo termine è legato all'interazione di scambio nei corpi ferromagnetici, mentre i termini di sviluppo rispetto al parametro stesso η sono legati alle interazioni relativistiche. È questa circostanza a rendere estremamente stretto l'intervallo di temperatura attorno al punto di transizione ove la teoria di Landau risulta inapplicabile.

Supponiamo ora che $K_2 < 0$. Allora la fase angolare II è in generale instabile (U_{an} ha un massimo e non minimo), cosicché la fase I di asse facile deve passare immediatamente alla fase III di piano facile. È chiaro a priori che questa transizione non può essere di seconda specie: nessuno dei gruppi di simmetria della fase I o III non è sottogruppo del gruppo di simmetria dell'altra fase. La transizione si realizza come quella di prima specie nel punto $T = T_0$ definito dalla condizione di uguaglianza dei potenziali termodinamici di ambedue le fasi (che si riduce all'uguaglianza dei valori di U_{an}):

$$K_1(T_0) + K_2(T_0) = 0. \tag{46,4}$$

Il punto T_0 giace tra i punti T_1 e T_2 definiti dalle equazioni (46,2) (ove ora $T_2 > T_1$). In questo caso le temperature T_1 e T_2 determinano le frontiere di metastabilità delle fasi I e II, rispettivamente (all'esterno di queste frontiere U_{an} ha per $\theta = 0$ o $\theta = \pi/2$ massimo e non minimo).

Le transizioni di orientazione possono aver luogo non al solo variare della temperatura (in questi casi si parla di transizioni spontanee), ma anche al variare del campo magnetico applicato al corpo (transizioni indotte dal campo). I punti di queste transizioni descrivono linee nei diagrammi di fase nelle coordinate H, T (per data

orientazione cristallografica del vettore **H**). A titolo di esempio consideriamo i diagrammi di fase dello stesso ferromagnete uniassico nel campo H_z parallelo all'asse esagonale.

Il campo longitudinale non cambia la simmetria della fase di asse facile (FAF nella fig. 25). Ma la fase di piano facile si trasforma in angolare (FA) poiché il campo fa uscire la magnetizzazione **M** dal piano di base.

Consideriamo dapprima il caso in cui $K_2 > 0$. Le zone di ambedue le fasi sono separate da linee di transizioni di fase di seconda specie uscenti dal punto T_1 sull'asse delle ascisse (linee tratteggiate

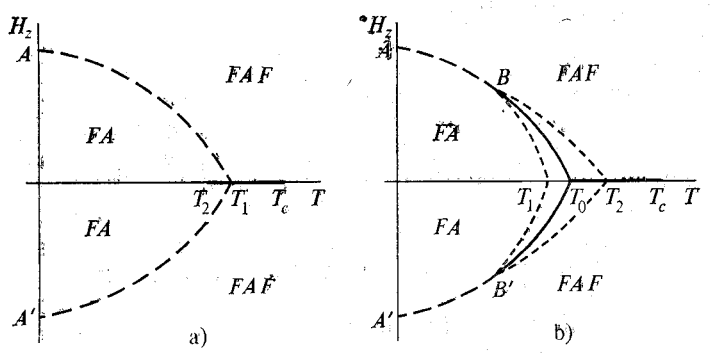


Fig. 25

nella fig. 25, *a*). Le parti superiore e inferiore del diagramma corrispondono a due direzioni reciprocamente opposte del piano longitudinale e, rispettivamente, a due segni diversi della componente longitudinale M_z. In prossimità della curva AT_1 l'angolo θ è piccolo (in prossimità della curva $A'T_1$ è piccolo l'angolo $\pi - \theta$). A meno dei termini del quarto ordine rispetto a θ ricaviamo dalla (46,3)

$$\tilde{\Phi} = (K_1 + 1/2MH_z)\,\theta^2 + (K_2 - 1/3K_1 - 1/24MH_z)\,\theta^4. \qquad (46,5)$$

L'equazione della curva AT_1 è data dall'uguaglianza a zero del coefficiente di θ^2:

$$K_1(T) + 1/2MH_z = 0 \qquad (46,6)$$

(ricordiamo che $K_1 < 0$ per $T < T_1$); la curva $A'T_1$ è definita, evidentemente, dalla stessa equazione con altro segno nel secondo termine e simmetrica rispetto alla curva AT_1.

Il segmento T_2T_c sull'asse delle ascisse è la linea delle transizioni di fase di prima specie ove sono in equilibrio reciproco due fasi con diverso segno di M_z. La transizione di fase di seconda specie, realizzabile in assenza di campo nel punto T_2, scompare se esiste il campo; il punto T_2 è un punto critico nel diagramma di fase H, T, ossia punto in cui termina la linea di transizioni di prima specie.

Un altro punto termine di questa linea è il punto di Curie T_c (in cui per $H_z = 0$ scompare la magnetizzazione).

Nel caso in cui $K_2 < 0$ (fig. 25, *b*) il tratto iniziale della frontiera ABT_0 che separa le zone di ambedue le fasi nel diagramma H, T (e analogamente per la frontiera $A'B'T_0$) è la linea di transizioni di fase di prima specie (curva continua BT_0); da un suo lato e dall'altro si trovano zone di metastabilità delle due fasi delimitate dalle curve tratteggiate BT_1 e BT_2 [1]). Nel punto B (punto tricritico) la linea di transizioni di prima specie si trasforma in quella di transizioni di seconda specie (curva tratteggiata BA; la sua equazione è la (46,6)). Le coordinate di questo punto sono determinate dall'annullamento contemporaneo dei coefficienti di θ^2 e θ^4 nel potenziale termodinamico (46,5), cioè dalle uguaglianze [2])

$$MH_z = 2\,|\,K_1(T)\,|, \quad K_1(T) = 4K_2(T). \tag{46,7}$$

Infine, il segmento T_0T_c è la linea di transizioni di prima specie tra le fasi con magnetizzazioni dirette in modo opposto $M_z = \pm M$.

§ 47. *Fluttuazioni in un corpo ferromagnetico*

La teoria delle transizioni di fase di Landau, sulla quale è basata l'esposizione del materiale nel § 39, non tiene conto delle fluttuazioni del parametro d'ordine, ragione per cui essa risulta inapplicabile in prossimità sufficiente al punto di Curie. La regione di applicazione di questa teoria è definita dal criterio

$$\frac{|t|}{T_c} \gg \frac{T_c B^2}{a\alpha^3}, \tag{47,1}$$

ove $t = T - T_c$, a e B sono coefficienti che figurano nello sviluppo (39,3-4) e α è l'ordine di grandezza del tensore α_{ik} nella formula (43,1). Al tempo stesso, deve essere, ovviamente, $|\,t\,| \ll T_c$ come condizione di vicinanza al punto di Curie [3]).

Per segno opposto della disuguaglianza (47,1) nella zona *di fluttuazione* a giocare ruolo decisivo sono le fluttuazioni del parametro d'ordine. Una teoria statistica rigorosa per il punto di Curie di un ferromagnete in questa zona dovrebbe essere basata sull'hamiltoniano efficace

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ at\mathbf{M}^2 + B(\mathbf{M}^2)^2 + \frac{\bar{\alpha}}{2}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} - \mathbf{HM} \right\} dV. \tag{47,2}$$

[1]) È supposto che la superficie di separazione tra le fasi coesistenti sia parallela al campo magnetico in modo che H_z su questa frontiera è continua.

[2]) Al punto tricritico nel diagramma di fase H, T si riferisce tutto quanto ottenuto in V § 150 (nei limiti della teoria di Landau) per il punto tricritico nel piano P, T.

[3]) Qui e più avanti nel presente paragrafo si usano risultati ottenuti in V §§ 146-149 che dovrebbero essere noti al lettore e in parte si ricordano di nuovo per dare maggiore coerenza all'esposizione. Faremo a meno di rimandi corrispondenti.

La funzione **M** (**r**) è supposta variante lentamente in questo caso, cioè nel senso che nel suo sviluppo di Fourier entrano i soli vettori d'onda piccoli rispetto alla distanza atomica caratteristica inversa. I coefficienti a, B, $\bar{\alpha}$ coincidono con i coefficienti di sviluppo nella teoria di Landau, essendo cioè costanti indipendenti dalla temperatura (il termine con derivate è scritto qui per semplicità sotto l'ipotesi che il cristallo sia a simmetria cubica; il coefficiente in esso è denotato con $\bar{\alpha}$ a differenza del coefficiente vero e proprio α, si veda più avanti). L'hamiltoniano efficace (47,2) corrisponde all'approssimazione di scambio e in esso è trascurata l'energia dell'anisotropia; in questa approssimazione si devono trascurare le fluttuazioni del campo magnetico dovute alle fluttuazioni della magnetizzazione (cioè dell'energia magnetostatica di fluttuazioni; cfr. IX § 70). Per l'approssimazione di scambio è caratteristica la « degenerazione » del problema: il parametro d'ordine **M** ha tre componenti ma l'hamiltoniano efficace è invariante rispetto alle rotazioni di questo vettore di un medesimo angolo in tutto lo spazio.

Per la descrizione del comportamento delle grandezze termodinamiche in prossimità del punto di transizione di fase di seconda specie introduciamo *indici critici* secondo definizioni che ripetiamo qui in applicazione al punto di Curie dei ferromagneti. L'indice α determina la dipendenza di temperatura del calore specifico C_p dai due lati del punto di Curie in assenza di campo magnetico [1])

$$C_p \backsim |t|^{-\alpha} \text{ per } \mathbf{H} = 0. \tag{47,3}$$

L'indice β determina la dipendenza della magnetizzazione spontanea dalla temperatura sotto il punto di Curie:

$$M \backsim (-t)^{\beta} \text{ per } t < 0, \ \mathbf{H} = 0. \tag{47,4}$$

L'indice γ determina la dipendenza da t della suscettività magnetica della fase paramagnetica:

$$\chi \backsim t^{-\gamma} \text{ per } t > 0, \ \mathbf{H} = 0 \tag{47,5}$$

(sul suo comportamento per $t < 0$ si veda più avanti). La dipendenza della magnetizzazione dal campo nel punto di Curie stesso si scrive nella forma

$$M \backsim H^{1/\delta}, \ t = 0. \tag{47,6}$$

La dipendenza dalla temperatura del raggio di correlazione delle fluttuazioni della magnetizzazione è determinata dall'indice ν:

$$r_c \backsim |t|^{-\nu} \text{ per } \mathbf{H} = 0. \tag{47,7}$$

[1]) Si tratta della parte « singolare » del calore specifico. Ciò vuol dire che per $\alpha < 0$ il calore specifico si comporta come $C_p = C_{p0} + \text{cost} \cdot |t|^{|\alpha|}$. Non confondere l'indice α con il coefficiente α nelle formule (47,1), (47,2) e più avanti!

Nel punto di Curie stesso la funzione di correlazione decresce con la distanza secondo la legge di potenza [1])

$$G_{ik}(r) = \langle \delta M_i(0)\, \delta M_k(\mathbf{r}) \rangle \sim r^{-(1+\zeta)} \quad \text{per } t = 0, \quad \mathbf{H} = 0. \qquad (47,8)$$

Gli indici critici sono legati mutuamente da relazioni alcune delle quali sono conseguenza dell'*ipotesi dell'invarianza di scala.* Queste relazioni sono di carattere universale e non dipendono, in particolare, dal numero di componenti del parametro d'ordine; esse consentono di esprimere tutti gli indici suindicati in funzione di ciascuna coppia di essi.

Nella tabella 2 sono dati valori degli indici critici per una tran-

Tabella 2

n	α	β	γ	ν	δ	ζ
1	0,110	0,325	1,240	0,630	0,48	0,031
2	—0,007	0,346	1,315	0,669	0,48	0,033
3	—0,115	0,364	1,387	0,705	0,48	0,033

sizione ferromagnetica. A titolo di confronto sono dati valori per altre degenerazioni multiple di n (n è il numero di componenti del parametro d'ordine $\mathbf{M}$ in un operatore di Hamilton efficace della forma (47,2)); a un ferromagnetico tridimensionale nell'approssimazione di scambio corrisponde $n = 3$ [2]).

Nella fase paramagnetica la funzione di correlazione a distanze $r \gg r_c$ decresce secondo una legge esponenziale. Nella fase ferromagnetica, invece, si devono distinguere fluttuazioni con e senza cambiamento del valore assoluto del vettore $\mathbf{M}$. Qui proprio si rivela la degenerazione del problema del punto di Curie nell'approssimazione di scambio.

Questa distinzione non esiste se la variazione del vettore $\mathbf{M}$ e della sua direzione si verifica a distanze piccole: $r \ll r_c$; la funzione di correlazione di tutte le fluttuazioni segue in questo caso la stessa legge (47,8). A distanze $r \gg r_c$ (i vettori d'onda $kr_c \ll 1$) la fluttuazione della direzione $\mathbf{M}$ aumenta «anomalmente» a causa di diminuzione delle spese di energia per questa deviazione dall'equilibrio (per una rotazione uniforme della magnetizzazione lungo tutto il cristallo, $k \to 0$, in generale non esistono spese energetiche). A queste distanze la funzione di correlazione delle fluttuazioni della direzione $\mathbf{M}$ si può trovare in via termodinamica.

[1]) Ovunque studiamo corpi tridimensionali ordinari.

[2]) I valori dei piccoli indici α e ζ sono presi da calcoli numerici (*Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.* — Phys. Rev., 1980, v. B 21, p. 3976). Gli altri indici sono calcolati in seguito sulla base di questi due.

La lentezza di variazione di **M** consente di individuare nel potenziale termodinamico termini legati a questa variazione scrivendo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0(T, M) + \frac{\alpha}{2} \int \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} dV, \tag{47,9}$$

ove $\mathcal{F}_0$ si riferisce a un corpo magnetizzato in modo uniforme [1]. Sottolineiamo che qui si tratta del potenziale termodinamico vero e proprio; inoltre, il coefficiente α (funzione della temperatura) non coincide con il coefficiente $\bar{\alpha}$ nell'operatore efficace di Hamilton.

Per una piccola rotazione del vettore **M** (senza cambiamento della sua grandezza) il termine $\mathcal{F}_0$ (T, M) non cambia. Se una determinata direzione **M** considerare come l'asse z, una piccola deviazione da questa direzione si può descrivere mediante un piccolo vettore bidimensionale $\delta \mathbf{M}_\perp \equiv \mathbf{M}_\perp$ nel piano xy. La variazione corrispondente del potenziale termodinamico è [2]

$$\delta\mathcal{F} = \frac{\alpha}{2} \int \frac{\partial \delta \mathbf{M}_\perp}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \mathbf{M}_\perp}{\partial x_i} dV. \tag{47,10}$$

Rappresentando il vettore $\delta \mathbf{M}_\perp$ nella forma della serie di Fourier

$$\delta \mathbf{M}_\perp = \sum_{\mathbf{k}} \delta \mathbf{M}_{\perp \mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}, \quad \delta \mathbf{M}_{\perp \mathbf{k}} = \delta \mathbf{M}^*_{\perp, -\mathbf{k}},$$

otteniamo

$$\delta\mathcal{F} = \frac{1}{2} V\alpha \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\delta \mathbf{M}_{\perp \mathbf{k}}|^2,$$

e in seguito per il quadrato medio della fluttuazione abbiamo

$$\langle \delta M_{\alpha \mathbf{k}} \delta M_{\beta \mathbf{k}} \rangle = \frac{T}{V\alpha k^2} \delta_{\alpha\beta}, \tag{47,11}$$

ove α, β sono due indici vettoriali nel piano xy. La funzione di correlazione delle coordinate corrispondente si scrive così [3]:

$$G_{\alpha\beta}(r) = \frac{T}{4\pi\alpha r} \delta_{\alpha\beta}. \tag{47,12}$$

---

[1]) A rigore, qui si dovrebbe parlare non di $\mathcal{F}$ ma del potenziale termodinamico Ω (cfr. V § 146). Tuttavia, poiché in virtù del teorema delle piccole aggiunte il termine con derivate, che presenta qui interesse, ha la forma uguale in ambedue i potenziali, scriveremo il potenziale $\mathcal{F}$.

[2]) I calcoli successivi sono completamente analoghi a quelli in V § 146.

[3]) La formula (47,12) può essere dedotta anche nei limiti della teoria microscopica spin-ondulatoria. Essa si verifica indipendentemente dalla vicinanza al punto di Curie; lontano da quest'ultimo occorre soltanto che r sia grande rispetto a dimensioni atomiche (cfr. IX § 71, problema 4; nelle ultime due formule della risoluzione del problema è stato commesso un errore: le espressioni di φ_{ik} devono essere raddoppiate). Al tempo stesso, trascurando l'energia dell'anisotropia magnetica limitiamo con ciò la zona di applicabilità della formula (47,12) superiormente. Per un cristallo uniassico con l'energia dell'anisotropia (41,1) deve essere $r \ll \sqrt{\beta/\alpha}$.

In tal modo, la funzione di correlazione delle fluttuazioni della direzione **M** nella fase ferromagnetica decresce a distanze $r \gg r_c$ secondo una legge di potenza lenta come $1/r$ (mentre la correlazione delle fluttuazioni della grandezza M decresce più rapidamente).

Ricorrendo all'ipotesi dell'invarianza di scala si può ora determinare una dipendenza dalla temperatura della grandezza termodinamica α, esprimendo questa dipendenza mediante gli indici critici già introdotti. Come è stato detto, per $r \ll r_c$ le funzioni di correlazione di tutte le fluttuazioni della magnetizzazione, compresa la sua direzione, seguono la medesima legge (47,8). Uno degli aspetti dell'invarianza di scala consiste esattamente nel fatto che la distanza caratteristica che separa le due leggi limite coincide con r_c. In altre parole, per $r \sim r_c$ ambedue le leggi devono dare un medesimo ordine di grandezza della funzione G. Per $r \sim r_c$ la sua dipendenza dalla temperatura, determinata secondo le formule (47,7-8), è

$$G \backsim r_c^{-(1+\zeta)} \backsim (-t)^{\nu(1+\zeta)}.$$

Ma in accordo con la formula (47,12) abbiamo

$$G \backsim (\alpha r_c)^{-1} \backsim \alpha^{-1} (-t)^{\nu}.$$

Confrontando entrambe le espressioni troviamo

$$\alpha \backsim (-t)^{\nu\zeta} \tag{47,13}$$

(*P.C. Hohenberg, P.C. Martin*, 1965). Quindi, per $T \to T_c$ la grandezza α tende lentamente (per piccolezza dell'indice ζ) all'infinito. Ricordiamo che nella teoria di Landau α tende a una grandezza finita non nulla [1]).

Per $\mathbf{H} \neq 0$ al potenziale termodinamico (47,9) va associato un termine $-\int HM_z dV$ (se esiste il campo, la direzione media **M**, l'asse z, coincide ovviamente con la direzione **H**). Per fluttuazione della direzione **M** dalla condizione $\mathbf{M}^2 =$ costante ricaviamo

$$2M\delta M_z + \delta \mathbf{M}_\perp^2 = 0.$$

Perciò alla formula (47,10) esprimente il cambiamento di $\mathcal{F}$ per fluttuazione si aggiunge un termine

$$-\int H\delta M_z \, dV = -\frac{H}{2M} \int (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \, dV.$$

[1]) Sottolineiamo che la possibilità di determinazione della dipendenza $\alpha(t)$ è legata alla degenerazione del problema. Per la stessa ragione è possibile la determinazione della dipendenza dalla temperatura della densità superfluida ρ_s dell'elio liquido in prossimità del suo λ-punto; in questo caso la degenerazione multipla del problema è $n = 2$ (cfr. IX § 28). In questi casi ruolo analogo giocano αM^2 e ρ_s, rispettivamente.

Evidentemente, ciò implicherà la sostituzione di αk^2 nella formula (47,11) con $\alpha k^2 + H/M$ in modo che

$$\langle \delta M_\alpha \, \delta M_\beta \rangle = \frac{T}{V(\alpha k^2 + H/M)} \, \delta_{\alpha\beta}. \tag{47,14}$$

Queste formule consentono di trovare la suscettività della fase ferromagnetica, cioè la derivata

$$\chi = \frac{\partial}{\partial H} \langle \delta M_z \rangle = -\frac{1}{2M} \frac{\partial}{\partial H} \langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \rangle. \tag{47,15}$$

Sostituendovi $\langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \rangle$ dalla (47,14) e passando dalla sommatoria rispetto a $\mathbf{k}$ all'integrazione, troviamo

$$\chi = \frac{T}{VM^2} \int \frac{1}{(\alpha k^2 + H/M)^2} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3},$$

e dopo il calcolo dell'integrale otteniamo infine [1])

$$\chi = \frac{T}{8\pi (\alpha M)^{3/2} H^{1/2}}. \tag{47,16}$$

Vediamo così che nell'approssimazione di scambio le fluttuazioni della direzione $\mathbf{M}$ privano la suscettività χ nella fase ferromagnetica del suo senso letterale, ossia essa cresce indefinitamente per $H \to 0$. La formula (47,16) è applicabile non soltanto in prossimità del punto di Curie [2]).

Al denominatore della formula (47,16) con M si deve intendere il suo valore per $H = 0$. Nella zona di fluttuazione (in prossimità del punto di Curie), se consideriamo le dipendenze dalla temperatura di M e α date dalle formule (47,4) e (47,13), troviamo che nella fase ferromagnetica

$$\chi \propto (-t)^{-3(\beta - \nu\zeta)/2} H^{-1/2}, \quad t < 0. \tag{47,17}$$

Nella regione (delle temperature) di applicabilità della teoria di Landau esiste una zona di valori di H in cui prevale un termine ordinario nella suscettività (39,7). Sostituendo infatti $M \sim (-at/B)^{1/2}$ nella formula (47,16), otteniamo la condizione di questa prevalenza nella forma

$$\sqrt{H} \gg T_c B^{3/4} (a\,|t|)^{1/4} \alpha^{-3/2}.$$

---

[1]) L'integrale è definito dalla regione dei valori $k^2 \sim H/M\alpha$, ciò che per H sufficientemente piccoli è compatibile con la condizione di applicabilità della formula (47,14): $kr_c \ll 1$.

[2]) Essa può essere dedotta anche mediante la teoria spin-ondulatoria (cfr. IX § 71, problema 2). Se trascuriamo l'anisotropia magnetica e l'energia magnetostatica delle fluttuazioni, ciò ne limita l'applicabilità dalla condizione (per cristalli uniassici) $H \gg \beta M$ o $H \gg 4\pi M$.

D'altra parte, nella teoria di Landau il campo H si può supporre debole se $MH \ll AM^2$, cioè

$$H \ll (a\,|t|)^{3/2}\,B^{-1/2}.$$

La condizione di compatibilità di ambedue le disuguaglianze scritte coincide con la condizione (47,1) di applicabilità della teoria di Landau.

L'approssimazione di scambio risulta inapplicabile in prossimità sufficiente del punto di Curie quando (per diminuzione dell'energia di scambio) diventa notevole l'energia di anisotropia. In questo caso cambia il numero di componenti del parametro d'ordine; così, esso diventa a una componente in un ferromagnete uniassico del tipo asse facile (M_z al posto di **M**; cfr. la fine del § 40). Nei limiti della teoria di Landau questa circostanza non incide sulle leggi della dipendenza dalla temperatura della magnetizzazione spontanea e della suscettività magnetica. Ma essa si sente notevolmente nella regione di fluttuazione: crescono indefinitamente le fluttuazioni della sola componente M_z, mentre le fluttuazioni di M_x e M_y restano finite. Ciò implica un cambiamento dei valori degli indici critici e la comparsa della dipendenza dalla temperatura dei coefficienti di anisotropia. Il problema si rende più complicato per il fatto che può essere necessario tener conto anche dell'energia magnetostatica di fluttuazioni del campo magnetico; non ci soffermiamo qui su questa situazione molto complicata.

§ 48. *Corpo antiferromagnetico in prossimità del punto di Curie*

Alla pari del ferromagnetismo la struttura antiferromagnetica va creata essenzialmente dall'interazione di scambio isotropa tra elettroni, mentre le interazioni relativistiche più deboli stabiliscono l'orientazione cristallografica delle magnetizzazioni dei sottoreticoli [1]). Alcuni antiferromagneti già noti attualmente sono estremamente differenti per loro struttura e, quindi, anche per loro proprietà magnetiche concrete.

A titolo di illustrazione ci limitiamo a un caso elementare caratteristico (ma al tempo stesso importante) di un antiferromagnete uniassiale con due sottoreticoli magnetici antiparalleli. Gli atomi di questi sottoreticoli occupano nodi equivalenti del reticolo cristallino (vale a dire che tra elementi di simmetria del gruppo magnetico

[1]) L'idea che l'interazione di scambio possa condurre a stato con sottoreticoli e momenti magnetici antiparalleli è stata espressa originariamente da *L. Néel* (1932). Indipendentemente da lui la stessa idea è stata avanzata da *L. D. Landau* (1933); fra l'altro, egli ha formulato la rappresentazione dello stato antiferromagnetico come fase termodinamica diversa dalla fase paramagnetica, e della necessità di esistenza di un punto di transizione tra queste fasi. Noi tratteremo questo punto come *punto antiferromagnetico di Curie*.

spaziale esistono rotazioni o riflessioni che fanno permutazioni tra atomi dei sottoreticoli distinti); in caso contrario la simmetria non chiederebbe un'uguaglianza rigorosa dei valori assoluti dei momenti magnetici dei sottoreticoli e il cristallo sarebbe ferromagnetico.

Indichiamo con $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ i momenti magnetici riferiti ad unità di volume dei due sottoreticoli. Come parametro d'ordine nullo nella fase paramagnetica e diverso da zero nella fase antiferromagnetica consideriamo la differenza

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \tag{48,1}$$

che si chiama *vettore antiferromagnetico*. Quanto alla magnetizzazione nulla in assenza di campo magnetico, essa è rappresentata dalla somma $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

Tutte le trasformazioni rispetto al vettore $\mathbf{L}$ si dividono in due categorie: le une permutano soltanto gli atomi all'interno del «loro» sottoreticolo, le altre permutano gli atomi di diversi sottoreticoli. Nel primo caso $\mathbf{L}$ si trasforma semplicemente come vettore assiale e nel secondo caso, inoltre, cambia di segno.

In prossimità del punto di Curie il vettore $\mathbf{L}$ è piccolo. Nei limiti della teoria di Landau il potenziale termodinamico $\tilde{\Phi}$ in questa regione è sviluppabile in potenze di $\mathbf{L}$ e $\mathbf{M}$ (per la prima volta questo sviluppo è stato studiato da *Landau*, 1933). Tuttavia, poiché la magnetizzazione compare in presenza del campo $\mathbf{H}$ è più opportuno eseguire lo sviluppo in potenze di $\mathbf{L}$ e $\mathbf{H}$. Per un cristallo uniassico esso ha la forma

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + AL^2 + BL^4 + D(\mathbf{HL})^2 + D'H^2L^2 - \frac{1}{2}\chi_p H^2 + \\ + \frac{1}{2}\beta(L_x^2 + L_y^2) - \frac{1}{2}\gamma(H_x^2 + H_y^2) - \frac{H^2}{8\pi}. \tag{48,2}$$

I primi cinque termini (dopo Φ_0) sono indipendenti dall'orientazione cristallografica dei vettori $\mathbf{H}$ e $\mathbf{L}$; questi termini sono della natura di scambio. I due termini successivi sono legati alle interazioni relativistiche; l'asse z, come si suole, è considerato coincidente con l'asse principale di simmetria del cristallo. Un termine lineare rispetto a $\mathbf{H}$ della forma $\mathbf{HL}$ è interdetto dalla condizione di invarianza rispetto alle trasformazioni che fanno cambiare $\mathbf{L}$ di segno.

Se $\beta > 0$, il vettore antiferromagnetico $\mathbf{L}$ è diretto lungo l'asse z (antiferromagnete del tipo asse facile). Se $\beta < 0$, $\mathbf{L}$ giace nel piano di base (antiferromagnete del tipo piano facile). Nel primo caso la comparsa dell'antiferromagnetismo è determinata dall'annullamento della funzione $A(T)$ che è coefficiente di L_z^2, nel secondo caso dall'annullamento della somma $A + \beta/2$, coefficiente di $L_x^2 + L_y^2$.

Nel seguito considereremo un antiferromagnete del tipo asse facile ($\beta > 0$). In prossimità del punto di Curie poniamo, come si suole, $A = a\,(T - T_c)$ e supponiamo il coefficiente B uguale al suo valore per $T = T_c$; in questo caso $B > 0$ è come condizione di stabilità dello stato con $L = 0$ per $T = T_c$. Nella fase paramagnetica $A > 0$ e $L = 0$.

Nella fase antiferromagnetica $A < 0$ e la minimizzazione del potenziale $\tilde{\Phi}$ per $H = 0$ fornisce la seguente dipendenza di L dalla temperatura, caratteristica per la teoria di Landau:

$$L = \sqrt{\frac{a}{2B}\,(T_c - T)}. \qquad (48,3)$$

Derivando il potenziale (48,2) tenendo conto della formula

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\mathbf{H}} = -\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = -\frac{\mathbf{H}}{4\pi} - \mathbf{M},$$

troviamo per $L = 0$, cioè nella fase paramagnetica [1]):

$$M_x = (\chi_p + \gamma)\,H_x,\ M_y = (\chi_p + \gamma)\,H_y,\ M_z = \chi_p H_z. \qquad (48,4)$$

La costante γ implica anisotropia della suscettività magnetica in questa fase. A causa della sua origine relativistica $|\gamma| \ll \chi_p$. Trascuriamo più avanti questa costante in modo che χ_p sarà la suscettività isotropa per $T > T_c$ [2]).

Nella fase antiferromagnetica, invece, per $H \to 0$ (trascurando cioè la dipendenza del valore d'equilibrio di $\mathbf{L}$ dal campo) abbiamo

$$\mathbf{M} = \chi_p\mathbf{H} - 2D\mathbf{L}\,(\mathbf{LH}) - 2D'L^2\mathbf{H}. \qquad (48,5)$$

Se il campo è diretto perpendicolarmente a $\mathbf{L}$, allora

$$\mathbf{M} = \chi_\perp\mathbf{H},\quad \chi_\perp = \chi_p - 2D'L^2 = \chi_p - \frac{D'a}{B}\,(T_c - T). \qquad (48,6)$$

Nel campo longitudinale, invece, abbiamo

$$\mathbf{M} = \chi_\parallel\mathbf{H},\quad \chi_\parallel = \chi_\perp - 2DL^2 = \chi_p - \frac{(D + D')\,a}{B}\,(T_c - T). \qquad (48,7)$$

Badiamo al fatto che l'anisotropia della suscettività resta anche trascurando le interazioni relativistiche, cioè ha un'origine di scambio.

Sottolineiamo anche che la suscettività resta finita e continua nel punto di Curie stesso e che le sue derivate prime fanno un balzo. In ciò consiste una differenza notevole dai ferromagneti la suscet-

---

[1]) Il termine $-H^2/8\pi$ nell'espressione (48,2) è separato allo scopo che la derivazione degli altri termini rispetto a $\mathbf{H}$ dia direttamente $\mathbf{M}$.

[2]) Infatti, in tutti i casi noti nel punto di Curie antiferromagnetico la sostanza diventa paramagnetica, cioè $\chi_p > 0$. Però il segno di χ_p non può essere argomentato dalle sole considerazioni termodinamiche.

tività dei quali diventa infinita nel punto di transizione. Questa distinzione tra punti di Curie ferro- e antiferromagnetici è dovuta al carattere diverso di loro variazione sotto influsso del campo magnetico. Nei ferromagneti un campo debole a piacere già smussa la transizione poiché, magnetizzando la fase paramagnetica, esso elimina la differenza di simmetria di ambedue le fasi. Ma il campo magnetico non può creare assestamento antiferromagnetico; la differenza in simmetria tra le due fasi si conserva e la transizione avviene bruscamente.

Con approssimazione ammissibile dallo sviluppo (48,2) i coefficienti D e D' nelle formule (48,6-7) si devono supporre uguali ai loro valori nel punto $T = T_c$. Perciò i balzi delle derivate della suscettività sono [1])

$$\frac{\partial\chi_p}{\partial T}-\frac{\partial\chi_\perp}{\partial T}=-\frac{aD'}{B}, \quad \frac{\partial\chi_p}{\partial T}-\frac{\partial\chi_\parallel}{\partial T}=-\frac{a(D+D')}{B}. \tag{48,8}$$

Torniamo all'espressione (48,2) per $\tilde{\Phi}$. Dalla direzione del vettore **L** dipendono i termini con i coefficienti D e β. Supporremo che $D > 0$ (cioè $\chi_\perp > \chi_\parallel$) e, come precedentemente, $\beta > 0$ sia un antiferromagnete del tipo asse facile. Se il campo magnetico è perpendicolare all'asse z, dalla forma di questi termini risulta con chiarezza che al minimo di $\tilde{\Phi}$ corrispondono i valori $L_x = L_y = 0$, vale a dire che il vettore **L** sempre è diretto lungo l'asse z. Se, invece, il campo è diretto lungo l'asse z, si vede allora, quando l'energia magnetica nel campo (il primo dei termini suindicati) diventa uguale per grandezza all'energia dell'anisotropia, deve avvenire un cambiamento della direzione **L**, ossia il vettore deve ruotare verso il piano di base. Questa rotazione (*capovolgimento* dei sottoreticoli [2])) si produce a balzo per un determinato valore del campo $H = H_f$ (*L. Néel*, 1936).

Infatti, i termini indicati nella (48,2) si possono scrivere nella forma

$$H_z^2DL^2+L^2\left(-DH_z^2+\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}^2\theta$$

ove θ è l'angolo compreso tra **L** e l'asse z. Evidentemente, al minimo di $\tilde{\Phi}$ corrisponde il valore $\theta = 0$ se $H_z < H_f$ ove

$$H_f^2=\frac{\beta}{2D}=\frac{\beta L^2}{\chi_\perp-\chi_\parallel}. \tag{48,9}$$

Se il campo $H_z > H_f$, all'equilibrio corrisponde il valore $\theta = \pi/2$, ossia il vettore **L** è perpendicolare all'asse z. La stessa situazione si

[1]) Le considerazioni puramente termodinamiche non consentono di trarre conclusioni generali sui segni di D e D'. Infatti, il balzo della derivata $\partial\chi_\parallel/\partial T$ sempre è negativo; ciò vuol dire che $D + D' > 0$. Di solito, è negativo anche il balzo di $\partial\chi_\perp/\partial T$ e in prossimità del punto di Curie $\chi_\perp > \chi_\parallel$; ciò significa che $D > 0$, $D' > 0$.

[2]) Spin flop — in inglese.

conserva lontano dal punto di Curie. Il campo di capovolgimento H_f dipende dalla temperatura, e dalle considerazioni precedenti risulta che la linea $H = H_f(T)$ nel piano T, H è la linea di transizioni di fase di prima specie [1]).

Nei campi magnetici sufficientemente forti la struttura antiferromagnetica non può essere termodinamicamente stabile a priori; energeticamente utile risulta l'orientazione parallela dei momenti magnetici di entrambi i sottoreticoli lungo il campo. La distruzione della struttura antiferromagnetica è dovuta al cambiamento della simmetria e si verifica mediante una transizione di fase di seconda specie. Quindi, nel piano T, H la regione di esistenza della fase antiferromagnetica è limitata da una curva $H = H_c(T)$. La distruzione dell'antiferromagnetismo deve cominciare quando l'energia magnetica diventa uguale all'energia di scambio. Lontano dal punto di Curie l'ordine di grandezza del campo critico è dato dalla stima $\mu H_c \sim T_c$ (μ è il momento magnetico atomico). All'avvicinarsi al punto di Curie H_c decresce e si annulla in questo punto stesso. La dipendenza $H_c(T)$ è facile trovare in questa regione mediante la stessa espressione (48,2) per il potenziale termodinamico.

È stato mostrato precedentemente che se il campo **H** è perpendicolare all'asse z il vettore **L** sempre è parallelo allo stesso asse. I termini del potenziale termodinamico dipendenti da L sono

$$AL^2 + BL^4 + D'H^2L^2. \tag{48,10}$$

Ne segue che l'esistenza di un campo magnetico implica la sostituzione del coefficiente A con la somma $A + D'H^2$ la cui uguaglianza a zero determina un nuovo punto di transizione. Da questa condizione ricaviamo il campo critico

$$H_c^2 = -\frac{A}{D'} = \frac{a}{D'}(T_c - T). \tag{48,11}$$

Se il campo **H** è parallelo all'asse z, allora per $H < H_f$ il vettore **L** è diretto, come prima, lungo l'asse z, ma i termini nella (48,2) dipendenti da L differiscono da quelli nella (48,10) per sostituzione di D' con $D + D'$. Quindi, in questo caso abbiamo

$$H_c^2 = \frac{a}{D + D'}(T_c - T). \tag{48,12}$$

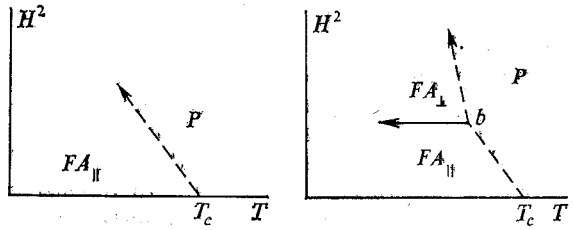
---

[1]) Come è stato sottolineato più volte, lontano dal punto di transizione termini anisotropi nelle espressioni della forma (48,2) conservano senso a prescindere dalla piccolezza di L come termini di sviluppo delle interazioni relativistiche in potenze delle componenti del vettore unitario $\mathbf{l} = \mathbf{L}/L$. Perciò la formula (48,9) ha senso anche lontano dal punto di transizione se in essa si intende con βL^2 proprio il coefficiente nel termine con $(l_x^2 + l_y^2)/2$ nel potenziale termodinamico.

Infine, se $H > H_f$ il vettore L è perpendicolare all'asse z; in questo caso per il campo critico otteniamo analogamente la seguente espressione [1]):

$$H_c^2 = \frac{a}{D'}\left(T_c - T - \frac{\beta}{2a}\right). \qquad (48,13)$$

Nella fig. 26 è rappresentato il diagramma di fase nelle coordinate T, H^2 di un antiferromagnete in prossimità del punto di Curie per le due direzioni del campo studiate precedentemente. Le linee trat-



a) $\mathbf{H} \perp z$ b) $\mathbf{H} \parallel z$

Fig. 26

teggiate sono le transizioni di seconda specie, la linea continua le transizioni di prima specie; P è la fase paramagnetica, $FA_{\parallel}$ e $FA_{\perp}$ sono le fasi antiferromagnetiche con il vettore **L** parallelo o perpendicolare, rispettivamente, all'asse z. Nei limiti della teoria di Landau (nei quali è svolta tutta la discussione) tutte le linee del diagramma sono rette. Nel caso del campo longitudinale nel diagramma esiste un punto bicritico (il punto b nella fig. 26, b) in cui la linea di transizioni di fase di prima specie termina sulla linea di transizioni di seconda specie. Questo punto è analogo al punto bicritico nel piano P, T (cfr. fig. 67 in V § 150). Le sue coordinate sono

$$T_b = T_c - \frac{\beta}{2a}\frac{D+D'}{D}, \quad H_b^2 = \frac{\beta}{2D} \qquad (48,14)$$

(β, D, D' sono valori dei coefficienti per $T = T_b$).

§ 49. *Punto bicritico di un corpo antiferromagnetico*

La teoria di Landau considerata nel paragrafo precedente risulta, di solito, inapplicabile in sufficiente prossimità della linea di punti di transizione di seconda specie nella regione di fluttuazione. Studiamo questa regione in prossimità del punto bicritico nel diagram-

[1]) La deduzione delle formule (48,11-13) nei limiti della teoria di Landau appartiene a *A.S. Borovik-Romanov* (1959).

ma di fase di un antiferromagnete uniassico (del tipo asse facile) nel campo magnetico longitudinale.

L'hamiltoniano efficace di questo problema ha la forma

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ aL^2 \left[T - T_b - \frac{D+D'}{a} (H_f^2 - H_z^2) \right] + \right.$$

$$\left. + BL^4 + DL^2 (H_f^2 - H_z^2) \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \right\} dV. \qquad (49,1)$$

L'espressione integranda è composta dei termini dello sviluppo (48,2) dipendenti da **L** nei quali è posto $A = (T - T_c)\, a$, sono introdotte le notazioni T_b e H_f dalle formule (48,9) e (48,14) e aggiunto un gradiente. Questo operatore di Hamilton coincide per forma con l'hamiltoniano efficace di un ferromagnete uniassico (che non si trova in campo magnetico) differendo da esso per le sole notazioni: **L** al posto di **M**, l'espressione tra parentesi quadre al posto di $T - T_c$ e la grandezza

$$u = 2D (H_f^2 - H_z^2) \qquad (49,2)$$

al posto della costante di anisotropia β dei ferromagneti. Per $H_z = H_f$ questa costante si annulla e l'espressione (49,1) si riduce all'integrale

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ aL^2 (T - T_b) + BL^4 + \frac{\bar{\alpha}}{2} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \right\} dV, \qquad (49,3)$$

coincidente formalmente con l'hamiltoniano efficace di un ferromagnete nell'approssimazione di scambio (47,2). Queste analogie consentono di chiarire alcune proprietà dell'antiferromagnete in questione in prossimità del punto bicritico usando già noti risultati per i ferromagneti (*M.E. Fisher*, *D.R. Nelson*, 1974).

L'uguaglianza $H_z = H_f$ corrisponde alla linea di transizioni di fase di prima specie (capovolgimento dei sottoreticoli, ossia spin flop). L'analogia suindicata permette di concludere che le proprietà termodinamiche dell'antiferromagnete su questa linea in prossimità del punto bicritico coincidono (con appropriato cambiamento del significato delle grandezze) con le proprietà di un ferromagnete di scambio vero e proprio in prossimità del suo punto di Curie. In particolare, all'avvicinarsi al punto bicritico lungo questa linea la grandezza del vettore antiferromagnetico tende a zero secondo la legge

$$L \propto (T_b - T)^{\beta} \qquad (49,4)$$

ove β coincide con l'esponente β nella formula (47,4) [1].

[1]) L'indice γ in questo caso non ha significato fisico diretto in quanto è legato al campo **h** realmente inesistente per un antiferromagnete, campo che figurerebbe nell'hamiltoniano efficace nella forma del termine $-\mathbf{hL}$.

Nell'intorno del punto bicritico, ma non sulla linea di transizioni di prima specie, il parametro u è piccolo ma non nullo. Qualunque piccolo sia questo parametro il suo ruolo aumenta all'avvicinarsi alla linea di transizioni di seconda specie (cfr. l'osservazione alla fine del § 47): il parametro d'ordine diviene a una componente (L_z nella fase $FA_{\parallel}$) o bicomponente (L_x, L_y nella fase $FA_{\perp}$). Più piccolo è il valore del parametro u tanto più piccole sono le dimensioni dell'intorno in cui il suo ruolo è essenziale. Il passaggio dall'andamento con $n = 3$ a quello con $n = 1$ o $n = 2$ si realizza attraverso una regione intermedia. Sembra verosimile l'ipotesi dell'invarianza di scala in questa regione: all'avvicinarsi al punto bicritico cambia la sola scala di misurazione di u. In relazione a ciò compare un nuovo *indice* critico *intermedio* [1]) φ: per il cambiamento della scala della variabile $t = T - T_b$ la scala della variabile u cambia come $|t|^{\varphi}$. L'esponente φ deve essere positivo in quanto un valore u già piccolo a piacere cambia il carattere della transizione.

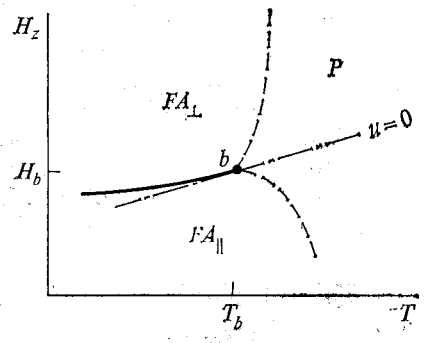


Fig. 27

Accettando questa ipotesi bisogna supporre che la linea delle transizioni di fase in prossimità del punto bicritico sia definita da valori costanti del rapporto $x = u/|t|^{\varphi}$. Alla linea delle transizioni di prima specie corrisponde il valore $x = 0$, alla linea delle transizioni di seconda specie tra le fasi P e $FA_{\parallel}$ un determinato valore $x_1 > 0$, alla linea delle transizioni tra le fasi P e $FA_{\perp}$ un determinato valore $x_2 < 0$. Nella definizione (49,2) si deve ora intendere con H_f, ovviamente, una funzione vera e propria $H_f(T)$ che sarebbe definita da una soluzione precisa del problema statistico con l'hamiltoniano efficace (49,1). Sviluppandola in potenze di t e omettendo in u il fattore costante $2H_b$, definiamo la variabile u nell'intorno del punto bicritico come

$$u = H_b - H_z + c\,(T - T_b) \tag{49,5}$$

con c costante. L'equazione della linea delle transizioni di prima specie è

$$H_z - H_b = c\,(T - T_b)$$

e di due linee delle transizioni di seconda specie:

$$H_z - H_b = c\,(T - T_b) \pm c_{1,2}\,(T - T_b)^{\varphi}, \tag{49,6}$$

[1]) Crossover secondo la terminologia inglese.

ove c_1, c_2 sono costanti positive. Per $\varphi > 1$ (calcoli numerici danno: $\varphi \approx 1{,}25$) queste linee nella regione di fluttuazione sono come nella fig. 27; nel punto b tutte esse hanno la tangente comune.

L'ipotesi dell'invarianza di scala nell'intorno del punto bicritico consente anche di trarre qualche conclusione sulle leggi di variazione del vettore antiferromagnetico **L** all'avvicinarsi a questo punto seguente diverse direzioni nel piano T, H_z; ma su questi aspetti non ci soffermiamo [1]).

§ 50. *Ferromagnetismo debole*

Esistono cristalli in cui l'interazione di scambio stabilisce la struttura antiferromagnetica, ma relativamente deboli interazioni relativistiche implicano deformazione di questa struttura per cui compare come risultato la magnetizzazione **M** «anomalmente» piccola, in virtù della piccolezza delle interazioni relativistiche rispetto all'interazione di scambio. Questo fenomeno porta il nome di *ferromagnetismo debole* [2]).

L'interazione di scambio di per se stessa consente orientazione arbitraria del vettore antiferromagnetico **L** nel cristallo. Una sua orientazione cristallografica determinata va stabilita soltanto da interazioni relativistiche descritte da termini anisotropi rispetto a **L** nello sviluppo del potenziale termodinamico. Può succedere che la simmetria della struttura così comparsa di per sé consenta anche l'esistenza del momento ferromagnetico **M** [3]). Questi sono i casi in cui compare un debole ferromagnetismo: tra termini relativistici dello sviluppo del potenziale termodinamico figurano tali da implicare la deformazione richiesta della struttura antiferromagnetica [4]). Mostriamo ciò su un esempio caratteristico.

Consideriamo cristalli romboedrici appartenenti al gruppo spaziale D_{3d}^6. Ricordiamo (cfr. III § 93) che la classe cristallina D_{3d} contiene gli elementi di simmetria seguenti: l'asse di simmetria C_3 del terzo ordine (asse trigonale), tre assi del secondo ordine che gli sono perpendicolari (indichiamoli con i simboli U_2) e il centro d'inversione I; come conseguenza compaiono tre piani di simmetria σ_d ciascuno dei quali passa per l'asse C_3 ed è perpendicolare a uno degli assi U_2 (dimezzando così l'angolo tra due altri assi U_2). Nel gruppo spaziale D_{3d}^6 i piani σ_d diventano piani di strisciamento con traslazione di 1/2 periodo lungo l'asse trigonale. Ciò conduce alla

---

[1]) Cfr. *Fisher M.E.*, *Nelson D.R.* — Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 1350.

[2]) In accordo con la terminologia data alla fine del § 37 sarebbe più corretto parlare di ferrimagnetismo debole.

[3]) Ricordiamo che a tale scopo è necessario comunque che la cellula magnetica elementare coincida con quella cristallografica, cfr. la pag. 205.

[4]) La teoria del ferromagnetismo debole appartiene a *I.E. Dzjalošinskij* (1957).

disposizione degli assi e del centro d'inversione in ciascuna cella elementare come nella fig. 28. Il segmento verticale rappresentato è un periodo lungo l'asse trigonale (diagonale spaziale della cella romboedrica); la sua lunghezza è supposta convenzionalmente uguale a 1. Gli assi del secondo periodo passano per i punti 1/4 e 3/4. Il centro di inversione si trova nei punti 0 e 1/2 (crocette nella figura). I piani verticali σ_d qui non sono rappresentati.

Negli antiferromagneti $FeCO_3$ e $MnCO_3$ ciascuna cella elementare contiene due ioni magnetici (Fe^{++} o Mn^{++}) che occupano la

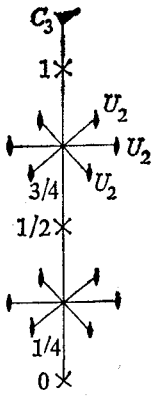


Fig. 28

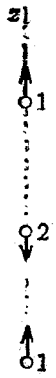


Fig. 29

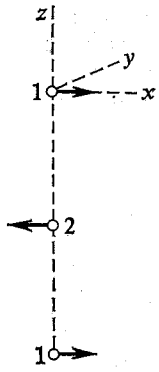


Fig. 30

posizione nei punti equivalenti 0 e 1/2 sull'asse trigonale. L'interazione di scambio stabilisce la struttura magnetica nella quale i momenti di questi due ioni sono antiparalleli. Inoltre, in $FeCO_3$ i momenti degli ioni Fe^{++} sono disposti lungo l'asse trigonale (fig. 29). Si vede facilmente che questa struttura è invariante rispetto a tutte le trasformazioni della classe D_{3d} e perciò non ammette ferromagnetismo (l'esistenza del vettore **M** lungo l'asse trigonale va esclusa dalla presenza degli assi U_2, e del vettore **M** nel piano di base dalla presenza dell'asse C_3).

Nell'antiferromagnete $MnCO_3$, invece, i momenti magnetici degli ioni giacciono nel piano di base (il piano xy) perpendicolare all'asse trigonale (l'asse z) come è rappresentato nella fig. 30. Se inoltre i momenti giacciono in uno dei piani σ_d (che consideriamo in questo caso come il piano xz), la struttura magnetica ha come elementi di simmetria (oltre a quello unitario)

$$U_2^{(y)},\ I,\ \sigma_d^{(xz)}$$

cioè si riferisce a una classe magnetica coincidente con la classe ordinaria C_{2h}; essa ammette l'esistenza del vettore **M** nella direzione

dell'asse y. Se, invece, i momenti sono disposti su uno degli assi U_2 (consideriamolo allora come l'asse x), la struttura magnetica ha come elementi di simmetria

$$U_2^{(x)}R,\ I,\ \sigma_d^{(xz)}R,$$

cioè si riferisce alla classe magnetica C_{2h} (C_i); essa anche ammette l'esistenza del vettore **M** nella direzione dell'asse y. In entrambi i casi la comparsa del vettore **M** si realizza mediante una rotazione dei momenti dei due ioni in ciascuna cella elementare nel piano xy quando uno va incontro all'altro, come ciò è rappresentato nella fig. 31.

Passando alla teoria quantitativa, introduciamo di nuovo i vettori $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ e $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ ove gli indici 1 e 2 si riferiscono a due sottoreticoli magnetici. Indichiamo con **l** il vettore unitario nella direzione **L**.

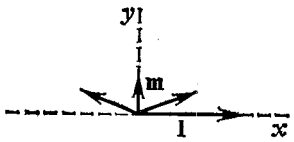


Fig. 31

Consideriamo lo sviluppo del potenziale termodinamico Φ (per $\mathbf{H} = 0$) in potenze di **M** e **l**. Lo sviluppo in potenze di **M** è possibile già in virtù di piccolezza stessa di questa grandezza in un ferromagnetico debole, mentre lo sviluppo dell'energia dell'anisotropia in potenze di **l** è basato, come sempre, su piccolezza relativa delle interazioni relativistiche. Quindi, qui non è supposta affatto la vicinanza al punto di transizione di fase di seconda specie (piccolezza di L) e perciò la teoria qui esposta non è soggetta a restrizioni proprie alla teoria di Landau.

I termini dello sviluppo devono essere invarianti rispetto a tutte le trasformazioni del gruppo D_{3d}^6. I primi termini di questo sviluppo sono

$$\Phi = \Phi_0(L) + BM^2 + D(\mathbf{lM})^2 - \frac{\beta}{2}M_z^2 - \frac{\gamma L^2}{2}l_z^2 + \zeta L(M_x l_y - M_y l_x), \tag{50,1}$$

ove $\Phi_0(L)$ è una funzione isotropa rispetto a **L**. I primi due termini (dopo Φ_0) sono di origine di scambio; in questo caso $B > 0$ (in caso contrario esisterebbe magnetizzazione spontanea non connessa con antiferromagnetismo, cioè il corpo sarebbe un ferromagnete di scambio ordinario). I tre termini successivi dello sviluppo sono del primo ordine $(\sim v^2/c^2)$ rispetto alle interazioni relativistiche [1]).

[1]) I fattori L^2 e L nelle definizioni degli ultimi due termini sono introdotti all'unico scopo che tutti i coefficienti nella (50,1) siano adimensionali e non significano uno sviluppo in potenze della grandezza L.

L'ultimo di essi può essere rappresentato nella forma L (ζ [**Ml**]), ove ζ è un vettore diretto lungo l'asse z [1]).

L'invarianza di tutti i termini nella (50,1), tranne l'ultimo, è immediata. Per provare l'invarianza dell'ultimo termine è sufficiente farlo rispetto all'asse C_3, uno degli assi U_2 e il centro d'inversione I. L'invarianza rispetto alle rotazioni attorno all'asse trigonale (asse z) è evidente dalla scrittura, nella forma della componente z del vettore [**Ml**] (in questo caso è importante che le rotazioni non permutino mutuamente gli atomi dei sottoreticoli distinti, e perciò **M** e **l** si trasformano allo stesso modo). L'invarianza rispetto all'inversione deriva dall'invarianza di ciascuno dei vettori **M** e **l**: per **M** ciò segue già dalla stessa assialità del vettore, mentre per **l** si deve tener conto che nella struttura in esame l'inversione non fa altro che permutare gli atomi di un medesimo sottoreticolo. La trasformazione $U_2^{(x)}$ permuta gli atomi a momenti magnetici diretti in modo opposto; perciò con questa rotazione M_x, $M_y \to M_x$, $-M_y$ e l_x, $l_y \to -l_x$, l_y da cui è evidente l'invarianza della differenza $M_x l_y - M_y l_x$.

Supponiamo che la costante $\gamma < 0$; allora il vettore **l** resta nel piano di base ($l_z = 0$). Considerando come xz il piano in cui giace **l** e minimizzando Φ rispetto a **M** per **L** assegnato, troviamo per il momento ferromagnetico

$$M_x = 0, \quad M_y = \frac{\zeta}{2B} L_x, \quad M_z = 0. \tag{50,2}$$

Poiché $|\zeta| \ll B$, allora M è effettivamente piccolo. Si vede che la comparsa del ferromagnetismo debole è connessa con l'ultimo termine nella (50,1) che è bilineare rispetto a **M** e **l**. Per il ferromagnetismo debole è caratteristica una stretta connessione tra la direzione **M** e la struttura antiferromagnetica; nel caso considerato **M** giace nello stesso piano di base ed è perpendicolare al vettore **L** [2]).

Se esiste un campo la dipendenza della magnetizzazione da **H** si ottiene dalle condizioni di minimo del potenziale termodinamico $\tilde{\Phi} = \Phi - \mathbf{MH} - H^2/8\pi$. La minimizzazione va realizzata secondo l'orientazione della struttura nel piano di base e rispetto alle com-

---

[1]) L'origine microscopica di un termine di questa forma è legata all'interazione antisimmetrica rispetto agli spin che si verifica come effetto del secondo ordine della teoria delle perturbazioni, ossia dei termini misti bilineari rispetto alle interazioni di scambio e relativistica spin-orbitale. Cfr. *T. Moriya*. Magnetism, Vol. I/Ed. *G. T. Rado* and *H. Suhl* — N.Y.: Academic Press, 1963.

[2]) Nell'approssimazione corrispondente al potenziale termodinamico (50,1) l'anisotropia magnetica nel piano di base non esiste e la direzione **L** in esso resta arbitraria. L'anisotropia (e con essa un'orientazione determinata di **L**) nel piano di base compare unicamente se si è tenuto conto di termini d'ordine superiore (fino al sesto). In questo caso compaiono anche termini misti rispetto a componenti z, x, y dei vettori per cui i momenti magnetici deviano di piccolo angolo dal piano di base.

ponenti del vettore **M**. Evidentemente, se trascuriamo l'anisotropia magnetica nel piano di base la magnetizzazione ruota in modo tale che la sua componente $\mathbf{M}_\perp$ in questo piano coincida con la direzione del campo $\mathbf{H}_\perp$ e il vettore **L** sia perpendicolare rispettivamente a $\mathbf{H}_\perp$[1]. Dopo questa trasformazione la minimizzazione di $\tilde{\Phi}$ rispetto a $\mathbf{M}_\perp$ e M_z conduce al seguente risultato:

$$M_z = \chi_{\parallel} H_z, \quad M_\perp = \chi_\perp (H_D + H_\perp), \tag{50,3}$$

ove per la suscettività abbiamo

$$\chi_{\parallel} = \frac{1}{2B - \beta}, \quad \chi_\perp = \frac{1}{2B} \tag{50,4}$$

ed è introdotta la notazione

$$H_D = | \zeta | L \tag{50,5}$$

per il «campo efficace» che determina la magnetizzazione spontanea del ferromagnete debole (detto *campo di Dzjalošinskij*). Poiché $| \beta | \ll B$, allora $\chi_{\parallel} \approx \chi_\perp$.

Ricordiamo ancora una proprietà delle sostanze considerate che si rivela per applicazione del campo **H** e in prossimità del punto di transizione nella fase paramagnetica. Nei limiti della teoria di Landau sviluppiamo in questa regione la funzione $\Phi_0 (L)$ in serie di potenze di L:

$$\Phi_0 (L) = \Phi_0 (0) + AL^2 + CL^4.$$

Supponiamo che il vettore **L** sia diretto nella direzione positiva dell'asse x. Per fissare le idee, accettiamo che $\zeta > 0$ [2]; allora il vettore **M** è diretto nella direzione positiva dell'asse y; supponiamo che il campo **H** sia diretto allo stesso modo. Il potenziale termodinamico è

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 (0) + AL^2 + CL^4 + BM^2 - \zeta LM - HM - \frac{H^2}{8\pi}; \tag{50,6}$$

in prossimità del punto di Curie lo sviluppo dell'energia dell'anisotropia in potenze del vettore unitario **l** diventa lo sviluppo in po-

---

[1]) È supposto che $D > 0$; per $D < 0$ l'esistenza del termine $-| D | (\mathbf{lM})^2$ con grande coefficiente $| D |$ può violare la perpendicolarità reciproca di **l** e $\mathbf{H}_\perp$.

Se si trascura l'anisotropia nel piano di base ciò significa che i campi considerati sono soggetti a determinate restrizioni dal basso.

[2]) È da notare che il segno del coefficiente ζ è convenzionale nel senso che dipende dalla definizione del vettore $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$, ossia dagli atomi magnetici nel cristallo considerati come sottoreticoli *1* e *2*. Ma dopo questa definizione nel cristallo in questione il segno del coefficiente ζ acquisisce un determinato significato: da esso dipende la direzione **M** rispetto alla direzione **L** e agli assi cristallografici.

tenze del vettore stesso **L**. In assenza di campo $M = \zeta L/2B$ e lo sviluppo (50,6) assume la forma

$$\Phi = \Phi_0 + \left(A - \frac{\zeta^2}{4B}\right) L^2 + CL^4.$$

Il punto di Curie è definito dall'annullamento del coefficiente di L^2, in modo che in sua prossimità abbiamo

$$A - \frac{\zeta^2}{AB} = a\,(T - T_c)$$

($a > 0$); gli altri coefficienti poniamo uguali ai loro valori per $T = T_c$ (in questo caso $C > 0$).

Se il campo esiste, le equazioni $\partial\tilde{\Phi}/\partial L = 0$ e $\partial\tilde{\Phi}/\partial M = 0$ dopo l'eliminazione di M danno la seguente equazione esprimente L:

$$2CL^3 + a\,(T - T_c)\,L - \frac{\zeta H}{4B} = 0. \qquad (50,7)$$

Di qui si vede già che in un ferromagnete debole (così come in quello ordinario) il campo magnetico smussa la transizione di fase [1]. Inoltre, risulta non nullo da ambedue i lati del punto $T = T_c$ anche il vettore antiferromagnetico; il campo magnetico implica nella fase paramagnetica un assestamento antiferromagnetico eliminando con ciò la differenza di simmetria di ambedue le fasi (*A.S. Borovik-Romanov, V.I. Ožogin*, 1960). Per $T > T_c$ a una certa distanza da questo punto L decresce secondo la legge

$$L = \frac{\zeta H}{4aB\,(T - T_c)}.$$

§ 51. *Piezomagnetismo ed effetto magnetoelettrico*

Con la simmetria magnetica sono strettamente legati il *piezomagnetismo* e l'effetto *magnetoelettrico* negli antiferromagneti.

Il primo consiste nella comparsa della magnetizzazione per applicazione al cristallo di sforzi elastici, analogamente alla piezoelettricità. Questo fenomeno è descritto dalla comparsa nel potenziale termodinamico del cristallo di un termine lineare sia rispetto al campo che rispetto al tensore degli sforzi elastici:

$$\tilde{\Phi}_{\text{pm}} = -\lambda_{i,kl} H_i \sigma_{kl}, \qquad (51,1)$$

ove $\lambda_{i,kl}$ è un tensore simmetrico rispetto agli indici kl (cfr. la (17,7)). Questo termine fa sì che nell'induzione $B_i = -4\pi\partial\tilde{\Phi}/\partial H_i$ compaia

[1] L'equazione (50,7) coincide formalmente con l'equazione (19,4) per un ferroelettrico nel campo elettrico o con un'equazione analoga per un ferromagnete ordinario nel campo magnetico.

il termine $4\pi\lambda_{i,kl}\sigma_{kl}$. In altre parole, per $\mathbf{H} = 0$ compare la magnetizzazione lineare rispetto alla deformazione:

$$M_i = \lambda_{i,kl}\sigma_{kl}. \tag{51,2}$$

La stessa proprietà si manifesta sotto un altro aspetto, ossia nella forma della *magnetostrizione lineare* quando compare deformazione lineare rispetto al campo applicato al cristallo:

$$u_{kl} = -\frac{\partial\tilde{\Phi}_{\text{pm}}}{\partial\sigma_{kl}} = \lambda_{i,kl}H_i. \tag{51,3}$$

L'inversione del tempo fa cambiare di segno il campo $\mathbf{H}$ (e la magnetizzazione $\mathbf{M}$) lasciando invariabile il tensore σ_{kl}; è ovvio che deve restare invariabile anche il potenziale termodinamico. Perciò il tensore piezoelettrico $\lambda_{i,kl}$ cambia di segno per inversione del tempo. Ne segue, a sua volta, che il piezomagnetismo può verificarsi esclusivamente nei corpi a struttura magnetica; se quest'ultima non esiste, le proprietà del corpo sono invarianti rispetto alla trasformazione R e perciò sarebbe $\lambda_{i,kl} = -\lambda_{i,kl} = 0$. Il piezomagnetismo è possibile in antiferromagneti appartenenti a determinate classi di simmetria magnetica che contengono la trasformazione R soltanto in combinazioni con rotazioni o riflessioni, oppure non contengono R per niente (*B.A. Tavger*, *V.M. Zajtsev*, 1956).

L'effetto magnetoelettrico consiste nella relazione lineare tra campi magnetico e elettrico nella sostanza, la quale conduce, ad esempio, alla comparsa nel campo elettrico della magnetizzazione che gli è proporzionale (*L.D. Landau*, *E.M. Lifšits*, 1956). Questo effetto è descritto da un termine nel potenziale termodinamico, lineare sia rispetto al campo elettrico sia rispetto a quello magnetico:

$$\tilde{\Phi}_{\text{me}} = -\alpha_{ik}E_iH_k \tag{51,4}$$

con α_{ik} un tensore antisimmetrico. Per $\mathbf{H} = 0$ il campo elettrico crea nella sostanza la magnetizzazione

$$M_k = \alpha_{ik}E_i \tag{51,5}$$

e per $\mathbf{E} = 0$ il campo magnetico crea la polarizzazione elettrica

$$P_i = \alpha_{ik}H_k. \tag{51,6}$$

Come il piezomagnetismo, l'effetto magnetoelettrico è consentito soltanto da determinate classi di simmetria magnetica; il tensore magnetoelettrico α_{ik} è dispari rispetto all'inversione del tempo e si annulla nei corpi senza struttura magnetica. Siccome $\mathbf{E}$ è un vettore polare e $\mathbf{H}$ assiale, il tensore α_{ik} si annulla in ogni caso se la simmetria del cristallo contiene l'inversione I; per l'esistenza dell'effetto magnetoelettrico l'inversione è ammissibile nella sola combinazione IR.

Problemi[1])

1. Trovare le componenti non nulle del tensore piezomagnetico nella sostanza antiferromagnetica $FeCO_3$ (la struttura è rappresentata nella fig. 29).

Soluzione. Come è stato detto nel § 50, la classe magnetica di questa struttura coincide con la classe cristallografica D_{3d} e non contiene elemento R affatto. Le trasformazioni di questa classe lasciano invariante l'espressione

$$\widetilde{\Phi}_{pm} = -\lambda_1 [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) H_x - 2\sigma_{xy} H_y] - \lambda_2 (\sigma_{xz} H_y - \sigma_{yz} H_x),$$

ove l'asse z è diretto lungo l'asse di simmetria del terzo ordine, l'asse x lungo uno degli assi orizzontali del secondo ordine (questa espressione per la classe D_3 nel caso piezoelettrico è stata trovata nel problema 1 del § 17; nel caso piezomagnetico essa resta valida anche per la classe $D_{3d} = D_3 \times C_i$ poiché l'inversione spaziale I lascia invariabile il tensore di rango due σ_{ik} e anche il vettore assiale **H**). Di qui ricaviamo la magnetizzazione

$$M_x = \lambda_1 (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) - \lambda_2 \sigma_{yz}, \quad M_y = -2\lambda_1 \sigma_{xy} + \lambda_2 \sigma_{xz}.$$

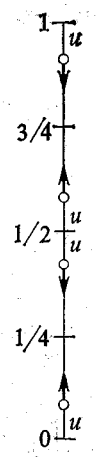


Fig. 32.

2. Risolvere il problema 1 per un cristallo appartenente alla classe D_{4h} (D_{2h})[2]).

Soluzione. La classe indicata contiene come elementi di simmetria (oltre a quello unitario)

$$C_2,\ 2C_4R,\ 2U_2,\ 2U_2'R,\ I,\ \sigma_h,\ 2\sigma_v,\ 2\sigma_v'R$$

(la notazione degli elementi di simmetria ovunque come in III § 95). Queste trasformazioni lasciano invariante l'espressione

$$\widetilde{\Phi}_{pm} = -\lambda_1 (\sigma_{xz} H_y + \sigma_{yz} H_x) - \lambda_2 \sigma_{xy} H_z$$

(l'asse z è diretto lungo l'asse di simmetria del quarto ordine, gli assi x, y lungo due assi orizzontali del secondo ordine). Di qui per la magnetizzazione troviamo

$$M_x = \lambda_1 \sigma_{yz}, \quad M_y = \lambda_1 \sigma_{xz}, \quad M_z = \lambda_2 \sigma_{xy}.$$

3. Trovare le componenti non nulle del tensore magnetoelettrico per l'antiferromagnetico Cr_2O_3. Questo cristallo appartiene al gruppo cristallografico spaziale D_{3d}^6 (cfr. § 50) e contiene in ciascuna cella elementare 4 atomi di cromo che occupano i punti equivalenti u, $1/2 - u$, $1/2 + u$, $1 - u$ ($u < 1/4$) sull'asse trigonale; i loro momenti magnetici sono disposti lungo questo stesso asse come è mostrato nella fig. 32.

Soluzione. Questo antiferromagnetico appartiene alla classe magnetica D_{3d} (D_3) avente come elementi di simmetria

$$2C_3,\ 3U_2,\ IR,\ 2S_6R,\ 3\sigma_dR.$$

---

[1]) Esempi che seguono sono indicati da *I.E. Dzjalošinskij* (1957, 1959).
[2]) Tali sono le sostanze antiferromagnetiche MnF_2, CoF_2.

Queste trasformazioni lasciano invariabile l'espressione

$$\widetilde{\Phi}_{\mathrm{me}} = -\alpha_{\parallel} E_z H_z - \alpha_{\perp}(E_x H_x + E_y H_y)$$

(l'asse z è diretto lungo l'asse trigonale), vale a dire che sono non nulle le componenti $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_{\perp}$, $\alpha_{zz} = \alpha_{\parallel}$.

§ 52. *Struttura magnetica elicoidale*

Una categoria a parte costituiscono strutture magnetiche in cui i periodi del «reticolo magnetico» sono incommensurabili con i periodi del reticolo cristallografico fondamentale. Sono possibili meccanismi più disparati di creazione di tali strutture; ne consideriamo uno (indicato da *I.E. Dzjalošinskij*, 1964) che consente una semplice formulazione in termini macroscopici. Studiamo questo fatto su un esempio concreto di cristallo appartenente alla classe cubica T e in modo tale che l'interazione di scambio per se stessa stabilisca un assestamento puramente ferromagnetico dei momenti magnetici (*P. Bak, M.H. Jensen*, 1980) [1].

Affinché una struttura possa esistere di fatto essa deve essere stabile rispetto a piccole perturbazioni che violano l'omogeneità spaziale macroscopica del cristallo. Precedentemente ovunque questa condizione è stata supposta tacitamente soddisfatta. L'«energia di disuniformità» complementare è stata data dall'espressione (43,1) la cui positività essenziale significa la stabilità necessaria.

L'espressione (43,2) è stata dedotta nel § 43 come il primo termine non scomparente nello sviluppo dell'energia di disuniformità nel cristallo cubico in potenze delle derivate della magnetizzazione **M**. Tuttavia in questo caso a presentare interesse era l'energia di origine di scambio. Nel § 43 è stato notato che la simmetria del cristallo può ammettere l'esistenza di termini di natura non di scambio (ma relativistica) contenenti i prodotti delle derivate $\partial M_i/\partial x_k$ per le componenti M_l; a tale scopo la simmetria comunque non deve avere centro d'inversione. Tale è la classe cristallina T che consente l'esistenza di un termine invariante rispetto alle sue operazioni di simmetria della forma **M** rot **M**. In tal modo, l'energia di disuniformità assume la forma

$$U_{\mathrm{disun}} = \gamma \mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\alpha}{2}[(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2]. \qquad (52,1)$$

La condizione $\alpha > 0$ non garantisce ora stabilità dello stato uniforme.

---

[1]) Tali sono i cristalli MnSi e FeGe con gli ioni magnetici Mn e Fe appartenenti al gruppo spaziale T^4 con reticolo cubico semplice di Bravais.

Teniamo conto però del fatto che il termine del primo ordine rispetto alle derivate nella formula (52,1) contiene rispetto al secondo termine un'infinitesimo complementare ($\sim v^2/c^2$) a causa della sua origine relativistica [1]): ciò vuol dire che il coefficiente $\gamma \ll \alpha/a$ con a costante del reticolo. Questa circostanza consente di trovare un nuovo stato stabile restando nei limiti di applicabilità dello sviluppo (52,1), ossia la struttura ferromagnetica semplice si deforma in modo non omogeneo, ma soltanto a distanze grandi rispetto ad a in modo che le derivate restano piccole.

La grandezza M è stabilita da interazioni di scambio fondamentali (non legate alla disuniformità). Una struttura su «grande scala» è determinata dalla minimizzazione dell'energia (52,1). Per M dato questa struttura consiste in lenta variazione della direzione del vettore $\mathbf{M}$[2]).

Cercheremo $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ nella forma della funzione periodica

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{M}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{m}e^{i\mathbf{kr}} + \mathbf{m}^* e^{-i\mathbf{kr}}\right) \tag{52,2}$$

ove per la costanza del quadrato $\mathbf{M}^2 = M^2$ il quadrato del vettore $\mathbf{m}$ unitario complesso ($\mathbf{m}\mathbf{m}^* = 1$) deve essere nullo: $\mathbf{m}^2 = 0$. Questo vettore si può presentare nella forma $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1 + i\mathbf{m}_2)/\sqrt{2}$ con $\mathbf{m}_1$ e $\mathbf{m}_2$ due vettori unitari reali reciprocamente perpendicolari. Allora

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = M\,(\mathbf{m}_1 \cos \mathbf{kr} - \mathbf{m}_2 \operatorname{sen} \mathbf{kr}). \tag{52,3}$$

---

[1]) Il primo termine nella (52,1) non è invariante rispetto alla rotazione uguale contemporanea dei vettori $\mathbf{M}$ in tutti i punti dello spazio, vale a dire che per esso non è stata soddisfatta la condizione formulata nella nota alla pag. 224.

I termini relativistici possono figurare anche tra quelli quadratici. Così la simmetria cubica ammette un termine della forma

$$\frac{\alpha'}{2}\left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial M_z}{\partial z}\right)^2\right].$$

[2]) A scanso di complicazioni non di principio supponiamo che U_{disun} sia piccola rispetto all'energia U_{scamb} (cosicché la grandezza M sia definita soltanto da quest'ultima) ma al tempo stesso grande rispetto all'energia relativistica dell'anisotropia U_{an} (in modo che si possa trascurare quest'ultima per la determinazione dell'andamento di variazione della direzione $\mathbf{M}$). Queste condizioni possono essere soddisfatte nell'intorno del punto di Curie, ma non troppo vicino ad esso (perché si verifichi la prima disuguaglianza) e non troppo lontano da esso (perché si verifichi la seconda disuguaglianza). Non scriviamo criteri espliciti che definiscono questo intorno.

Sostituendo la (52,2) nella (52,1) otteniamo

$$U_{\text{disun}} = iM^2\gamma\mathbf{k}\,[\mathbf{m}\mathbf{m}^*] + {}^1/_2\alpha M^2k^2 = M^2\gamma\mathbf{k}\,[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2] + \\ + {}^1/_2\,\alpha M^2k^2.$$

Come funzione di $\mathbf{k}$ questa espressione è minima se i vettori $\mathbf{k}$ e $[\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2]$ sono collineari (paralleli per $\gamma < 0$ e antiparalleli per $\gamma > 0$) e per grandezza

$$k = \gamma/\alpha \ll 1/a. \tag{52,4}$$

Quindi, l'esistenza di un piccolo termine lineare rispetto alle derivate in U_{disun} implica la comparsa della sovrastruttura magnetica *elicoidale* sovrapposta alla struttura ferromagnetica fondamentale: i momenti magnetici degli atomi giacciono nei piani perpendicolari alla direzione $\mathbf{k}$; inoltre, le direzioni dei momenti negli strati atomici conseguenti ruotano lentamente l'uno rispetto all'altro; gli estremi dei vettori (dei momenti atomici) disposti lungo una retta parallela alla direzione $\mathbf{k}$ descrivono una linea elicoidale. Il passo di questa linea, uguale a $2\pi/k$, è il periodo della sovrastruttura; esso è grande rispetto ai periodi cristallografici e, in generale, incommensurabili con questi ultimi [1]). Le fasi con sovrastrutture di questo tipo si chiamano in generale *incommensurabili*.

Nei limiti dell'approssimazione considerata la direzione $\mathbf{k}$ rispetto agli assi cristallografici resta indefinita. Essa è definibile mediante minimizzazione della somma dell'energia di anisotropia (40,7) e della parte relativistica dell'energia di disuniformità. Non ci soffermiamo su questo fatto.

[1]) La situazione studiata è analoga a quella che si verifica in cristalli liquidi colesterici (cfr. V § 140). In quest'ultimi l'esistenza nell'energia di un termine della forma $\mathbf{n}$ rot $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ è il vettore unitario del « direttore » del cristallo) conduce anche alla comparsa della struttura elicoidale.

Capitolo VI

SUPERCONDUTTIVITÀ

§ 53. *Proprietà magnetiche dei superconduttori*

Numerosi metalli a temperature vicine allo zero assoluto passano a uno stato singolare la cui proprietà più evidente (scoperta da *H. Kamerlingh Onnes*, 1911) è la *superconduttività*, ossia la totale mancanza di resistenza elettrica alla corrente continua. La comparsa della superconduttività avviene a una temperatura determinata per ogni metallo nel punto di *transizione superconduttrice* che è la transizione di fase di seconda specie

Dal punto di vista della teoria fenomenologica, tuttavia, il ruolo più fondamentale gioca il cambiamento delle proprietà magnetiche e non elettriche per transizione nello stato superconduttore; vedremo più avanti che le proprietà elettriche di un superconduttore sono conseguenza inevitabile delle sue proprietà magnetiche.

Le proprietà magnetiche di un metallo superconduttore si possono descrivere nel seguente modo. Il campo magnetico mai penetra nello spessore del superconduttore; poiché l'intensità media del campo magnetico nel mezzo è, per definizione, l'induzione magnetica **B**, si può dire altrimenti che sempre nella profondità del superconduttore

$$\mathbf{B} = 0 \tag{53,1}$$

(*W. Meissner*, *R. Ochsenfeld*, 1933). Questa proprietà si verifica a prescindere dalle condizioni in cui di fatto è avvenuta la transizione nello stato superconduttore. Così, se un campione si raffredda nel campo magnetico all'istante della transizione le linee di forze magnetiche vanno «spinte» dal corpo.

Sottolineiamo però che l'uguaglianza $\mathbf{B} = 0$ non si riferisce allo strato sottile superficiale della sostanza. In effetti il campo magnetico penetra nel superconduttore a una profondità più grande rispetto alle distanze interatomiche (di solito $\sim 10^{-5}$ cm) dipendente dal genere del metallo e dalla temperatura. Questa è la ragione per cui l'uguaglianza $\mathbf{B} = 0$ in generale non si verifica in pellicole metalliche sottili o in particelle piccole il cui spessore o le dimensioni sono dell'ordine di grandezza della profondità di penetrazione.

In seguito considereremo i soli conduttori massivi di dimensioni sufficientemente grandi trascurando completamente il fatto di penetrazione del campo magnetico nello strato sottile superficiale [1]).

Come è noto, sulla frontiera tra due mezzi qualsiasi deve essere continua la componente normale dell'induzione (questa condizione deriva come conseguenza dalla sempre vera equazione div $\mathbf{B} = 0$). Poiché all'interno del conduttore $\mathbf{B} = 0$, sulla sua superficie la componente normale del campo esterno anch'essa è nulla, vale a dire che il campo esterno è tangente ovunque alla superficie del superconduttore e le linee di forze magnetiche aggirano il corpo.

Tenendo conto di questa circostanza è facile trovare le forze che agiscono sul superconduttore nel campo magnetico. Così come abbiamo proceduto nel § 5 per un conduttore ordinario nel campo elettrico, calcoliamo la forza (riferita a 1 cm² della superficie) come $\sigma_{ik} n_k$ ove

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{H^2}{2}\delta_{ik}\right)$$

è il tensore degli sforzi di Maxwell per il campo magnetico nel vuoto. Poiché in questo caso $\mathbf{n}\mathbf{H}_e = 0$ ($\mathbf{H}_e$ è il campo esterno in prossimità della superficie del corpo) otteniamo

$$\mathbf{F}_{\text{sup}} = -\mathbf{n}\,\frac{H_e^2}{8\pi}, \tag{53,2}$$

vale a dire che la superficie del corpo è soggetta a una pressione di compressione uguale alla densità di energia del campo.

Secondo l'equazione (29,4)

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\overline{\rho\mathbf{v}}; \tag{53,3}$$

dall'uguaglianza $\mathbf{B} = 0$ segue che all'interno del superconduttore la densità di corrente media è anch'essa ovunque nulla. In altre parole, nel superconduttore sono impossibili correnti macroscopiche

---

[1]) Non trattiamo qui la teoria dei fenomeni legati alla profondità di penetrazione del campo magnetico nei superconduttori (le teorie di *F. London-H. London* e di *Ginsburg-Landau*). Benché queste teorie abbiano carattere macroscopico il significato delle grandezze che figurano in esse diviene chiaro soltanto sulla base della teoria microscopica. Queste teorie sono studiate in un altro volume del presente Corso (cfr. IX).

Sottolineiamo anche che nel presente capitolo sono studiati i cosiddetti superconduttori di prima specie cui appartengono gli elementi metallici puri e le composizioni stechiometriche. Nei superconduttori di seconda specie (cui appartengono leghe superconduttrici) l'effetto Meissner è espresso completamente soltanto in campi sufficientemente deboli. Un campo sufficientemente forte penetra nel superconduttore di seconda specie senza distruggerne completamente le proprietà superconduttrici (cfr. IX, cap. V).

di volume di nessun genere. Sottolineiamo in proposito che nel superconduttore non ha senso separare da $\overline{\rho v}$ correnti di conduzione come nei conduttori ordinari. Questa è la ragione per cui nella teoria considerata è inutile fisicamente introdurre la magnetizzazione **M** e con essa il vettore **H**.

Quindi, ogni corrente elettrica passante per il superconduttore è una corrente superficiale. La densità superficiale di correnti **g** è determinata secondo la formula (29,16) da un balzo della componente tangente dell'induzione sulla frontiera del corpo. Poiché all'interno del superconduttore $\mathbf{B} = 0$ e all'esterno **B** e **H** coincidono, allora

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{n}\mathbf{H}_e]. \tag{53,4}$$

L'esistenza delle correnti superficiali di per sé non è caratteristica singolare dei soli superconduttori. Le stesse correnti compaiono in qualsiasi corpo ordinario magnetizzato ove la loro densità è

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{n},\ \mathbf{H}_e - \mathbf{B}].$$

Poiché sulla superficie di un corpo ordinario (non superconduttore) sono continue le componenti tangenti del vettore $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, abbiamo $[\mathbf{n}\mathbf{H}_e] = [\mathbf{n}\mathbf{B}]/\mu$ in modo che l'espressione per **g** si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{g} = \frac{c}{4\pi}\,[\mathbf{n}\mathbf{B}]\,\frac{1-\mu}{\mu}. \tag{53,5}$$

Una differenza di principio tra superconduttori e corpi ordinari si rivela tuttavia quando si studia la corrente totale passante attraverso la sezione trasversale del corpo. Nei corpi non superconduttori le correnti superficiali sempre si compensano reciprocamente da non consentire la comparsa di nessuna corrente totale. Questa compensa zione è garantita dalla condizione (53,5) che stabilisce un legam tra la densità di correnti **g** e l'induzione magnetica all'interno dee corpo e tramite esso con le correnti **g** in tutti i pun ti della superficie Nei superconduttori la condizione (53,5) perde senso. Infatti, il passaggio da un corpo ordinario con permeabilità magnetica μ a un superconduttore significa formalmente che si deve porre contemporaneamente $B \to 0$ e $\mu \to 0$. Ma in questo caso il secondo membro dell'uguaglianza (53,5) diviene indeterminato, cosicché non esiste nessuna condizione di fatto che limiti valori possibili della corrente.

Possiamo concludere così che le correnti passanti attraverso la superficie superconduttrice possono implicare nel superconduttore una corrente totale non nulla. Ovviamente, ciò è possibile soltanto in un corpo a più vincoli (in un anello, ad esempio) o in un superconduttore a un vincolo che rappresenta parte del circuito chiuso con

sorgente della forza elettromotrice necessaria per mantenere la corrente nei tratti non superconduttori del circuito.

È importante che il passaggio stazionario della corrente totale sulla superficie del superconduttore sia possibile senza campo elettrico. Ciò vuol dire che questo fenomeno non è accompagnato dalla dissipazione di energia per il cui ristabilimento occorrerebbe il lavoro del campo esterno. Questa proprietà dei superconduttori può essere descritta come assenza in essi di resistenza elettrica, ciò che è conseguenza necessaria delle loro proprietà magnetiche.

§ 54. *Corrente superconduttrice*

Studiamo in modo più dettagliato alcune proprietà dei superconduttori dipendenti dalla loro forma.

Se il superconduttore rappresenta un corpo a un vincolo, in assenza di campo magnetico esterno in esso in generale è impossibile l'esistenza di nessuna corrente superficiale stazionaria. Ciò si prova mediante le seguenti considerazioni. Le correnti superficiali creerebbero nello spazio circostante in cui si trova il corpo il campo magnetico costante che scompare all'infinito. Come ogni campo magnetico costante nel vuoto esso sarebbe potenziale; inoltre, in virtù delle condizioni di frontiera per il superconduttore la derivata normale $\partial\varphi/\partial n$ del potenziale sulla superficie del corpo deve annullarsi. Ma dalla teoria del potenziale è noto che se $\partial\varphi/\partial n = 0$ sulla superficie del corpo monovincolato e all'infinito, allora $\varphi = 0$ in tutto lo spazio (all'esterno del corpo). Quindi, un tale campo magnetico e con esso le correnti superficiali non possono esistere.

Quanto al campo magnetico esterno, esso induce sulla superficie del superconduttore monovincolato correnti, fatto che si può interpretare come la comparsa nel corpo di un momento magnetico totale. È facile calcolare questa «magnetizzazione» per un superconduttore di forma ellissoidale [1]).

Sia $\mathfrak{H}$ il campo esterno parallelo a uno degli assi principali dell'ellissoide. Per il campo magnetico all'interno dell'ellissoide non superconduttore si verifica la relazione

$$(1 - n)\,\mathbf{H} + n\mathbf{B} = \mathfrak{H},$$

ove n è il coefficiente di smagnetizzazione lungo un asse ellissoidale (cfr. la formula (29,14)). Nel superconduttore l'«intensità» $\mathbf{H}$, come è stato detto, non ha senso fisico e con essa perde suo significato ordinario anche la magnetizzazione $M = (B - H)/4\pi$. Cionondimeno, nel caso considerato è comodo introdurre in modo puramente formale H e M come grandezze ausiliari che servono a calcolare il momento

[1]) In questo paragrafo ovunque è supposto che il campo magnetico non superi valori per cui si distrugga lo stato superconduttore (cfr. § 55).

magnetico totale $\mathscr{M} = MV$ (V è il volume dell'ellisoide) avente qui un suo significato fisico letterale. Ponendo $B = 0$ per l'ellissoide superconduttore troviamo che

$$H = \frac{\mathfrak{H}}{1-n} \tag{54,1}$$

e in seguito

$$\mathscr{M} = -\frac{VH}{4\pi} = -\frac{V\mathfrak{H}}{4\pi(1-n)}. \tag{54,2}$$

In particolare, per un cilindro lungo nel campo longitudinale $n = 0$, in modo che $H = \mathfrak{H}$ e $\mathscr{M} = -V\mathfrak{H}/4\pi$ [1]). Questi valori di $\mathscr{M}$ sono tali come se il corpo godesse della suscettività diamagnetica volumetrica $-1/4\pi$.

Il campo magnetico $\mathbf{H}_e$ all'esterno dell'ellissoide in prossimità della sua superficie ovunque è diretto lungo le tangenti, e perciò la sua grandezza è determinata immediatamente dalla condizione di continuità delle componenti tangenziali di $\mathbf{H}$. All'interno dell'ellissoide $\mathbf{H} = \mathfrak{H}/(1-n)$; proiettando questo vettore sulla direzione tangente otteniamo

$$H_e = \frac{\mathfrak{H}}{1-n} \operatorname{sen}\theta, \tag{54,3}$$

ove l'angolo θ è compreso tra la direzione del campo esterno $\mathfrak{H}$ e la normale in un punto dato della superficie dell'ellissoide. H_e ha un valore più grande sull'equatore dell'ellissoide ove vale $\mathfrak{H}/(1-n)$.

Sottolineiamo ancora una volta che tra le correnti responsabili per la «magnetizzazione» del superconduttore e quelli che generano in esso la corrente totale non esiste nessuna differenza di principio; esse hanno una natura fisica uguale. Questa circostanza consente di definire immediatamente, in particolare, i coefficienti giromagnetici per qualsiasi superconduttore. Infatti, la densità d'impulso delle particelle (elettroni) che creano correnti magnetizzate differisce dalla densità di queste correnti per il solo fattore m/e (e e m sono, rispettivamente, carica e massa dell'elettrone). Per definizione dei coefficienti giromagnetici (cfr. la (36,3)) di qui segue immediatamente che per i superconduttori sempre

$$g_{ik} = \delta_{ik}.$$

Passiamo a superconduttori a più vincoli. Le loro proprietà differiscono essenzialmente dalle proprietà dei corpi monovincolati, soprattutto, perché, in questo caso, è inapplicabile la conclusione sull'impossibilità delle correnti superficiali stazionarie in assenza

[1]) Queste relazioni per cilindro sono conseguenza immediata della condizione di continuità di H e perciò si verificano per cilindro con una sezione di qualsiasi forma (non necessariamente circolare).

di campo magnetico esterno. Per di più, le correnti superficiali qui non si devono compensare reciprocamente e possono implicare un passaggio stazionario attraverso il corpo di una corrente superconduttrice totale senza che sia applicata dall'esterno la forza elettromotrice.

Consideriamo un corpo a doppia connessione (anello) in assenza di campo magnetico esterno e mostriamo che questo stato è definibile completamente mediante l'assegnazione della corrente totale J in esso. Il problema della determinazione del campo creato dall'anello può essere risolto anch'esso come problema della teoria del potenziale, ma in questo caso il potenziale φ sarà funzione polidroma variante di $4\pi J/c$ nella descrizione di qualsiasi cammino chiuso passante attraverso il foro anulare (cfr. § 30). Per ottenere un'impostazione matematica precisa del problema è necessario fare un «taglio» dello spazio con un piano che chiuda il foro dell'anello. Allora il problema consiste nella risoluzione dell'equazione di Laplace con la condizione di frontiera $\partial\varphi/\partial n = 0$ sulla superficie dell'anello, $\varphi = 0$ all'infinito e con la condizione $\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi J/c$ sulla superficie del taglio con φ_1 e φ_2 valori del potenziale sui due lati di quest'ultima. Questo problema, come è noto dalla teoria del potenziale, ha una soluzione univoca (indipendente dalla forma della superficie di taglio considerata). Sulla base della distribuzione del campo in prossimità della superficie dell'anello va determinata univocamente in esso la distribuzione di correnti superficiali.

Accanto alla distribuzione di correnti risulta come grandezza completamente determinata anche il coefficiente di autoinduzione dell'anello superconduttore. Sotto questo aspetto esiste una differenza notevole dai conduttori ordinari nei quali la distribuzione di correnti e il valore preciso dell'autoinduzione dipendono dal modo in cui è stata eccitata la corrente (§ 34) [1].

Nel § 33 abbiamo introdotto la nozione di flusso magnetico Φ attraverso il contorno di un conduttore lineare e mostrato che $\Phi = LJ/c$ ove L è l'autoinduzione del conduttore. Per l'anello superconduttore la nozione di flusso magnetico ha senso per qualsiasi spessore dell'anello e non necessariamente piccolo. Infatti, in virtù della tangenzialità del campo magnetico il suo flusso attraverso qualsiasi parte della superficie dell'anello stesso è nullo; perciò la grandezza del flusso magnetico attraverso una superficie che chiude

[1]) L'autoinduzione di un anello superconduttore sottile (di raggio b) fabbricato di filo a sezione circolare (di raggio a) coincide con la parte esterna dell'autoinduzione di un anello non superconduttore ed è data dalla formula

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2\right)$$

(cfr. problema 2 del § 34).

Una soluzione precisa del problema della corrente superconduttrice circolare è data da *V.A. Fok* (Phys. Zs. Sowjetunion, 1932, Bd 1, S. 215).

il foro dell'anello superconduttore è indipendente dalla forma di questa superficie.

Per di più, resta in vigore anche la formula

$$\Phi = \frac{1}{c} LJ \tag{54,4}$$

con autoinduzione L definita, come precedentemente, rispetto all'energia totale del campo magnetico di corrente. L'energia totale del campo magnetico per un superconduttore è data dall'integrale $\int \frac{H^2}{8\pi} dV$ esteso a tutto lo spazio all'esterno del corpo. Effettuando, come precedentemente, un « taglio » dello spazio con una superficie C, introduciamo il potenziale del campo e scriviamo

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dV = -\int \frac{\mathbf{H}\nabla\varphi}{8\pi} dV = \int \frac{\varphi \operatorname{div} \mathbf{H}}{8\pi} dV - \int \frac{H_n \varphi}{8\pi} df.$$

Il primo integrale è nullo in quanto div $\mathbf{H} = 0$. Il secondo integrale, invece, è esteso a una superficie indefinitamente lontana, alla superficie anulare e ai due lati della superficie di taglio; sulle due prime superficie l'espressione integranda si annulla in modo che resta

$$\int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi} \int_C H_n (\varphi_2 - \varphi_1)\, df = \frac{J}{2c} \int_C H_n\, df = \frac{J\Phi}{2c},$$

ove Φ è il flusso magnetico attraverso la superficie di taglio C. Confrontando questa espressione con $LJ^2/2c^2$ (per definizione di autoinduzione) riotteniamo l'uguaglianza cercata (54,4).

Se l'anello si trova nel campo magnetico esterno, il flusso totale Φ consta del flusso proprio LJ/c e del flusso Φ_e proveniente dal campo esterno. Un'altra proprietà importante dell'anello superconduttore è che qualunque sia la variazione del campo esterno e della corrente il flusso magnetico totale attraverso l'anello resta costante:

$$\frac{1}{c} LJ + \Phi_e = \text{costante} \equiv \Phi_0. \tag{54,5}$$

Ciò deriva immediatamente dalla forma integrale dell'equazione di Maxwell nello spazio all'esterno del corpo:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_C \mathbf{H}\, d\mathbf{f} = -\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l}.$$

Se si integra rispetto alla superficie C che chiude il foro dell'anello, da contorno di integrazione a secondo membro dell'uguaglianza fungerà la linea passante per la superficie dell'anello. Ma sulla superficie superconduttrice la componente tangenziale di $\mathbf{E}$ è nulla (poiché all'interno del superconduttore $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{E}_t$ è continua sulla su-

perficie). Perciò il secondo membro dell'uguaglianza si annulla e troviamo così $d\Phi/dt = 0$.

La relazione (54,5) determina cambiamento della corrente al variare del campo esterno. Così, se l'anello è stato introdotto nello stato superconduttore in un campo esterno che ha generato il flusso Φ_0, e in seguito questo campo è stato escluso, nell'anello va indotta una corrente stazionaria uguale a $J = c\Phi_0/L$.

La costanza del flusso magnetico attraverso l'anello superconduttore ha luogo non soltanto al variare del campo esterno, ma anche per qualsiasi cambiamento della forma dell'anello o per suo spostamento nello spazio [1]). Si può affermare che le linee di forza non possono intersecare mai la superficie del superconduttore e perciò non possono «uscire» dal foro dell'anello superconduttore.

I risultati esposti si generalizzano immediatamente per il caso dei corpi superconduttori di qualsiasi grado di connessione, nonché all'insieme di qualsiasi numero di anelli. Lo stato di un sistema a n connessioni in assenza di campo esterno è determinato completamente dall'assegnazione dei $n - 1$ valori delle correnti totali J_a. In questo caso la relazione (54,5) si generalizza e assume la forma del sistema di equazioni

$$\sum_b L_{ab} J_b + \Phi_a^{(e)} = \Phi_{a0}. \qquad (54,6)$$

Queste equazioni si verificano sia per qualsiasi variazione del campo esterno che per cambiamenti della forma e della disposizione reciproca dei corpi.

Problema

Trovare il momento magnetico di un disco superconduttore nel piano magnetico esterno che gli è perpendicolare [2]).

Soluzione. Il problema del superconduttore nel campo magnetico costante coincide formalmente con il problema elettrostatico per un dielettrico di permettività dielettrica $\varepsilon = 0$. Considerando il disco come limite dell'ellissoide di rotazione per $c \to 0$ (cfr. problema 4 del § 4) e ricorrendo alla formula (8,10) con un cambiamento appropriato delle notazioni (campo $\mathfrak{H}$ lungo l'asse z) otteniamo

$$\mathfrak{M} = -\frac{2a^3}{3\pi}\mathfrak{H}.$$

---

[1]) La dimostrazione di questa proposizione deriva immediatamente dalla relazione tra forza elettromotrice dell'induzione e legata allo spostamento del conduttore variazione del flusso magnetico attraverso il suo contorno (§ 63).

[2]) Questo problema è posto qui soprattutto per altro scopo (cfr. problema 2 del § 95). Per il disco superconduttore infatti si possono considerare soltanto campi magnetici assai deboli in quanto sotto queste condizioni si distrugge facilmente la superconduttività (cfr. § 55).

§ 55. *Campo critico*

Un superconduttore cilindrico nel campo magnetico longitudinale ha una energia magnetica supplementare uguale a

$$-\frac{1}{2}\mathcal{M}\mathfrak{H}=\frac{\mathfrak{H}^2V}{8\pi}.$$

Nello stato ordinario (non superconduttore) l'energia totale del cilindro praticamente non cambierebbe per l'applicazione di un campo esterno (qui e più avanti trascuriamo dia- e paramagnetismo debole dei metalli non superconduttori, ponendo cioè per essi $\mu = 1$). Di qui risulta già con chiarezza che in campi magnetici sufficientemente forti lo stato superconduttore del metallo deve divenire termodinamicamente meno utile che quello ordinario e perciò deve avvenire, come si suole dire, la distruzione della superconduttività.

Il valore dell'intensità del campo magnetico longitudinale per il quale comincia la distruzione della superconduttività in un corpo cilindrico dipende dal tipo di metallo e anche dalla sua temperatura (e dalla pressione). Questo valore si chiama *campo critico*, H_c; esso rappresenta una delle caratteristiche più importanti dei superconduttori [1]).

La distruzione della superconduttività nel cilindro quando il campo raggiunge il suo valore critico, comincia in tutto il volume, ciò che è legato all'uniformità del campo lungo tutta la superficie di tale corpo. In corpi di altra forma la distruzione della superconduttività rappresenta un processo più complicato nel corso del quale il volume occupato dalla sostanza nello stato ordinario aumenta gradualmente in un intervallo totale di valori di $\mathfrak{H}$ (ne parleremo in dettagli nel prossimo paragrafo).

Quindi, a qualsiasi temperatura (sotto il punto di transizione) il metallo può esistere sia nello stato superconduttore (s) che in quello normale (n). Indichiamo con $\mathcal{F}_{s0}(V, T)$ e $\mathcal{F}_n(V, T)$ le energie libere totali dei corpi superconduttore e normale in assenza di campo magnetico esterno; queste grandezze, caratterizzando la sostanza come tale, dipendono, ovviamente, soltanto dal volume ma non dalla forma del corpo. L'energia libera nello stato n non cambia in generale per l'applicazione di un campo esterno (ragione per cui non scriviamo l'indice 0 in $\mathcal{F}_n$ [2])). Invece, nello stato s il campo magne-

---

[1]) Una brusca transizione dallo stato superconduttore a quello normale si verifica soltanto nei superconduttori di prima specie (cfr. la nota alla pag. 269) i quali stiamo qui studiando. Nei superconduttori di seconda specie, invece, la distruzione della superconduttività e la penetrazione del campo magnetico nel campione procedono gradualmente, in un intervallo di campi relativamente lago, cosicché per essi il campo critico nel senso indicato nel testo non esiste.

[2]) Ricordiamo che per definizione di grandezze « totali » $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ da esse è esclusa l'energia del campo magnetico che esisterebbe se non fosse il corpo.

tico cambia notevolmente l'energia libera. Per il cilindro superconduttore con T e V assegnati l'energia libera nel campo longitudinale esterno $\mathfrak{H}$ vale

$$\mathscr{F}_s = \mathscr{F}_{s0}(V, T) + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} V. \tag{55,1}$$

Di qui si possono ricavare tutte le altre grandezze termodinamiche. Derivando la (55,1) rispetto al volume, troviamo la pressione agente sul corpo

$$P = P_0(V, T) - \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, \tag{55,2}$$

ove $P_0(V, T)$ è la pressione (per V e T assegnati) in assenza di campo. L'uguaglianza (55,2) determina la dipendenza tra P, V e T, rappresentando cioè l'equazione di stato del cilindro superconduttore nel campo magnetico esterno. Si vede che il volume $V(P, T)$ in presenza del campo magnetico è lo stesso che sarebbe in sua assenza sotto la pressione $P + \mathfrak{H}^2/8\pi$. Questo risultato è in accordo, naturalmente, con la formula (53,2) che esprime la forza agente sulla superficie del superconduttore nel campo magnetico.

Il potenziale termodinamico [1]) del cilindro superconduttore vale

$$\mathscr{G}_s = \mathscr{F}_s + PV = \mathscr{F}_{s0}(V, T) + P_0 V,$$

ove il volume deve essere espresso ora in funzione di P e T mediante la formula (55,2). Perciò si può scrivere $\mathscr{G}_s(P, T)$ nella seguente forma:

$$\mathscr{G}_s(P, T) = \mathscr{G}_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \tag{55,3}$$

ove $\mathscr{G}_{s0}(P, T)$ è il potenziale termodinamico in assenza di campo. Derivando questa uguaglianza rispetto a T e a P otteniamo le relazioni analoghe per l'entropia e il volume:

$$\mathscr{S}_s(P, T) = \mathscr{S}_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right), \tag{55,4}$$

$$V_s(P, T) = V_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right). \tag{55,5}$$

Ora possiamo dedurre la condizione che definisca il campo critico. Il cilindro passerà dallo stato s allo stato n quando $\mathscr{G}_n$ (per P e T assegnati) diviene più piccolo di $\mathscr{G}_s$. All'istante della transizione deve essere $\mathscr{G}_s = \mathscr{G}_n$, cioè

$$\mathscr{G}_{s0}\left(P + \frac{H_c^2}{8\pi}, T\right) = \mathscr{G}_n(P, T). \tag{55,6}$$

[1]) Qui è supposta la definizione di $\mathscr{G}$ data nel § 12.

Questa è una relazione termodinamica precisa [1]). Di solito un cambiamento del potenziale termodinamico nel campo magnetico rappresenta una piccola correzione a $\mathcal{P}_{s0}(P, T)$. Allora il primo membro dell'equazione (55,6) si può sviluppare in serie, e i primi termini dello sviluppo danno

$$\mathcal{P}_{s0}(P, T) + \frac{H_c^2}{8\pi} V_{s0}(P, T) = \mathcal{P}_n(P, T), \tag{55,7}$$

ove $V_{s0}(P, T) = \partial \mathcal{P}_{s0}(P, T)/\partial P$ è il volume del cilindro superconduttore in assenza di campo. Quindi, in questa approssimazione si può dire che il potenziale termodinamico della sostanza (riferito ad unità di volume) nello stato normale è più grande di $H_c^2/8\pi$ che nello stato superconduttore.

Indichiamo con $T_c = T_c(P)$ la temperatura della transizione in assenza di campo magnetico. La transizione in questo punto è transizione di fase di seconda specie. Perciò, in particolare, l'annullamento di $H_c(T)$ per $T = T_c$ deve svolgersi con continuità. È noto dalla teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie [2]) che il cambiamento del potenziale termodinamico in prossimità del punto di transizione è proporzionale al quadrato della differenza di temperature $T - T_c$. Perciò dalla (55,7) si può concludere che in prossimità di T_c il campo critico cambia con la temperatura secondo la legge lineare

$$H_c = \text{costante} \cdot (T_c - T). \tag{55,8}$$

Deriviamo ambedue i membri dell'uguaglianza (55,6) rispetto alla temperatura lungo la curva di dipendenza di H_c da T(per pressione assegnata). Se teniamo conto delle formule (55,4-5), otteniamo

$$\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right), \tag{55,9}$$

ove tutte le grandezze $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_s$, V_s si riferiscono all'istante della transizione tra ambedue gli stati del corpo (cioè al campo $H = H_c$). Moltiplicando questa differenza per T otteniamo il calore di transizione

$$Q = T(\mathcal{S}_n - \mathcal{S}_s) = -\frac{V_s H_c T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_P \tag{55,10}$$

---

[1]) Diamo qui calcoli con grande precisione, che supera quella che si suole usare, allo scopo di rivelare in modo più chiaro relazioni reciproche esistenti tra grandezze termodinamiche diverse.

[2]) Per la transizione superconduttrice la teoria di Landau si può considerare applicabile senza limitazione alcuna, compreso il punto di transizione stesso (cfr. IX § 45).

(*W.H. Keesom*, 1924). Per la transizione nel punto $T = T_c$ (senza campo magnetico) questa grandezza si annulla con H_c conformemente al fatto che qui abbiamo una transizione di fase di seconda specie. Quanto alla transizione per $T < T_c$ (nel campo magnetico), essa è accompagnata dall'assorbimento o dall'emanazione di calore, cioè è una transizione di fase di prima specie. Infatti H_c cresce monotonamente al diminuire della temperatura in tutto l'intervallo da T_c a 0. Perciò la derivata $\partial H_c/\partial T$ è sempre negativa e dalla (55,10) si vede che $Q > 0$, vale a dire che il calore va assorbito per transizione (isotermica) dallo stato superconduttore in quello normale.

Per $T \to 0$ l'entropia di ogni corpo, secondo il teorema di Nernst, deve annullarsi. Perciò dalla (55,9) si vede che per $T = 0$ deve essere $\partial H_c/\partial T = 0$, vale a dire che la curva $H_c = H_c(T)$ interseca l'asse H sotto un angolo retto.

Deriviamo la differenza $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$ (55,9) ancora una volta rispetto a T usando di nuovo a tale scopo le uguaglianze (55,4-5). Tenendo anche conto che $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ otteniamo il seguente risultato:

$$\frac{\partial \mathscr{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathscr{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right) - 2\frac{\partial V_s}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right) - \\ - \frac{\partial V_s}{\partial P}\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_c^2}{8\pi}\right)\right)^2. \qquad (55,11)$$

Moltiplicando entrambi i membri di questa uguaglianza per T, otteniamo la differenza di calori specifici (per pressione costante) di ambedue le fasi. I termini contenenti il coefficiente di dilatazione termica e il coefficiente di compressibilità della sostanza sono, di solito, molto piccoli rispetto agli altri termini; trascurandoli otteniamo

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s T}{4\pi} H_c \frac{\partial^2 H_c}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)^2 \qquad (55,12)$$

Questa formula si può ottenere anche per derivazione diretta della relazione approssimata (55,7). In questa approssimazione la differenza tra V_s e V_{s0} è inessenziale; si possono anche supporre uguali $\mathscr{C}_s$ e $\mathscr{C}_{s0}$.

Per $T = T_c$ il primo termine nella (55,12) si annulla, e otteniamo così la seguente formula che descrive un legame tra il salto del calore specifico per transizione di fase di seconda specie in assenza di campo magnetico esterno e la dipendenza di H_c dalla temperatura:

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s T_c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)^2 \qquad (55,13)$$

(*A.J. Rutgers*, 1933). Di qui si vede che in questo caso $\mathscr{C}_s > \mathscr{C}_n$. Al diminuire della temperatura (cioè quando la superconduttività

va distrutta dal campo magnetico) la differenza $\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n$ cambia di segno conformemente al fatto che la differenza $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$ si annulla per $T = 0$ e per $T = T_c$ e che quest'ultima nell'intervallo indicato deve passare per un massimo.

Analogamente si possono studiare effetti dovuti alla variazione del volume per transizione. A tale scopo deriviamo l'equazione (55,6) rispetto alla pressione lungo la curva di dipendenza di H_c da P (per temperatura assegnata); come risultato abbiamo

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial P}\left(P + \frac{H_c^2}{8\pi}\right)$$

ossia

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_c}{4\pi}\frac{\partial H_c}{\partial P}, \tag{55,14}$$

ciò che determina la variazione del volume all'istante della transizione [1]). Nel punto $T = T_c$ questa differenza, così come la differenza di entropie, si annulla. La transizione a temperature $T < T_c$ è accompagnata dalla variazione del volume che può avere ambedue i segni a seconda del segno della derivata $(\partial H_c/\partial P)_T$. Per $T = T_c$ il volume non cambia ma si verifica un salto del coefficiente di compressibilità che è facile determinare mediante derivazione dell'uguaglianza (55,14).

Osserviamo che sostituendo nella (55,14) l'espressione

$$\left(\frac{\partial H_c}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H_c}$$

(che si ottiene derivando l'equazione $H_c(P, T) =$ costante), abbiamo l'«equazione di Clapeyron-Clausius»

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{H_c} = \frac{Q}{T(V_n - V_s)}, \tag{55,15}$$

ove la derivata $(\partial P/\partial T)_H$ determina la variazione della pressione necessaria affinché il campo esterno applicato resti critico al variare della temperatura.

Il campo critico H_c ha un significato fisico notevolmente più ampio di quello che deriva dalla sua definizione rispetto al comportamento del cilindro superconduttore. L'uguaglianza $H = H_c$ rappresenta condizione di equilibrio che deve essere soddisfatta in ogni punto della superficie di separazione tra le fasi normale (n) e super-

[1]) Questa differenza si deve distinguere, ovviamente, dal cambiamento del volume (magnetostrizione) del superconduttore al variare del campo da zero ad H_c. Quest'ultima relazione si può ricavare dalla (55,5):

$$V_s(P, T) - V_{s0}(P, T) \approx \frac{H_c^2}{8\pi}\left(\frac{\partial V_s}{\partial P}\right)_T.$$

conduttrice (s) della sostanza in medesimo corpo. Ciò è evidente già dalle seguenti considerazioni. Se il cilindro si trova nel campo magnetico longitudinale uguale proprio a H_c, allora sia le condizioni di frontiera per il campo magnetico che le condizioni di stabilità termodinamica sono soddisfatte in misura uguale per tutti gli stati nei quali ogni parte cilindrica interna del volume del campione si trova nello stato superconduttore e la parte esterna nello stato normale. In questo caso sulla loro frontiera $H = H_c$. Quindi, la superficie di separazione sulla quale $H = H_c$ si trova in equilibrio indifferente rispetto al luogo della sua posizione. È questa la proprietà a caratterizzare l'equilibrio di fase.

In un campo magnetico variabile la frontiera tra le fasi superconductrice e normale si sposta. La cinetica di questo spostamento rappresenta processo molto complicato e il suo studio chiederebbe che siano risolte contemporaneamente le equazioni termodinamiche e l'equazione della conduzione termica tenendo conto del calore emanato per transizione di fase. Senza soffermarci su questo studio [1]) diamo soltanto una condizione di frontiera che deve essere soddisfatta sulla frontiera in moto tra le fasi normale e superconduttrice.

Per la sua deduzione consideriamo il sistema di coordinate K' che si muove con velocità $\mathbf{v}$, ossia la velocità di spostamento della frontiera tra le fasi. In accordo con una nota formula di trasformazione dei campi il campo $\mathbf{E}'$ nel sistema di coordinate K' si esprime in funzione dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ nel sistema K immobile così:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$$

(cfr. (63,1)). Poiché nel sistema K' la frontiera è a riposo, per essa si verifica la condizione ordinaria di continuità della componente tangenziale di $\mathbf{E}'$, cioè della grandezza

$$[\mathbf{nE}'] = [\mathbf{nE}] - \frac{v}{c}\mathbf{B}$$

($\mathbf{n}$ è il vettore unitario della normale alla superficie, diretto lungo la velocità $\mathbf{v}$). Nella fase superconduttrice $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$, e nella fase normale (sulla frontiera) $B = H_c$. Troviamo, quindi, che sulla superficie di separazione in moto compare il campo elettrico tangenziale perpendicolare al campo magnetico e per grandezza uguale a

$$E = \frac{v}{c} H_c. \qquad (55,16)$$

---

[1]) Cfr. *Lifšitz I.M.* — JETF, 1950, v. 20, p. 234; Atti dell'Accademia delle scienze dell'URSS, 1953, v. 90, p. 363.

§ 56. *Stato intermedio*

Se un corpo superconduttore di forma qualsiasi si trova nel campo magnetico esterno la cui intensità $\mathfrak{H}$ aumenta gradualmente, in fin dei conti arriva un momento in cui la grandezza del campo raggiunge in un punto della superficie il valore critico H_c mentre il campo $\mathfrak{H}$ stesso diviene inferiore a H_c. Così, sulla superficie dell'ellissoide (nel campo $\mathfrak{H}$ parallelo a uno degli assi del corpo) il campo raggiunge un massimo sull'equatore (cfr. la (54,3)); esso ha il valore H_c già per $\mathfrak{H} = H_c(1 - n)$.

Per ulteriore aumento di $\mathfrak{H}$ il corpo non può trovarsi più completamente nello stato superconduttore. Esso non è in grado di passare completamente allo stato normale poiché in questo caso il campo sarebbe uguale ovunque a $\mathfrak{H}$. Perciò deve verificarsi una distruzione parziale della superconduttività.

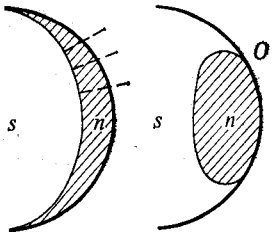


Fig. 33

A prima vista questa distruzione si potrebbe immaginare nel seguente modo. A misura di aumento di $\mathfrak{H}$ la superconduttività si distrugge nella parte del volume del corpo che aumenta gradualmente mentre nella parte che diminuisce rispettivamente il corpo resta superconduttore; il corpo passa completamente allo stato normale per $\mathfrak{H} = H_c$. È facile vedere tuttavia che tali stati del corpo sono termodinamicamente instabili. A tale scopo ricordiamo che sulla superficie di separazione tra le fasi superconduttrice e normale il campo magnetico è tangente alla superficie (e per grandezza uguale a H_c). In altre parole, le linee di forza del campo giacciono su questa superficie. Se la frontiera è convessa verso la fase normale, le superficie equipotenziali del campo perpendicolari alle sue linee di forza divergeranno in profondità della regione normale (come ciò è rappresentato nella fig. 33, *a* mediante le linee in tratteggio). Ma nella direzione di divergenza delle superficie equipotenziali la grandezza del campo decresce in modo tale che nella regione tratteggiata sarebbe $H < H_c$ in contraddizione con l'ipotesi che qui esista lo stato normale. Se invece la frontiera della fase superconduttrice è concava, le linee di forza che la riempiono nel passare alla superficie libera della regione superconduttrice (alla quale il campo sempre è tangente) avranno un flesso (il punto O nella fig. 33, *b*). Ma nel punto di flesso le linee di forza diventano infinite, ciò che di nuovo contraddice le condizioni di frontiera sulla superficie del superconduttore.

Le idee esposte rappresentano in linea di massima un altro aspetto di quella situazione che implica la comparsa della struttura

a domini nei corpi ferro- e magnetoelettrici. Anche in questo caso le condizioni di stabilità termodinamica fanno sì che appena il campo magnetico raggiunge il valore H_c almeno in un punto della superficie del corpo quest'ultimo si scinde in grande numero di strati sottili paralleli a vicenda normali e superconduttori (*L.D. Landau*, 1937). Questo stato singolare del superconduttore si chiama *intermedio*. All'aumentare graduale di $\mathfrak{H}$ il volume generale degli strati normali cresce finché per $\mathfrak{H} = H_c$ il corpo non passerà interamente allo stato normale.

Nel caso generale di un corpo di forma qualsiasi non è necessario che tutto il suo volume debba trovarsi nello stato intermedio. In esso possono coesistere anche zone degli stati puramente superconduttore e normale che sono in contatto con lo stato intermedio, ma non direttamente l'uno con l'altro. Sotto questo aspetto è più semplice il caso suindicato della forma ellissoidale del corpo. In un campo parallelo al suo asse lo stato intermedio esiste nell'intervallo

$$H_c\,(1 - n) < \mathfrak{H} < H_c, \tag{56,1}$$

inoltre, in questo stato si trova tutto il volume dell'ellissoide. Così, per una sfera $n = 1/3$ e la zona dello stato intermedio è compresa nell'intervallo $2/3H_c < \mathfrak{H} < H_c$. Per un cilindro nel campo trasversale $n = 1/2$ e l'intervallo dello stato intermedio è $1/2H_c < \mathfrak{H} < H_c$. Nel campo longitudinale per il cilindro $n = 0$, lo stato intermedio in generale non esiste e la superconduttività si distrugge totalmente per $\mathfrak{H} = H_c$. Infine, per la lamina pianoparallela nel campo trasversale $n = 1$ e essa si trova nello stato intermedio per qualsiasi campo $\mathfrak{H} < H_c$.

Lo stato intermedio consente anche una descrizione media se presentano interesse i settori del corpo grandi rispetto allo spessore degli strati (*R. Peierls, F. London*, 1936). In questa descrizione è supposto che il campo magnetico con induzione $\overline{\mathbf{B}}$ esista all'interno del corpo e assuma valori da zero (nello stato superconduttore puro) a H_c (nello stato normale puro). Attribuendo alla sostanza nello stato intermedio un'induzione non nulla si deve anche attribuirle un determinato valore dell'« intensità » magnetica $\overline{\mathbf{H}}$. Per stabilire una relazione tra queste grandezze occorre considerare la struttura vera e propria dello stato intermedio.

Il campo magnetico nello strato normale sulla sua frontiera con lo strato superconduttore vale H_c, e in virtù dell'ipotesi che strati siano sottili si può supporre che il campo abbia questo valore in tutto il volume dello strato. Negli strati superconduttori, invece, $\mathbf{B} = 0$. Perciò considerando la media del campo magnetico rispetto al volume più grande dello spessore degli strati, troviamo che l'induzione media $\overline{B} = x_n H_c$, ove x_n è una porzione di volume apparte-

nente allo stato normale. In seguito, determiniamo il potenziale termodinamico dell'unità di volume del corpo calcolandolo a partire da un valore corrispondente allo stato superconduttore puro. Se il campo magnetico non esiste, l'unità di volume della fase normale possiede il potenziale termodinamico d'eccesso $H_c^2/8\pi$ [1]). Se in essa esiste il campo magnetico si aggiunge la stessa energia magnetica in modo che si ottiene $H_c^2/4\pi$. Quindi, il potenziale termodinamico medio per unità di volume nello stato intermedio vale

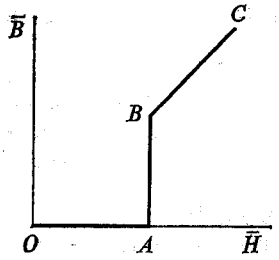


Fig. 34

$$\Phi = \frac{H_c^2}{4\pi} x_n = \frac{H_c \bar{B}}{4\pi}. \qquad (56,2)$$

Secondo la regola generale la dipendenza tra $\bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ si ricava dalla relazione termodinamica

$$\mathbf{H} = 4\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{B}}.$$

In questo caso troviamo che il vettore $\bar{\mathbf{H}}$ è parallelo a $\bar{\mathbf{B}}$ e il suo valore assoluto vale

$$\bar{H} = H_c, \qquad (56,3)$$

cioè è costante a prescindere dal valore dell'induzione.

Se rappresentiamo graficamente la dipendenza di $\bar{B}$ da $\bar{H}$ (fig. 34), allo stato superconduttore corrisponderà il segmento OA dell'asse delle ascisse e a quello normale la retta BC ($\bar{B} = \bar{H}$). Il segmento verticale AB ($\bar{H} = H_c$) corrisponde allo stato intermedio.

Sia $\mathbf{n}$ il vettore unitario nella direzione delle linee di forza della media del campo magnetico. Scrivendo $\bar{\mathbf{H}} = H_c\mathbf{n}$ e sostituendo nell'equazione rot $\bar{\mathbf{H}} = 0$ (vera in assenza di corrente di volume), troviamo che rot $\mathbf{n} = 0$. D'altra parte, siccome $\mathbf{n}^2 = 1$ si ha

$$\text{grad } \mathbf{n}^2 = 2\,(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n} + 2\,[\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{n}] = 0$$

e ne segue che anche $(\mathbf{n}\nabla)\,\mathbf{n} = 0$. Ma ciò vuol dire che il vettore $\mathbf{n}$ è costante nella direzione delle linee di forza del campo medio. Quindi, queste linee sono rette.

Applichiamo i risultati ottenuti all'ellissoide che si trova nello stato intermedio. All'interno dell'ellissoide si verifica la relazione

$$(1 - n)\,\bar{H} + n\bar{B} = \mathfrak{H}$$

[1]) Trascuriamo qui tutti gli effetti di strizione. In queste condizioni si potrebbe parlare non del cambiamento del potenziale termodinamico ma del cambiamento dell'energia libera coincidente con quello del potenziale termodinamico.

esprimente l'uniformità del campo interno, valida per ogni dipendenza di B da H. Ponendovi $\bar{H} = H_c$ otteniamo

$$\bar{B} = \frac{\mathfrak{H}}{n} - \frac{1-n}{n} H_c. \tag{56,4}$$

In tal modo, l'induzione media nell'ellissoide varia con l'intensità del campo esterno secondo una legge lineare da zero per $\mathfrak{H} = (1 - n) H_c$ ad H_c per $\mathfrak{H} = H_c$.

Scriviamo anche un'espressione per il potenziale termodinamico totale $\tilde{\mathcal{F}}$ dell'ellissoide nello stato intermedio. A tale scopo partiamo dalla formula generale

$$\tilde{\mathcal{F}} = \int \left[\Phi - \frac{\mathbf{HB}}{8\pi} - \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathfrak{H}}{8\pi} \right] dV$$

(cfr. la (32,7)) che si verifica anch'essa qualunque sia la dipendenza di **B** da **H**. Sostituendovi i valori di Φ, H, B dalle formule (56,2-4) abbiamo

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \frac{V}{8\pi} \left[H_c^2 - \frac{1}{n} (H_c - \mathfrak{H})^2 \right] \tag{56,5}$$

(V è il volume dell'ellissoide); questo valore si calcola a partire dal potenziale termodinamico dell'ellissoide superconduttore puro in assenza di campo magnetico. Per l'ellissoide superconduttore nel campo esterno $\mathfrak{H}$ abbiamo

$$\tilde{\mathcal{F}}_s = -\frac{\mathcal{M}\mathfrak{H}}{2} = \frac{V\mathfrak{H}^2}{8\pi(1-n)} \tag{56,6}$$

(in accordo con le (32,6) e (54,2)). Per $\mathfrak{H} = H_c (1 - n)$ il potenziale termodinamico e la sua derivata prima rispetto alla temperatura sono continue; in questo senso il passaggio dallo stato superconduttore a quello intermedio è analogo alla transizione di fase di seconda specie [1]).

Sottolineiamo che la precisione del calcolo della media dello stato intermedio esposto è di fatto non grande per spessore relativamente grande degli strati. Per la stessa ragione in questa descrizione in generale sfuggono alcuni fenomeni dovuti alle singolarità della struttura stratificata. Tale è, ad esempio, il fatto che il passaggio dallo stato superconduttore a quello intermedio all'aumentare del campo esterno avviene in realtà non precisamente per $\mathfrak{H} = (1 - n) H_c$ ma un po' più tardi. La natura di questo

[1]) Non c'è da meravigliarsi in questo legame che $\mathcal{F}_t(\mathfrak{H}) < \mathcal{F}_s(\mathfrak{H})$ dai due lati del punto $\mathfrak{H} = H_c (1 - n)$. Ricordiamo che per transizione di fase di seconda specie ciascuna delle fasi non esiste in generale dall'altro lato del punto di transizione, e perciò non ha senso eseguire un confronto tra i potenziali termodinamici delle due fasi.

« ritardo » è la seguente. Il passaggio allo stato intermedio avviene quando quest'ultimo diviene termodinamicamente stabile, cioè all'istante in cui $\tilde{\mathcal{F}}_t = \tilde{\mathcal{F}}_s$. Ma struttura stratificata, oltre all'energia « di volume » pura (56,5) che le va attribuita per la descrizione media, è legata anche a un'energia complementare condizionata dall'esistenza delle frontiere tra gli strati e dal cambiamento della loro forma in prossimità della superficie del corpo. È questa circostanza ad implicare uno spostamento del punto di transizione verso grandi campi.

Come è stato osservato nella nota alla pag. 269, in questo capitolo trattiamo i superconduttori di prima specie. Ciononostante, facciamo una piccola osservazione circa la termodinamica della « curva di magnetizzazione » di un superconduttore cilindrico di seconda specie. Per questi superconduttori è caratteristica una penetrazione graduale in essi del campo magnetico. Così, in un superconduttore cilindrico lungo sito nel campo magnetico longitudinale $\mathfrak{H}$ la penetrazione comincia quando il campo raggiunge un valore $H_{c1}(T)$, e soltanto nel campo $H_{c2} > H_{c1}$ il superconduttore passa con continuità allo stato normale [1]).

Partiamo dalla relazione $\partial\tilde{\mathcal{F}}/\partial H = -\mathcal{M}$ (cfr. la (32,4)). Integrando ambedue i membri dell'uguaglianza rispetto a H nei limiti tra 0 e H_{c2} otteniamo

$$-\int_0^{H_{c2}} \mathcal{M}\, d\mathfrak{H} = \tilde{\mathcal{F}}_n - \tilde{\mathcal{F}}_{s0},$$

ove $\tilde{\mathcal{F}}_{s0}$ si riferisce al superconduttore in assenza di campo, mentre $\tilde{\mathcal{F}}_n$ in generale non dipende dal campo esterno in nessun modo (perciò sopra queste due lettere si può omettere il segno $\sim$). Ma nell'intervallo $0 \leqslant H \leqslant H_{c1}$ il campo non penetra nel cilindro, e perciò il suo momento magnetico $\mathcal{M} = -V\mathfrak{H}/4\pi$. Separando questa parte dell'integrale abbiamo

$$\int_{H_{c1}}^{H_{c2}} \mathcal{M}\, d\mathfrak{H} = -(\tilde{\mathcal{F}}_n - \tilde{\mathcal{F}}_{s0}) + \frac{VH_{c1}^2}{8\pi}.$$

Se introduciamo in modo puramente formale la grandezza H_c per un superconduttore di seconda specie in accordo con la definizione

---

[1]) Cfr. IX §§ 47, 48. Lo stato del superconduttore nell'intervallo di campi tra H_{c1} e H_{c2} si dice *misto*. Sottolineiamo che esso non coincide affatto con lo stato intermedio dei superconduttori di prima specie. Nello stato misto il campo magnetico penetra nel campione sotto forma di fili vorticosi.

precedente [1])

$$\mathfrak{F}_n - \mathfrak{F}_{s0} = V \frac{H_c^2}{8\pi}$$

la relazione ottenuta può essere scritta nella seguente forma:

$$\int_{H_{c1}}^{H_{c2}} \mathcal{M}\, d\mathfrak{H} = -\frac{V}{8\pi}(H_c^2 - H_{c1}^2). \qquad (56,7)$$

Problema

Trovare la capacità termica di un ellissoide nello stato intermedio.

Soluzione. L'entropia e in seguito la capacità termica troviamo derivando rispetto alla temperatura il potenziale termodinamico (56,5). Trascurando i termini contenenti il coefficiente di dilatazione termica del corpo, otteniamo

$$\mathcal{C}_t - \mathcal{C}_s = \frac{VT}{4\pi n}[(1-n)(H_c'^2 + H_c H_c'') - \mathfrak{H} H_c'']$$

(l'apice esprime la derivazione rispetto a T); $\mathcal{C}_s$ è la capacità termica nello stato superconduttore (trascuriamo qui la sua debole dipendenza da $\mathfrak{H}$). Ne risulta che al variare di $\mathfrak{H}$ (a temperatura costante) la capacità termica nel punto $\mathfrak{H} = (1-n) H_c$ varia in modo discontinuo da $\mathcal{C}_s$ a

$$\mathcal{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H_c'^2$$

e in seguito varia con $\mathfrak{H}$ secondo una legge lineare fino al valore (per $\mathfrak{H} = H_c$)

$$\mathcal{C}_s - \frac{VT}{4\pi}(H_c'^2 + H_c'' H_c) + \frac{VT}{4\pi n} H_c'^2 = \mathcal{C}_n + \frac{VT}{4\pi n} H_c'^2$$

e in seguito cade in modo discontinuo fino a $\mathcal{C}_n$.

§ 57. *Struttura dello stato intermedio*

La forma e le dimensioni degli strati n ed s nello stato intermedio sono definite dalle condizioni di equilibrio termodinamico del corpo in totale, analogamente alla determinazione della forma dei domini nei ferromagneti (§ 44). Come in quel caso, lo spessore degli strati che si stabilisce è risultato di due tendenze opposte. La tensione superficiale sulle frontiere tra le fasi n ed s tende a diminuire il numero di strati, aumentandone cioè lo spessore. In direzione opposta

[1]) Il valore H_c è compreso tra H_{c1} e H_{c2}. Di per sé, tuttavia, esso non è significativo per niente per un superconduttore di seconda specie.

agisce l'energia d'emersione degli strati verso la superficie libera del corpo. Lo spessore degli strati cresce all'aumentare delle dimensioni del corpo e come risultato (le ragioni sono le stesse che per i domini ferromagnetici) in fin dei conti deve cominciare una ramificazione all'avvicinarsi alla superficie del corpo [1]).

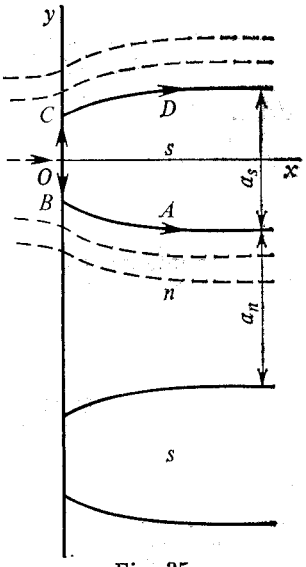


Fig. 35

Il problema della ricerca della forma e delle dimensioni degli strati non ramificati nello stato intermedio può essere risolto precisamente per la lamina pianoparallela; partiamo dall'ipotesi che il campo esterno $\mathfrak{H}$ sia perpendicolare alla lamina (*L.D. Landau*, 1937).

Gli strati sono disposti lungo il campo e la loro pianoparallelità si viola soltanto in prossimità della superficie della lamina.

Le linee di forza del campo magnetico (linee tratteggiate nella fig. 35) passano soltanto attraverso gli strati n, mentre le frontiere degli strati s sono anch'esse linee di forza (in virtù della condizione $B_n = 0$ su di esse). Tenendo anche conto che sulla frontiera tra le fasi n ed s deve essere $H = H_c$, scriviamo le seguenti condizioni sulle frontiere dello strato s:

$$\begin{cases} \text{nel segmento } BC\text{: } H_x = 0, \\ \text{in } BA \text{ e } CD\text{: } H_x^2 + H_y^2 = H_c^2 \end{cases} \tag{57,1}$$

(assi coordinati sono come nella fig. 35). Lontano dalla lamina il campo **H** deve coincidere con il campo esterno, cioè

$$\text{per } x \to -\infty \quad H_x = \mathfrak{H}, \quad H_y = 0. \tag{57,2}$$

Introduciamo i potenziali scalare e vettoriale del campo secondo le formule

$$H_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}$$

e il potenziale complesso $w = \varphi - iA$ (cfr. § 3).

Lungo ciascuna delle linee di forza A = costante. Poniamo $A = 0$ sulla linea di forza che si avvicina al punto O e in seguito

[1]) In determinate condizioni (campi esterni vicini a zero o a H_c) termodinamicamente più vantaggiosa può risultare la struttura filiforme e non stratificata. Cfr. *Andrew E. R.* — Proc. Roy. Soc., 1948, v. 194A, p. 98.

si ramifica sulla linea OCD e OBA formando la frontiera di uno degli strati s. La differenza dei valori di A sulla frontiera tra due strati s seguenti è uguale al flusso magnetico attraverso il tratto $a = a_s + a_n$, cioè a $\mathfrak{H}a$. Perciò i valori di A sulle frontiere di tutti gli strati s saranno interi multipli di $\mathfrak{H}a$. Introducendo anche l'« intensità complessa »

$$\eta = H_x - iH_y = -\frac{dw}{dz}, \quad z = x + iy$$

scriviamo le condizioni (57,1) nella forma

$$\begin{aligned} &\text{in } BC: \operatorname{Re}\eta = 0, \\ &\text{in } BA \text{ e } CD: |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57,3}$$

Introduciamo la nuova grandezza

$$\zeta = \exp(-2\pi w/\mathfrak{H}a) - 1 \tag{57,4}$$

e considereremo η come funzione di ζ. Su tutte le linee di forza di frontiera (con i loro prolungamenti all'esterno della lamina) la grandezza ζ è reale:

$$\zeta = \exp(-2\pi\varphi/\mathfrak{H}a) - 1.$$

Poiché φ è definita a meno della costante, si può considerare valore qualsiasi di φ in ogni punto. Sia $\varphi = 0$ nel punto O. Allora in questo punto anche $\zeta = 0$. Sulla linea di forza di frontiera considerata lontano dalla lamina $\zeta = -1$ (poiché per $x \to -\infty$ abbiamo $\varphi \to -\mathfrak{H}x \to +\infty$). Il valore di ζ nel punto B (o C), ove la linea di forza penetra all'interno della lamina, indichiamo con ζ_0. Sui rami CD e BA ζ varia da ζ_0 a ∞. Allora le condizioni (57,1) e (57,3) si possono riscrivere nella forma

$$\text{per } \zeta = -1 \quad \eta = \mathfrak{H}, \tag{57,5}$$

$$\begin{aligned} &\text{per } 0 < \zeta < \zeta_0 \quad Re\,\eta = 0, \\ &\text{per } \zeta_0 < \zeta \quad |\eta| = H_c. \end{aligned} \tag{57,6}$$

Inoltre, la funzione $\eta(\zeta)$ ovunque deve essere finita.

Le condizioni (57,6) sono soddisfatte dalla funzione

$$\eta = H_c\left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{-\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right]. \tag{57,7}$$

Per valori di ζ reali negativi le due radici sono reali e si calcolano con i segni qui scritti. Per $0 < \zeta < \zeta_0$ ambedue le radici sono immaginarie e si calcolano, inoltre, le radici

$$\eta = \mp H_c i\left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta} - 1}\right]$$

con i segni «—» o «+» nei tratti OC e OB, rispettivamente. Per $\zeta > \zeta_0$ si deve scrivere

$$\eta = H_c \left[\sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} \mp i \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \right]$$

con il segno «—» o «+ » in CD e BA, rispettivamente. Il valore ζ_0 si ricava dalla condizione (57,5) e vale

$$\zeta_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{h} - h \right)^2, \tag{57,8}$$

ove abbiamo introdotto la notazione $h = \mathfrak{H}/H_c$.

La forma di uno strato, cioè l'equazione della linea di forza di frontiera, si ottiene integrando la relazione $dz = -dw/\eta$ rispetto a ζ reali:

$$z = -\int \frac{dw}{\eta} = \frac{ah}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{\eta(\zeta+1)}.$$

Sostituendovi $\eta(\zeta)$, separando le parti reale e immaginaria e considerando in modo appropriato le costanti d'integrazione otteniamo la seguente equazione parametrica esprimente la linea CD:

$$x = \frac{ha}{2\pi} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sqrt{1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = \frac{ha}{\pi} \left[\operatorname{Arch} \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\zeta_0 + 1} \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{\zeta(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}} \right], \tag{57,9}$$

$$y = Y - \frac{ha}{2\pi} \int_{\zeta}^{\infty} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta+1} = Y - \frac{ha}{\pi} \sqrt{\zeta_0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\zeta} \right)$$

($Y = a_s/2$ è il valore della coordinata y per $x \to \infty$; cfr. la fig. 35).

Il periodo della struttura stratificata a è legato agli spessori a_s e a_n degli strati s ed n mediante le uguaglianze $a = a_s + a_n$, $a\mathfrak{H} = a_n H_c$. La seconda di esse è conseguenza della continuità del flusso magnetico passante interamente attraverso gli strati n. Di qui

$$a_s = a(1 - h), \quad a_n = ha.$$

Il periodo a è determinato dalla condizione di minimo del potenziale termodinamico totale della lamina. L'esistenza della tensione superficiale sulla frontiera tra le fasi n ed s conduce al termine

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{2l}{a} \frac{H_c^2}{8\pi} \Delta \tag{57,10}$$

nel potenziale termodinamico riferito a 1 cm² della superficie della lamina. Qui l è lo spessore della lamina e il coefficiente di tensione superficiale indicato con il simbolo $H_c^2\Delta/8\pi$ (Δ ha la dimensione

di lunghezza). È ovvio che per il calcolo di questa parte dell'energia si può trascurare il fatto che gli strati si arrotondano in prossimità della superficie della lamina.

L'energia di emersione degli strati verso la superficie della lamina si può rappresentare nella forma della somma di due parti. Primo, di per sé l'aumento del volume degli strati n rispetto al volume che essi avrebbero se si conservasse la pianoparallelità per tutta la distensione conduce all'energia complementare

$$\mathcal{F}_2 = \frac{4}{a} \int_0^\infty (Y - y)\, dx\, \frac{H_c^2}{8\pi} \tag{57,11}$$

(il fattore 4 tiene conto di quattro angoli del tipo B e C nella fig. 35 dai due lati di ciascuno dei $1/a$ strati s).

Secondo, l'emersione degli strati alla superficie della lamina cambia l'energia del sistema nel campo esterno, cioè l'energia $-\mathcal{M}\mathfrak{H}/2$. Il momento magnetico della lamina è condizionato da correnti sulle superficie degli strati s. Per un salto della componente tangenziale dell'induzione da H a 0 la densità superficiale di correnti $g = \pm\, cH/4\pi$. Perciò per unità di lunghezza dell'asse z su ogni superficie di frontiera dello strato s il momento magnetico vale

$$-\int_{OCD} \frac{H}{4\pi}\, y\, ds \quad (ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

Se lo strato non emergesse alla superficie il tratto OC non esisterebbe e in CD ovunque sarebbe $y = Y$. Perciò il momento magnetico in eccesso per ciascuno dei quattro angoli vale

$$-\int_{OCD} \frac{H}{4\pi}\, y\, ds + \int_0^\infty \frac{H_c}{4\pi}\, Y\, dx.$$

Rispettivamente l'energia in eccesso è

$$\mathcal{F}_3 = -\frac{\mathfrak{H}}{2}\,\frac{4}{a}\left[\int_0^\infty \frac{H_c}{4\pi}\, Y\, dx - \int_{OCD} \frac{H}{4\pi}\, y\, ds\right] =$$

$$= \frac{\mathfrak{H}}{2a\pi}\left[H_c \int_{CD} (-Y\, dx + y\, ds) + \int_{OC} Hy\, dy\right]. \tag{57,12}$$

Le coordinate x e y espresse in funzione di ζ, sono proporzionali ad a. Perciò tutti gli integrali in $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ sono proporzionali ad a^2, cosicché questa componente del potenziale termodinamico è proporzionale ad a.

La somma $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$, quindi, ha la forma

$$\mathcal{F} = \frac{H_c^2}{4\pi}\left[\frac{l\Delta}{a} + af(h)\right]. \tag{57,13}$$

La condizione di suo minimo dà

$$a = \sqrt{\frac{l\Delta}{f(h)}}. \tag{57,14}$$

Gli integrali (57,11-12) si possono calcolare interamente [1]) e per la funzione $f(h)$ abbiamo la seguente espressione:

$$f(h) = \frac{1}{4\pi}\{(1+h)^4 \ln(1+h) + (1-h)^4 \ln(1-h) - \\ -(1+h^2)^2 \ln(1+h^2) - 4h^2 \ln 8h\}. \tag{57,15}$$

Le espressioni limite di questa funzione sono

$$f(h) = \frac{h^2}{\pi} \ln \frac{0{,}56}{h} \quad \text{per } h \ll 1; \\ f(h) = \frac{\ln 2}{\pi}(1-h)^2 \quad \text{per } 1-h \ll 1. \tag{57,16}$$

Nella fig. 36 è rappresentato il grafico della funzione $f(h)$.

È da notare che negli strati n in prossimità della superficie della lamina il campo magnetico può essere notevolmente inferiore ad H_c, cioè qui si verifica una situazione rappresentata nella fig. 33, a [2]). Il suo svantaggio termodinamico si compensa in questo caso dall'energia della tensione superficiale che ostacola ulteriore diminuzione dello spessore degli strati.

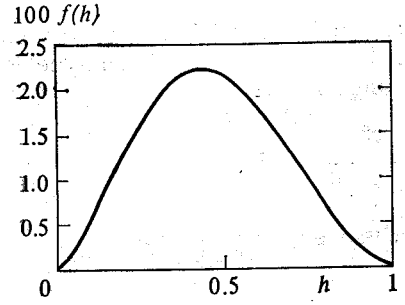


Fig. 36

Come è stato detto, all'aumentare dello spessore della lamina deve verificarsi la ramificazione degli strati. Ciò implica, a sua volta, un cambiamento della dipendenza del periodo a della struttura da l; nel caso limite di ramificazione multipla $a \backsim l^{2/3}$. Dalle relazioni numeriche calcolate risulta però che la ramificazione deve iniziare relativamente tardi [3]).

---

[1]) Cfr. *Fortini A., Paumier E.* — Phys. Rev. B, 1972, v. 5, p. 1850.

[2]) Così, per $h = 1/2$ il campo sulla superficie in un punto di mezzo vale $0{,}73\, H_c$, e per $h \to 0$ tende a $0{,}65\, H_c$.

[3]) Per calcolo del modello con ramificazione multipla degli strati si veda *Landau L. D.* JETF, 1943, v. 13, p. 377.

Capitolo VII

CAMPO ELETTROMAGNETICO QUASI-STAZIONARIO

§ 58. *Equazioni del campo quasi-stazionario*

Finora abbiamo studiato campi elettrici e magnetici costanti e l'equazione di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{58,1}$$

è stata applicata (nel § 31) soltanto a scopo ausiliare per la deduzione dell'espressione per l'energia del campo magnetico.

Il carattere dei campi elettromagnetici variabili nei mezzi materiali dipende notevolmente dalla natura di questi mezzi e dall'ordine di grandezza della frequenza del campo. In questo paragrafo considereremo fenomeni che si producono in conduttori massivi collocati nel campo magnetico esterno variabile. Supporremo in questo caso che la velocità di variazione del campo sia non troppo grande essendo limitata da alcune condizioni che saranno formulate più avanti. I campi elettromagnetici e le correnti soddisfacenti a queste condizioni si chiamano *quasi-stazionari*.

Prima di tutto supponiamo che la lunghezza d'onda $\lambda \sim c/\omega$ corrispondente (nel vuoto o nel mezzo dielettrico in cui si trova il conduttore) alla frequenza del campo ω sia grande rispetto alle dimensioni l del corpo:

$$\omega \ll c/l.$$

Allora la distribuzione del campo magnetico all'esterno del conduttore in ciascun istante del tempo si può descrivere mediante le equazioni del campo statico

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \tag{58,2}$$

trascurando tutti gli effetti dovuti al fatto che la velocità di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche è finita. È ovvio che ciò è possibile soltanto a distanze non troppo grandi (piccole rispetto a λ) dal corpo (che comunque sono sufficienti per la determinazione del campo al suo interno).

Il sistema di equazioni totale per il campo all'interno del conduttore consta dell'equazione (58,1) e delle equazioni

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{58,3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{58,4}$$

(per un cristallo elettricamente anisotropo, non cubico, bisogna scrivere $j_i = \sigma_{ik} E_k$). La seconda di queste ultime equazioni è stata introdotta a rigore per le correnti e i campi magnetici costanti. Perciò è necessario trovare un criterio che permetta di usare a precisione sufficiente questa equazione per i campi variabili. Quel che più importa nell'equazione (58,4) è che il legame tra corrente e intensità del campo elettrico sia dato dalla relazione $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ con valore costante σ riferito al caso stazionario. Ciò si avvera se il periodo di variazione del campo è grande rispetto ai tempi caratteristici per il meccanismo microscopico di conducibilità. In altre parole, la frequenza del campo deve essere piccola rispetto al tempo inverso del moto libero degli elettroni nel conduttore. Per metalli tipici (a temperatura ambiente) le frequenze limite ammissibili da questa condizione giacciono nella regione infrarossa dello spettro [1].

Inoltre, tuttavia, esiste un'altra condizione che limita in questo caso l'applicabilità delle equazioni. L'equazione (58,4) suppone che il legame tra corrente e campo sia *locale*, cioè che la densità di corrente in un punto del conduttore sia determinata dal valore del campo in questo solo punto. Ciò, a sua volta, suppone la piccolezza di lunghezze del moto libero degli elettroni rispetto a distanze a cui il campo varia sensibilmente. A questa condizione torneremo nel § 59.

Nelle equazioni (58,1) e (58,4) **E** è l'intensità del campo elettrico indotto che compare grazie alla variabilità del campo magnetico. A partire da **H** noto il campo **E** è definibile direttamente dall'equazione (58,4). L'equazione per **H**, invece, si ottiene escludendo **E** dalle (58,1) e (58,4):

$$\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma} \tag{58,5}$$

---

[1]) Per conduttori cattivi (per i semiconduttori, ad esempio) l'applicabilità dell'equazione (58,4) chiede che sia osservata un'altra condizione che può risultare ancora più forte. Per tali corpi può essere opportuna l'introduzione contemporanea della conducibilità e della permettività dielettrica. In questo caso al secondo membro dell'equazione (58,4) si aggiunge il termine $-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ e la condizione di sua piccolezza rispetto a $4\pi\sigma\mathbf{E}/c$ è $\sigma/\omega \gg \varepsilon$. Per conduttori buoni, metalli, di fatto $\sigma/\omega \gg 1$ in tutta la regione di frequenze per quali si può parlare ancora della conducibilità costante (si veda anche la nota alla pag. 298).

In un mezzo omogeneo a conducibilità costante σ e permeabilità magnetica μ il fattore $1/\sigma$ si può portare fuori dal segno rot e, secondo la (58,3), abbiamo div $\mathbf{B} = \mu$ div $\mathbf{H} = 0$. Perciò rot rot $\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}$ e si ottiene l'equazione

$$\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}. \tag{58,6}$$

Con l'equazione div $\mathbf{H} = 0$ essa costituisce un sistema completo sufficiente per la determinazione del campo magnetico. Osserviamo che l'espressione (58,6) ha la forma dell'equazione di conduzione termica ove da « coefficiente di conducibilità termica » χ funge $c^2/4\pi\sigma\mu$.

Le condizioni di frontiera per il campo magnetico sulla superficie del conduttore sono immediate dalla forma delle equazioni stesse e, come prima, sono

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}. \tag{58,7}$$

L'espressione a secondo membro dell'equazione (58,4) non incide sulla seconda di queste ultime equazioni, in virtù della sua limitatezza. Per $\mu = 1$ si può scrivere semplicemente [1])

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \tag{58,8}$$

In virtù dell'equazione (58,4), abbiamo div $\mathbf{j} = 0$; la condizione di frontiera per quest'ultima equazione è $j_n = 0$ sulla superficie del conduttore. Ne segue per un conduttore elettricamente isotropo (in virtù di $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$) che sulla frontiera anche $E_n^{(i)} = 0$ dove l'indice (i) distingue il campo all'interno del conduttore (nel caso generale del conduttore anisotropo la componente normale del campo in esso sulla frontiera, in generale, è non nulla).

La condizione di frontiera (58,8) è insufficiente per la formulazione completa del problema se il conduttore rappresenta un corpo composto che consta di tratti a conducibilità diverse. Sulle frontiere di separazione tra questi tratti accanto alla continuità di $\mathbf{H}$ è necessario tener conto anche della condizione di continuità di $\mathbf{E}_t$; per il campo magnetico questa condizione significa che

$$\frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_{t1}}{\sigma_1} = \frac{(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})_{t2}}{\sigma_2} \tag{58,9}$$

---

[1]) Per corpi ordinari dia- e paramagnetici μ è molto vicina a 1 e sarebbe superflua precisione tener conto di questa grandezza nelle formule che seguono. Valori di μ sensibilmente differenti da 1 possono esistere per i metalli ferromagnetici le cui proprietà magnetiche (in campi sufficientemente deboli) è possibile descrivere mediante la permeabilità costante grande. Per questi corpi, tuttavia, relativamente presto comincia la dispersione di μ (la comparsa della sua dipendenza dalla frequenza ω) che si accompagna dalla diminuzione di μ praticamente fino a 1. Tenendo conto di questa circostanza, più avanti nel presente capitolo supponiamo che $\mu = 1$.

Supponiamo che il conduttore sia collocato in un campo magnetico le cui sorgenti a un istante si escludono. In questo caso il campo nel conduttore (e attorno a quest'ultimo) non scompare istantaneamente e l'andamento di suo smorzamento con il tempo è definito dall'equazione (58,6). Nella risoluzione di problemi di questo tipo si deve, seguendo metodi generali della fisica matematica, procedere nel seguente modo. Cerchiamo soluzioni dell'equazione (58,6) aventi la forma

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x, y, z)\, e^{-\gamma_m t}$$

con γ_m costanti. Per le funzioni $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ otteniamo le equazioni

$$\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}_m = -\gamma_m\mathbf{H}_m. \tag{58,10}$$

Per una forma assegnata del conduttore queste equazioni hanno soluzioni non nulle (soddisfacenti alle condizioni necessarie di frontiera) soltanto per determinati valori γ_m che costituiscono l'insieme di suoi autovalori. Tutti questi valori sono reali e positivi [1]) e le loro funzioni corrispondenti $\mathbf{H}_m(x, y, z)$ formano un sistema completo di funzioni vettoriali reciprocamente ortogonali. Supponiamo che la distribuzione del campo all'istante iniziale sia data dalla funzione $\mathbf{H}_0(x, y, z)$. Sviluppandola secondo il sistema di funzioni $\mathbf{H}_m$, ossia

$$\mathbf{H}_0(x, y, z) = \sum_m c_m\mathbf{H}_m(x, y, z)$$

otteniamo soluzione del problema posto dello smorzamento del campo nella forma

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t}\mathbf{H}_m(x, y, z). \tag{58,11}$$

La velocità di smorzamento del campo sarà determinata soprattutto da quel termine di questa somma che corrisponde al più piccolo valore dei γ_m; sia questo valore γ_1. Il tempo di smorzamento del cam-

---

[1]) È facile provarlo nel seguente modo. Per evitare la necessità di tener conto delle condizioni di frontiera sulla superficie del corpo, partiamo dall'equazione (58,5) nella quale si può supporre che σ si annulli all'esterno del corpo con continuazione. Moltiplicando ambedue i membri dell'equazione

$$-\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\mathbf{H}_m = -\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}_m}{\sigma}$$

per $\mathbf{H}_m^*$ e integrando rispetto a tutto lo spazio, abbiamo

$$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m\int|\mathbf{H}_m|^2\,dV = \int\mathbf{H}_m^*\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}_m}{\sigma}\,dV = \int\frac{1}{\sigma}|\operatorname{rot}\mathbf{H}_m|^2\,dV,$$

da cui la realità e la positività di γ_m sono evidenti.

po si può determinare come $\tau = 1/\gamma_1$. L'ordine di grandezza di questo tempo è evidente dall'equazione stessa (58,10). Siccome $\Delta\mathbf{H} \sim \sim \mathbf{H}/l^2$ (con l dimensioni del conduttore), allora

$$\tau \sim \frac{4\pi\sigma l^2}{c^2}. \tag{58,12}$$

§ 59. Profondità di penetrazione del campo magnetico in un conduttore

Consideriamo un conduttore collocato nel campo magnetico variabile esterno con frequenza assegnata ω. Penetrando all'interno del conduttore il campo magnetico induce in esso un campo elettrico e quest'ultimo, a sua volta, implica la comparsa di correnti (le cosiddette *correnti di Foucault*). Un'idea generale sul carattere di penetrazione del campo nel conduttore si può ottenere già partendo dall'analogia suindicata tra l'equazione (58,6) e l'equazione della conduzione termica. È noto dalla teoria della conduzione termica che una grandezza soddisfacente a questa equazione si propaga in un intervallo di tempo t a distanza dell'ordine di $\sqrt{\chi t}$. Perciò possiamo concludere immediatamente che il campo magnetico penetra in profondità del conduttore a distanza δ dell'ordine di grandezza di

$$\delta \sim \sqrt{\frac{c^2}{\sigma\omega}}.$$

Lo stesso si riferisce, ovviamente, al campo elettrico e alle correnti da esso indotti.

Nel campo variabile di frequenza ω la dipendenza di tutte le grandezze dal tempo è data dal fattore $e^{-i\omega t}$. In questo caso l'equazione (58,6) assume la forma

$$\Delta\mathbf{H} = -\frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}\mathbf{H}. \tag{59,1}$$

Studiamo due casi limite. Se la *profondità di penetrazione* δ è grande rispetto alle dimensioni del corpo (frequenze piccole), nella prima approssimazione si può sostituire lo zero al secondo membro dell'equazione (59,1). Allora la distribuzione del campo magnetico in ciascun istante di tempo sarà tale come essa sarebbe nel caso stazionario per un valore assegnato del campo esterno lontano dal corpo. Indichiamo questa soluzione con $\mathbf{H}_{st}$; essa è indipendente dalla frequenza (più precisamente, la contiene soltanto nel fattore temporale $e^{-i\omega t}$). Quanto al campo elettrico indotto, esso compare soltanto nell'approssimazione successiva rispetto a ω poiché nel caso stazionario in generale non esisterebbe. A ciò corrisponde il fatto che calcolando $\mathbf{E}$ rispetto a $\mathbf{H}_{st}$ secondo l'equazione (58,4) otterremmo lo

zero in quanto rot $\mathbf{H}_{st} = 0$. Perciò per il calcolo di $\mathbf{E}$ si deve ricorrere all'equazione (58,1) secondo la quale

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}_{st}. \tag{59,2}$$

Questa equazione con l'equazione div $\mathbf{E} = 0$ (che deriva dalla (58,4) per σ costante lungo il corpo) definisce completamente la distribuzione del campo elettrico. È da notare che essa risulta proporzionale alla frequenza ω.

Consideriamo ora il caso limite inverso $\delta \ll l$ (frequenze grandi). La condizione di località delle equazioni di campo, menzionata al § 58, chiede che δ sia grande rispetto alla lunghezza del cammino libero degli elettroni di conduzione [1]).

Per $\delta \ll l$ il campo magnetico penetra soltanto in uno strato superficiale sottile del conduttore. Per il calcolo del campo al di fuori del conduttore si può trascurare lo spessore di questo strato, supponendo cioè che il campo magnetico in generale non penetri all'interno del conduttore. In questo senso il conduttore in un campo magnetico ad alte frequenze si comporta allo stesso modo come un superconduttore nel campo costante, e per il calcolo del campo esterno occorre risolvere il problema stazionario per il superconduttore della stessa forma.

Lo studio della distribuzione vera e propria del campo nello strato superficiale del conduttore si può condurre in forma generale supponendo come piane piccole regioni di superficie. In questo caso si tratterà della risoluzione dell'equazione (59,1) per un mezzo conduttore delimitato da una superficie piana all'esterno della quale il campo ha un valore assegnato che indichiamo con $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$. Questo vettore si ottiene nel modo suindicato in seguito alla soluzione del problema esterno ed è parallelo alla superficie del conduttore. In virtù della condizione di frontiera (58,8) il campo magnetico nel conduttore in prossimità della sua superficie vale sempre $H_0\ e^{-i\omega t}$.

Consideriamo la superficie del conduttore come il piano xy e supponiamo che il mezzo conduttore occupi il semispazio $z > 0$. In virtù dell'omogeneità delle condizioni del problema nelle direzioni x e y il campo cercato $\mathbf{H}$ dipende esclusivamente dalla coordinata z (e dal tempo). Perciò abbiamo div $\mathbf{H} = \partial H_z/\partial z = 0$; poiché sulla frontiera $H_z = 0$, ovunque $H_z = 0$. Secondo la (59,1) per $\mathbf{H}$ otteniamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{H} = 0,$$

[1]) Nei metalli infatti la prima ad essere violata è questa condizione (all'aumentare della frequenza). La condizione $\omega \ll 1/\tau$, ove τ è il tempo del moto libero, può essere più forte per i semiconduttori di piccola conducibilità.

ove

$$k = \sqrt{\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}}\, i = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}{c}(1+i).$$

La soluzione di questa equazione, che si annulla lontano dalla superficie ($z \to \infty$), è proporzionale a e^{ikz}.

Tenendo anche conto della condizione di frontiera per $z = 0$, otteniamo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)}, \tag{59,3}$$

ove la profondità di penetrazione δ è determinata come

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad k = \frac{1+i}{\delta}. \tag{59,4}$$

Il campo elettrico, invece, sarà determinato ora mediante l'equazione (58,4). Introducendo il vettore unitario $\mathbf{n}$ nella direzione dell'asse z, abbiamo

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}(1-i)\,[\mathbf{Hn}]. \tag{59,5}$$

È da notare che $E \sim (\delta/\lambda)\, H$.

Se il campo $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ è polarizzato linearmente, con una scelta appropriata dell'origine per il calcolo del tempo si può ottenere che $\mathbf{H}_0$ sia reale. A tale scopo consideriamo la direzione di questo vettore come la direzione dell'asse y. Separando nelle espressioni (59,4) e (59,5) la parte reale otteniamo

$$\begin{gathered} H_y = H = H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right), \\ E_x = E = H_0 \sqrt{\frac{\omega}{4\pi\sigma}}\, e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4}\right). \end{gathered} \tag{59,6}$$

Con il campo elettrico sarà distribuita anche la densità di correnti di Foucault $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$.

La relazione (59,5) nel caso considerato si verifica per il campo in tutto il semispazio $z > 0$. Nei casi generali una relazione della forma

$$\mathbf{E}_t = \zeta\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}] \tag{59,7}$$

è vera, in generale, soltanto sulla superficie stessa del conduttore per le componenti dei campi ad essa tangenziali (poiché queste componenti sono continue sulla superficie la relazione (59,7) si riferisce al campo da entrambi i lati della superficie). Il coefficiente ζ si

chiama *impedenza superficiale* del conduttore (torneremo nel § 87 agli aspetti più generali di questa nozione [1]). In questo caso

$$\zeta = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,(1-i). \tag{59,8}$$

La comparsa delle correnti di Foucault è accompagnata dalla dissipazione dell'energia del campo emanata sotto forma di calore di Joule. L'energia media Q (rispetto al tempo) dissipata nel conduttore in un secondo vale

$$Q = \int \mathbf{j}\overline{\mathbf{E}}\,dV = \int \sigma\overline{\mathbf{E}}^2\,dV.$$

La si può calcolare anche come quantità media di energia che in un secondo penetra dall'esterno nel conduttore, cioè come integrale

$$Q = \oint \overline{\mathbf{S}}\,d\mathbf{f} = \frac{c}{4\pi}\int [\overline{\mathbf{E}\mathbf{H}}]\,d\mathbf{f} \tag{59,9}$$

esteso alla superficie del conduttore [2]).

Abbiamo visto precedentemente che nel caso limite $\delta \gg l$ l'ampiezza del campo magnetico all'interno del conduttore è indipendente dalla frequenza, mentre l'ampiezza del campo elettrico è proporzionale a ω. Perciò la dissipazione dell'energia Q a piccole frequenze è proporzionale a ω^2.

---

[1]) Nei mezzi elettricamente anisotropi l'impedenza superficiale è un tensore bidimensionale

$$\mathbf{E}_{t\alpha} = \zeta_{\alpha\beta}\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}]_\beta \tag{59,7a}$$

(α, β sono indici tensoriali nel piano perpendicolare a $\mathbf{n}$). È da notare che su questo tensore possono incidere flussi di calore dovuti all'effetto termoelettrico (cfr. problema 5).

[2]) Se due qualsiasi grandezze $a(t)$ e $b(t)$ si scrivono nella forma complessa (proporzionale a $e^{-i\omega t}$), per la costruzione del loro prodotto si deve dapprima separare, ovviamente, la parte reale. Se ci interessiamo alla sola media (rispetto al tempo) di questo prodotto, la si può calcolare come

$$1/2\ \mathrm{Re}\,\{ab^*\}.$$

Infatti, i termini contenenti i fattori $e^{\pm 2i\omega t}$ per il calcolo della media si annullano e perciò

$$1/4\,\overline{(a+a^*)\,(b+b^*)} = 1/4\,(ab^*+a^*b).$$

In particolare, $\overline{\mathbf{S}}$ si può calcolare come la parte reale del « vettore complesso di Poynting » nel seguente modo:

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathrm{Re}\left\{\frac{c}{4\pi}\,\frac{1}{2}\,[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\right\}. \tag{59,9a}$$

Nel caso $\delta \ll l$, invece, i campi magnetico e elettrico sulla superficie del conduttore sono dati dalle formule (59,3) e (59,5) con $z = 0$. Il vettore di Poynting è normale alla superficie e la sua media vale

$$S = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \, |\mathbf{H}_0|^2,$$

ove la variazione di $\mathbf{H}_0$ lungo la superficie è determinata nel modo suindicato, cioè risolvendo il problema del campo al di fuori del superconduttore della stessa forma. La dissipazione dell'energia è

$$Q = \frac{c}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}} \oint |\mathbf{H}_0|^2 \, df. \tag{59,10}$$

È da notare che per grandi frequenze essa risulta proporzionale a $\sqrt{\omega}$.

La dissipazione dell'energia si può esprimere anche in funzione del momento magnetico totale $\mathcal{M}$ che il conduttore acquisisce nel campo magnetico. In un campo periodico il momento magnetico è anch'esso funzione periodica del tempo con la stessa frequenza. Secondo la formula (32,4) la variazione dell'energia libera del corpo con il tempo è data dalla derivata

$$-\mathcal{M} \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

ove $\mathfrak{H}$ è il campo uniforme esterno nel quale è collocato il conduttore.

Questa espressione non dà ancora direttamente la dissipazione cercata poiché l'energia del corpo cambia non soltanto per dissipazione, ma anche per sua migrazione periodica tra corpo e campo circostante. Se si calcola la media rispetto al tempo, quest'ultima parte scompare e, quindi, la dissipazione media dell'energia in unità di tempo è

$$Q = -\overline{\mathcal{M} \frac{d\mathfrak{H}}{dt}}. \tag{59,11}$$

Se $\mathcal{M}$ e $\mathfrak{H}$ sono espressi in forma complessa, allora $\dot{\mathfrak{H}} = -i\omega\mathfrak{H}$ e Q si può calcolare come

$$Q = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{i\omega \mathcal{M} \mathfrak{H}^*\} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \{\mathcal{M} \mathfrak{H}^*\}. \tag{59,12}$$

Le componenti del momento magnetico $\mathcal{M}$ sono funzioni lineari del campo esterno

$$\mathcal{M}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_k \tag{59,13}$$

ove i coefficienti $\alpha_{ik}(\omega)$ dipendono dalla forma del corpo e dalla sua orientazione nel campo esterno (ma non dal suo volume V); in questa formula $\mathcal{M}$ e $\mathfrak{H}$ sono supposti scritti in forma complessa, cosicché le grandezze α_{ik}, in generale, sono complesse. Il tensore $V\alpha_{ik}$ si può

chiamare tensore di polarizzabilità magnetica dell'intero corpo. Esso si riferisce a categoria di grandezze note come suscettività generalizzate e ne gode tutte le proprietà. In particolare, questo tensore è simmetrico (cfr. V § 125):

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{59,14}$$

Sfruttando questa proprietà si può scrivere

$$\mathcal{M}\mathfrak{H}^* = V\alpha_{ik}\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k = \frac{V}{2}\alpha_{ik}(\mathfrak{H}_i^*\mathfrak{H}_k + \mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*) = V\alpha_{ik}\,\mathrm{Re}\,\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}.$$

Se, inoltre, scriviamo le grandezze complesse α_{ik} nella forma

$$\alpha_{ik} = \alpha'_{ik} + i\alpha''_{ik},$$

allora per la dissipazione dell'energia (59,12) otteniamo

$$Q = \frac{V}{2}\omega\alpha''_{ik}\,\mathrm{Re}\,\{\mathfrak{H}_i\mathfrak{H}_k^*\}. \tag{59,15}$$

In tal modo, la dissipazione dell'energia è determinata dalla parte immaginaria della polarizzabilità magnetica del corpo. Abbiamo visto precedentemente che per frequenze piccole Q è proporzionale a ω^2, e per frequenze grandi a $\sqrt{\omega}$. Perciò possiamo concludere che le grandezze α''_{ik} in questi due casi limite sono proporzionali a ω e $\omega^{-1/2}$, rispettivamente. Decrescendo sia per $\omega \to 0$ che per $\omega \to \infty$ esse passano per un massimo nella regione intermedia.

Il momento magnetico del conduttore nel campo magnetico variabile si crea soprattutto da correnti di conducibilità che compaiono nel corpo; esso è non nullo anche per $\mu = 1$ allorché il momento statico si annulla. Quest'ultimo si deve ricavare da $\mathcal{M}(\omega)$ nel limite per $\omega \to 0$. Ne segue che la parte reale della polarizzabilità magnetica α'_{ik} tende per $\omega \to 0$ a un valore costante (a zero per $\mu = 1$) corrispondente alla magnetizzazione nel campo costante. Nel limite $\omega \to \infty$, invece, quando il campo magnetico non penetra all'interno del corpo le grandezze α'_{ik} tendono a un altro limite costante corrispondente alla magnetizzazione statica del superconduttore della stessa forma.

Problemi

1. Determinare la polarizzabilità magnetica di una sfera conduttrice isotropa di raggio a nel campo periodico omogeneo esterno.

Soluzione. Il campo $\mathbf{H}^{(i)}$ all'interno del corpo verifica le equazioni

$$\Delta\mathbf{H}^{(i)} + k^2\mathbf{H}^{(i)} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}^{(i)} = 0, \quad k = (1+i)/\delta.$$

Cerchiamo questo campo nella forma $\mathbf{H}^{(i)} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ ove $\mathbf{A}$ verifica l'equazione $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$; poiché $\mathbf{H}$ è un vettore assiale, $\mathbf{A}$ è polare. Per simmetria della sfera l'unico vettore costante dal quale può dipendere la soluzione cercata è

l'intensità del campo esterno $\mathfrak{H}$. Indichiamo con f la soluzione sfericamente simmetrica dell'equazione scalare $\Delta f + k^2 f = 0$:

$$f = \frac{\operatorname{sen} kr}{r}.$$

Allora il vettore polare $\mathbf{A}$ soddisfacente all'equazione vettoriale $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$ e dipendente linearmente dal vettore assiale $\mathfrak{H}$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{A} = \beta \operatorname{rot}(f\mathfrak{H})$$

(β è una costante). Quindi, cerchiamo $\mathbf{H}^{(i)}$ nella forma

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{H}) = \beta\left(\frac{f'}{r} + k^2 f\right)\mathfrak{H} - \beta\left(\frac{3f'}{r} + k^2 f\right)\mathbf{n}(\mathfrak{H}\mathbf{n})$$

ove $\mathbf{n}$ è un vettore unitario nella direzione $\mathbf{r}$ (la derivata seconda f'' è esclusa mediante l'equazione $\Delta f + k^2 f = 0$).

Il campo $\mathbf{H}^{(e)}$ all'esterno della sfera verifica le equazioni $\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(e)} = 0$ e $\operatorname{div}\mathbf{H}^{(e)} = 0$. Lo cerchiamo nella forma $\mathbf{H}^{(e)} = -\operatorname{grad}\varphi + \mathfrak{H}$ ove φ verifica l'equazione $\Delta\varphi = 0$ e si annulla all'infinito. Questa funzione φ dipendente linearmente dal vettore costante $\mathfrak{H}$ ha la forma

$$\varphi = -\alpha V \mathfrak{H}\nabla\frac{1}{r}$$

($V = 4\pi a^3/3$). In tal modo, cerchiamo $\mathbf{H}^{(e)}$ nella forma

$$\mathbf{H}^{(e)} = V\alpha\nabla\left(\mathfrak{H}\nabla\frac{1}{r}\right) + \mathfrak{H} = \frac{V\alpha}{r^3}\left[3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}\right] + \mathfrak{H}.$$

Evidentemente, $\alpha V\mathfrak{H}$ è il momento magnetico della sfera in modo che $V\alpha$ è la sua polarizzabilità magnetica (in virtù della simmetria della sfera il tensore α_{ik} si riduce ad uno scalare: $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$).

Sulla superficie della sfera ($r = a$) sono continue tutte le componenti di $\mathbf{H}$. Uguagliando separatamente le componenti parallele e perpendicolari a $\mathbf{n}$, otteniamo due equazioni che definiscono α e β. Per la polarizzabilità cercata (riferita a unità di volume) otteniamo:

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3}{a^2k^2} + \frac{3}{ak}\operatorname{cotg} ak\right],$$

$$\alpha' = -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3\delta}{2a}\,\frac{\operatorname{sh}(2a/\delta) - \operatorname{sen}(2a/\delta)}{\operatorname{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)}\right],$$

$$\alpha'' = -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2}\left[1 - \frac{a}{\delta}\,\frac{\operatorname{sh}(2a/\delta) + \operatorname{sen}(2a/\delta)}{\operatorname{ch}(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)}\right].$$

Nel caso limite di frequenze piccole ($\delta \gg a$)

$$\alpha' = -\frac{1}{105\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{4\pi a^4\sigma^2\omega^2}{105c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{20\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{10c^2}.$$

Per frequenze grandi ($\delta \ll a$) invece si ha

$$\alpha' = -\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3\delta}{2a}\right] = -\frac{3}{8\pi}\left[1-\frac{3c}{2a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right],$$

$$\alpha'' = \frac{9\delta}{16\pi a} = \frac{9c}{16\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

Il valore limite $V\alpha' = -a^3/2$ corrisponde al momento magnetico della sfera superconduttrice, e il valore α'' si potrebbe trovare mediante la formula (59,10) ricorrendo alla formula (54,3) per il campo in prossimità della superficie della sfera superconduttrice.

Ricordiamo che il campo esterno è supposto scritto nella forma complessa $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{-i\omega t}$ con un vettore complesso costante $\mathfrak{H}_0$ qualsiasi. Con ciò nella discussione sono inclusi sia il campo variabile « linearmente polarizzato » con direzione costante che campi polarizzati ellitticamente o circolarmente ruotanti in un piano.

2. Risolvere il problema 1 per un cilindro conduttore (di raggio a) nel campo magnetico periodico omogeneo perpendicolare al suo asse.

Soluzione. Il problema è un « analogo bidimensionale » del problema 1; in seguito tutte le operazioni vettoriali sono operazioni bidimensionali nel piano perpendicolare all'asse del cilindro e $\mathbf{r}$ è il raggio vettore in questo piano. Il campo all'interno del cilindro cerchiamo nella forma

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta \operatorname{rot}\operatorname{rot}(f\mathfrak{H}) = \beta\left(\frac{f'}{r}+k^2 f\right)\mathfrak{H} - \beta\left(\frac{2f'}{r}+k^2 f\right)\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}),$$

ove $f = J_0(kr)$ è una soluzione simmetrica dell'equazione bidimensionale $\Delta f + k^2 f = 0$, finito per $r = 0$. Il campo all'esterno del cilindro cerchiamo nella forma

$$\mathbf{H}^{(e)} = -2\alpha V\nabla(\mathfrak{H}\nabla \ln r) + \mathfrak{H} = \frac{2\alpha V}{r^2}[2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}] + \mathfrak{H}$$

($V = \pi a^2$). Il momento magnetico per unità di lunghezza del cilindro è $V\alpha\mathfrak{H}$ (cfr. problema 2 del § 3). Dalla condizione $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ per $r = a$, così come nel problema 1, otteniamo

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi}\left[1-\frac{2}{ak}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

(qui abbiamo utilizzato la relazione $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$).

Per $\delta \gg a$, sviluppando le funzioni di Bessel in potenze di ka, abbiamo

$$\alpha' = -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4\sigma^2\omega^2}{6c^4},$$

$$\alpha'' = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{4c^2}.$$

Per $\delta \ll a$ ricorriamo alle espressioni asintotiche delle funzioni di Bessel e troviamo

$$\alpha' = -\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{c}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{\delta}{2\pi a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}.$$

3. Risolvere il problema 1 per un cilindro nel campo magnetico parallelo al suo asse.

Soluzione. Il campo magnetico è parallelo all'asse del cilindro in tutto lo spazio. All'esterno del cilindro $\mathbf{H}^{(e)} = \mathfrak{H}$ e al suo interno $\mathbf{H}^{(i)} = f\mathfrak{H}$, ove f è una soluzione dell'equazione bidimensionale $\Delta f + k^2 f = 0$ che vale 1 per $r = a$:

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathfrak{H}\,\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

Le correnti di Foucault nel cilindro sono circolari (vale a dire che $\mathbf{j}$ ha in coordinate cilindriche la sola componente $j_\varphi = j$) e vanno determinate rispetto al campo $H_z = H$ secondo la relazione

$$\frac{4\pi j}{c} = -\frac{\partial H}{\partial r}.$$

Il momento magnetico dell'unità di lunghezza del cilindro $\mathcal{M} = \pi a^2 \alpha \mathfrak{H}$ generato dalle correnti di conducibilità è diretto lungo il suo asse e vale

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c}\int jr\,dV = -\frac{1}{4}\int \frac{\partial H}{\partial r}\,r^2\,dr.$$

Calcolando l'integrale otteniamo

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{ka}\,\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right].$$

In tal modo, la polarizzabilità longitudinale del cilindro è di due volte inferiore a quella trasversale trovata nel problema 2.

4. Trovare il più piccolo coefficiente di smorzamento del campo magnetico nella sfera conduttrice.

Soluzione. Tra le soluzioni delle equazioni (58,10) per la sfera esistono funzioni a simmetria diversa. La più simmetrica sarebbe una soluzione che si ottiene per assegnazione di uno scalare costante qualsiasi. Essa tuttavia non può esistere per la ragione seguente. Tale soluzione sarebbe sfericamente simmetrica $H = H_r(r)$ in virtù dell'equazione

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}(rH) = 0$$

(vera sia all'esterno che all'interno della sfera) e varrebbe $H =$ costante$/r$. Ma questa funzione non soddisfa la condizione di finitezza al centro della sfera.

Al valore più piccolo di γ corrisponde una delle soluzioni che si ottengono per assegnazione di un vettore costante qualsiasi. La forma di queste soluzioni coincide, evidentemente, con quella trovata nel problema 1 con la sola differenza che nel campo $\mathbf{H}^{(e)}$ bisogna omettere il termine costante poiché all'infinito deve essere $\mathbf{H} = 0$. In questo caso k diviene ora reale ($k^2 = 4\pi\sigma\gamma/c^2$) e il vettore $\mathbf{H}$ funge da vettore costante qualsiasi. Dalla condizione di frontiera $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ per $r = a$ ricaviamo due equazioni escludendo dalle quali α e β troviamo che sen $ka = 0$. La più piccola radice non nulla di questa equazione è $ka = \pi$ in modo che il più piccolo valore di γ è

$$\gamma_1 = \frac{\pi c^2}{4\sigma a^2}.$$

5. La superficie piana di un cristallo metallico uniassico è tagliata in modo tale che la normale ad essa formi l'angolo θ con l'asse di simmetria principale del cristallo. Determinare l'impedenza superficiale tenendo conto dell'effetto termoelettrico (*M. I. Kaganov, I. M. Zukernik*, 1958).

Soluzione. Consideriamo la superficie del cristallo come il piano xy, l'asse z come la normale interna alla superficie e supponiamo che l'asse di simmetria principale del cristallo giaccia nel piano xz sotto l'angolo θ verso l'asse z. Il campo magnetico in prossimità della superficie del cristallo è supposto diretto lungo l'asse y: $H_y = H_0 e^{-i\omega t}$; allora esso ovunque all'interno del metallo è diretto allo stesso modo. Tenendo conto che tutte le grandezze dipendono dalla sola coordinata z (e dal tempo come $e^{-i\omega t}$), troviamo che le equazioni di Maxwell (58,1) e (58,4) assumono la forma

$$-H'_y = \frac{4\pi}{c} j_x, \quad j_y = j_z = 0, \quad E'_x = \frac{i\omega}{c} H_y \tag{1}$$

e anche $E'_y = 0$ da cui $E_y = 0$ (l'apice significa la derivazione rispetto a z). Per tener conto dell'effetto termoelettrico si deve aggiungere qui l'equazione della conduzione termica $C\partial T/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0$ oppure

$$-i\omega C\tau + q'_z = 0, \tag{2}$$

ove τ è una correzione variabile alla temperatura media ($T = \overline{T} + \tau$), C la capacità termica dell'unità di volume del metallo, $\mathbf{q}$ la densità del flusso di calore; $\mathbf{j}$ e $\mathbf{q}$ sono legati al campo $\mathbf{E}$ e al gradiente della temperatura mediante le relazioni (26,12).

I tensori $\rho_{ik} = \sigma^{-1}_{ik}$ e $\varkappa_{ik}$ sono simmetrici; supponiamo la simmetria del cristallo tale che anche il tensore α_{ik} sia simmetrico. Per gli assi x, y, z considerati in modo appropriato abbiamo

$$\rho_{xx} = \rho_{\parallel} \operatorname{sen}^2\theta + \rho_{\perp} \cos^2\theta, \quad \rho_{yy} = \rho_{\perp}, \quad \rho_{zz} = \rho_{\parallel} \cos^2\theta + \rho_{\perp} \operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\rho_{xy} = \rho_{yz} = 0, \quad \rho_{xz} = (\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}) \operatorname{sen}\theta \cos\theta,$$

ove $\rho_{\parallel}$, $\rho_{\perp}$ sono valori principali del tensore ρ_{ik} lungo l'asse del cristallo e nel piano perpendicolare a quest'ultimo; le formule analoghe si verificano per i tensori $\varkappa_{ik}$ e α_{ik}. Con questi tensori dalle (26,12) abbiamo

$$E_x = \rho_{xx} j_x + \alpha_{xz}\tau', \quad q_z = T\alpha_{zx} j_x - \varkappa_{zz}\tau', \tag{3}$$

$$E_z = \rho_{zx} j_x + \alpha_{zz}\tau'. \tag{4}$$

Escludendo H_y dalle equazioni (1)-(3) abbiamo

$$E''_x + k^2 (E_x + E_T) = 0,$$

$$(1+a) E''_T + k^2 [(b-a) E_T - aE_x] = 0,$$

ove abbiamo introdotto la notazione $E_T = -\alpha_{xz}\tau'$ e i parametri

$$k^2 = \frac{4\pi i\omega}{c^2 \rho_{xx}}, \quad a = \frac{T\alpha^2_{xz}}{\rho_{xx}\varkappa_{zz}}, \quad b = \frac{c^2 C \rho_{xx}}{4\pi\varkappa_{zz}}.$$

La soluzione di questo sistema di due equazioni per il semispazio ($z > 0$) occupato dal metallo è

$$E_x = Ae^{ik_1 z} + Be^{ik_2 z},$$

$$E_T = -\left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) Ae^{ik_1 z} - \left(1 - \frac{k_2^2}{k^2}\right) Be^{ik_2 z},$$

ove

$$k_{1,2} = k \left[\frac{1 + b \pm \sqrt{(1-b)^2 - 4ab}}{2(1+a)}\right]^{1/2}$$

fra l'altro, le parti immaginarie di k_1 e k_2 devono essere positive.

Il legame tra i coefficienti A e B si stabilisce mediante le condizioni di frontiera per la temperatura e la formula (4) definisce il campo E_z nel metallo (ricordiamo che non occorre che la componente del campo **E** sulla superficie del conduttore sia continua). Secondo la definizione (59,7a) l'impedenza superficiale è

$$\zeta_{xx}=\frac{E_x}{H_y}\bigg|_{z=0}=\frac{\omega}{c}\,\frac{A+B}{k_1A+k_2B}\,,\quad \zeta_{yx}=0.$$

Diamo infine le espressioni per impedenza sotto l'ipotesi che $a \ll 1$ (come ciò infatti ha luogo per metalli ordinari) in due casi: per la condizione di frontiera $\tau = 0$ (frontiera isotermica)

$$\zeta_{xx}^{(\mathrm{isot})}=\zeta_0\left[1+\frac{a}{2(1+\sqrt{b})^2}\right];$$

e per la condizione di frontiera $q_z = 0$ (frontiera adiabatica):

$$\zeta_{xx}^{(\mathrm{ad})}=\zeta_0\left[1+\frac{a(1+2\sqrt{b})}{2(1+\sqrt{b})^2}\right],$$

ove $\zeta_0 = (\omega\rho_{yy}/8\pi)^{1/2}(1-i)$ è l'impedenza a prescindere dell'effetto termoelettrico. Il parametro a e con esso la correzione all'impedenza si annullano per $\theta = \pi/2$ e $\theta = 0$, cioè quando l'asse principale del cristallo giace nel piano della sua superficie o perpendicolare a quest'ultima.

Se il campo **H** è diretto lungo l'asse x, allora $E_x = 0$, $j_x = j_z = 0$ e non compare gradiente della temperatura. Perciò $\zeta_{yy} = \zeta_0$.

§ 60. *Effetto skin*

Consideriamo la distribuzione della densità di corrente nella sezione del conduttore attraverso la quale passa una corrente variabile non nulla. Sulla base dei risultati ottenuti nel paragrafo precedente possiamo attendere a priori che all'aumentare della frequenza la corrente si concentri soprattutto in prossimità della superficie del conduttore. Questo fenomeno si chiama *effetto skin* [1]).

Una soluzione precisa del problema dell'effetto skin dipende, in generale, non dalla sola forma del conduttore ma anche dal modo di eccitazione di corrente in esso, cioè dal carattere del campo magnetico variabile che induce la corrente. Esiste, tuttavia, un caso importante in cui la distribuzione della corrente possa essere supposta indipendente dal modo di sua eccitazione. È la corrente in un filo il cui spessore è piccolo rispetto alla sua lunghezza.

Nel calcolare la distribuzione della corrente nella sezione del filo sottile quest'ultimo si può supporre rettilineo. In questo caso il campo è parallelo all'asse del filo e il vettore magnetico **H** giace nel piano perpendicolare all'asse.

---

[1]) Nel senso più generale dell'effetto skin si parla in tutte le situazioni in cui il campo elettromagnetico variabile (e con esso le correnti da esso indotte) penetri a profondità relativamente piccola nel conduttore.

Consideriamo il filo di sezione circolare. Questo caso è particolarmente semplice per il fatto che la forma del campo all'esterno del filo è chiara a priori. Infatti, in virtú della simmetria sulla superficie del filo, $\mathbf{E}$ = costante (ad ogni istante del tempo considerato). Ma per questa condizione di frontiera le equazioni div $\mathbf{E} = 0$ e rot $\mathbf{E} = 0$ nello spazio al di fuori del filo hanno la sola soluzione $\mathbf{E}$ = costante in tutto lo spazio. Per ragioni analoghe anche il campo magnetico attorno al filo sarà lo stesso che sarebbe attorno al filo con la corrente costante, uguale a un valore istantaneo della corrente variabile.

All'interno del filo il campo elettrico verifica l'equazione

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

coincidente con l'equazione (58,6) per $\mathbf{H}$ (essa si ottiene escludendo $\mathbf{H}$ dalle equazioni (58,1) e (58,4), così come l'equazione (58,6) è stata ottenuta eliminando $\mathbf{E}$). Nel sistema di coordinate cilindriche con l'asse z coincidente con l'asse del filo il campo $\mathbf{E}$ ha la sola componente z e dipende dalla sola coordinata r; per un campo periodico di frequenza ω otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) + k^2 E = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta}, \tag{60,1}$$

ove δ è introdotta nel paragrafo precedente la profondità di penetrazione (59,4). La soluzione di questa equazione che resta finita per $r = 0$ è

$$E = E_z = \text{costante} \cdot J_0(kr)\, e^{-i\omega t} \tag{60,2}$$

(J_0 è una funzione di Bessel). Secondo la stessa legge è distribuita la densità di corrente $j = \sigma E$.

Quanto al campo magnetico $H_\varphi = H$, lo troviamo rispetto a quello elettrico secondo l'equazione (58,1):

$$\frac{i\omega}{c} H_\varphi = (\text{rot}\, \mathbf{E})_\varphi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}. \tag{60,3}$$

Tenendo conto che $J_0'(u) = -J_1(u)$, otteniamo

$$H = H_\varphi = -i \cdot \text{costante} \cdot \sqrt{\frac{4\pi\sigma i}{\omega}}\, J_1(kr)\, e^{-i\omega t} \tag{60,4}$$

con la stessa costante che figura nella (60,2). È facile determinare questa costante dalla condizione che sulla superficie del filo debba essere $H = 2I/ca$, ove a è il suo raggio e I la corrente totale passante per il filo.

Nel caso limite di frequenze piccole ($a/\delta \ll 1$) per tutta l'estensione del filo si può limitarsi ai primi termini dello sviluppo della funzione di Bessel:

$$\begin{aligned} E_z &= \text{costante}\cdot\left[1 - \frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right] e^{-i\omega t}, \\ H_\varphi &= \text{costante}\cdot\frac{2\pi\sigma}{c}\, r\left[1 - \frac{i}{4}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{60,5}$$

L'ampiezza di E e con essa l'ampiezza della densità di corrente cresce all'allontanarsi dall'asse proporzionalmente a $[1 + (r/2\delta)^4]$.

Nel caso limite inverso di frequenze grandi ($a/\delta \gg 1$) nella parte maggiore della sezione del filo si può usare la nota formula asintotica

$$J_0(u\sqrt{2i}) \sim \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{(1-i)u} \tag{60,6}$$

applicabile nel caso di grandi valori dell'argomento della funzione di Bessel. Conservando il solo fattore esponenziale variabile piú rapidamente, abbiamo

$$\begin{aligned} E_z &= \text{costante}\cdot\exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right], \\ H_\varphi &= \text{costante}\cdot(1+i)\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}\exp\left[-\frac{a-r}{\delta} + \right. \\ &\qquad \left. + i\left(\frac{a-r}{\delta} - \omega t\right)\right]. \end{aligned} \tag{60,7}$$

Queste formule coincidono, naturalmente con le formule (59,3-5) che per forte effetto skin sono applicabili in prossimità della superficie del conduttore di qualsiasi forma.

Nel caso generale di un filo a sezione non circolare un calcolo preciso dell'effetto skin rappresenta problema molto piú complicato in quanto occorre che sia determinato contemporaneamente il campo sia all'interno che all'esterno del filo. Nel solo caso limite di forte effetto skin il problema si semplifica di nuovo poiché il campo al di fuori del filo può essere determinato a priori come campo statico attorno al superconduttore della stessa forma.

§ 61. Resistenza complessa

Finché la frequenza della corrente variabile è sufficientemente piccola il valore istantaneo d'intensità di corrente $J(t)$ in un contorno lineare è determinata dal valore della forza elettromotrice $\mathscr{E}(t)$ allo stesso istante di tempo secondo la relazione

$$\mathscr{E}(t) = RJ(t), \tag{61,1}$$

ove R è la resistenza del filo alla corrente costante.

Ma per frequenze qualsiasi non esiste nessuna ragione per attendere l'esistenza di un legame diretto tra i valori $\mathscr{E}$ e J allo stesso istante di tempo. Si può affermare soltanto che il valore $J(t)$ deve dipendere linearmente dai valori $\mathscr{E}(t)$ in tutti gli istanti precedenti di tempo. Scriviamo simbolicamente questo legame nella forma $J = \hat{Z}^{-1}\mathscr{E}$ oppure, per il legame inverso

$$\mathscr{E} = \hat{Z}J, \tag{61,2}$$

ove $\hat{Z}$ è un operatore lineare [1]). Se le funzioni $J(t)$ e $\mathscr{E}(t)$ sono sviluppate in integrali di Fourier, per ciascuna delle loro componenti monocromatiche (dipendenti dal tempo mediante il fattore $e^{-i\omega t}$) il risultato dell'azione dell'operatore $\hat{Z}$ si riduce, in virtú della linearità di quest'ultimo, alla moltiplicazione per una grandezza Z dipendente dal valore della frequenza:

$$\mathscr{E} = Z(\omega)J. \tag{61.3}$$

La funzione $Z(w)$ è in generale complessa e porta il nome di *resistenza complessa* o di *impedenza* del conduttore.

Dal confronto tra le (61,3) e (61,1) risulta con chiarezza che la resistenza ordinaria R rappresenta il termine nullo nello sviluppo della funzione $Z(\omega)$ in potenze di ω. Per tener conto del termine successivo bisogna accanto a R considerare anche l'autoinduzione L del conduttore [2]).

Consideriamo un contorno lineare al quale è applicata la forza elettromotrice $\mathscr{E}(t)$. Per definizione di quest'ultima, il lavoro compiuto in un secondo dal campo elettrico sulle cariche in moto nel conduttore è dato dal prodotto $\mathscr{E}J$. Questo lavoro si trasforma in parte nel calore di Joule, e in parte è speso per variazione dell'energia del campo magnetico della corrente. Per definizione di R e L, il calore di Joule emanato nel filo in un secondo è RJ^2, mentre l'energia magnetica della corrente vale $LJ^2/2c^2$. Perciò la legge di conservazione dell'energia è espressa dall'equazione

$$\mathscr{E}J = RJ^2 + \frac{d}{dt}\frac{LJ^2}{2c^2} = RJ^2 + \frac{1}{c^2}LJ\frac{dJ}{dt}$$

ossia

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}. \tag{61,4}$$

---

[1]) Non ci soffermiamo qui sulla discussione delle proprietà generali di questo operatore in quanto sono completamente analoghe alle proprietà dell'operatore $\hat{\varepsilon}$ che saranno discusse in dettaglio nei §§ 77, 82.

[2]) Qui e più avanti intendiamo con R e L grandezze riferite alla corrente costante.

Usando le espressioni quadratiche ($\mathscr{E}J$, J^2) bisogna scrivere le grandezze $\mathscr{E}$ e J nella forma di funzioni reali. Appena sarà ottenuta l'equazione lineare (61,4) si può passare alle componenti monocromatiche nella rappresentazione complessa: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. L'equazione (61,4) si riduce allora alla relazione algebrica

$$\mathscr{E} = ZJ, \quad Z = R - \frac{i}{c^2}\omega L. \tag{61,5}$$

Separando la parte reale nella relazione $J = \mathscr{E}/Z$ otteniamo

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2/c^4}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}, \tag{61,6}$$

ciò che determina l'ampiezza della corrente e lo sfasamento tra corrente e forza elettromotrice.

La parte reale dell'espressione (61,5) coincide con la resistenza R che determina la dissipazione dell'energia nel contorno. Si vede facilmente che nel caso generale della dipendenza $Z(\omega)$ esiste un legame analogo tra Re Z e la dissipazione dell'energia (per data intensità di corrente).

Calcolando la media rispetto al tempo della potenza $\mathscr{E}J$ consumata nel contorno quando in esso passa una corrente periodica, ne troviamo quella parte che si spende sistematicamente per compensare le perdite dissipative. In tal modo, la dissipazione dell'energia Q nel contorno in un secondo vale

$$Q = {}^1/_2\, Re\, \{\mathscr{E}J^*\},$$

ove $\mathscr{E}$ e J sono espresse in forma complessa (cfr. la nota alla pag. 299). Sostituendovi $\mathscr{E} = ZJ$ e indicando le parti reale e immaginaria di Z con Z' e Z'', rispettivamente [1]):

$$Z = Z' + iZ'' \tag{61,7}$$

abbiamo

$$Q = {}^1/_2\, Z' \,|\, J \,|^2$$

oppure, ricorrendo alla funzione reale $J(t)$,

$$Q = Z'(\omega)\,\overline{J^2} \tag{61,8}$$

ciò che stabilisce il legame cercato.

È da notare che essendo Q grandezza essenzialmente positiva, Z' sempre è positiva:

$$Z' > 0. \tag{61,9}$$

---

[1]) Talvolta chiamate resistenza *ohmica* e *reattanza*.

Calcoliamo $Z(\omega)$ per un filo di sezione circolare a frequenze qualsiasi (ma, ovviamente, soddisfacenti alle condizioni di quasi-stazionarietà), senza trascurare, cioè, l'effetto skin. A tale scopo ricorriamo di nuovo alla legge di conservazione dell'energia rappresentandola in un'altra forma.

Dividiamo la potenza $\mathscr{E}J$ ($\mathscr{E}$ e J sono due espressioni reali) in due termini di cui uno rappresenta ora la variazione dell'energia del campo magnetico all'esterno del filo e l'altro l'energia totale consumata all'interno del filo (sia per la variazione del campo in esso sia per emanazione di calore). La seconda parte si può calcolare come flusso totale di energia che entra in un secondo all'interno del filo attraverso la sua superficie. In tal modo, abbiamo

$$J\mathscr{E} = \frac{d}{dt}\frac{L_e J^2}{2c^2} + \frac{cEH}{4\pi}\, 2\pi a l = \frac{L_e}{c^2} J \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} cEHal$$

ove L_e è la parte esterna dell'autoinduzione del filo, E e H le intensità dei campi elettrico e magnetico sulla sua superficie, a il suo raggio e l la lunghezza. Il campo H è legato alla corrente J mediante la relazione $H = 2J/ca$. Perciò, dividendo l'uguaglianza ottenuta per J, abbiamo

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c^2} L_e \frac{dJ}{dt} + El.$$

Questa equazione è lineare e perciò si può passare alla rappresentazione complessa delle grandezze. Allora

$$\mathscr{E} = ZJ = -\frac{i\omega}{c^2} L_e J + El,$$

da cui

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{lE}{J} = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + \frac{2El}{caH}. \qquad (61,10)$$

A frequenze qualsiasi qui bisogna sostituire E e H dalle formule (60,2) e (60,4):

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2} L_e + R\,\frac{ak}{2}\,\frac{J_0(ak)}{J_1(ak)} \qquad (61,11)$$

($R = l/\pi a^2\sigma$). Per effetto skin debole usiamo lo sviluppo (60,5); eseguendo i calcoli a meno dei termini dell'ordine di $(a/\delta)^4$ e separando la parte reale, otteniamo

$$Z' = R\left[1 + \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right] = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]. \qquad (61,11a)$$

Nel caso inverso di effetto skin forte mediante le espressioni (60,7) otteniamo

$$Z' = R\frac{a}{2\delta} = \frac{l}{ac}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}},$$
$$Z'' = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + L_i\frac{2\delta}{a}\right] = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{2\pi\sigma\omega}}\right]. \qquad (61,12)$$

Si vede dalla (61,11a) che si può porre $Z' = R$ per $(\pi\sigma\omega\, a^2/c^2)^2 \ll$ $\ll 12$. Al tempo stesso

$$\frac{Z''}{Z'} = \frac{\omega L}{c^2 R} = \left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2 2\ln\frac{l}{a}$$

(L dalla formula (34,1)). Confrontando con la disuguaglianza precedente vediamo che la regione di frequenze in cui si deve ricorrere all'espressione (61,5) senza trascurare in essa autoinduzione, dipende dal rapporto l/a ed è relativamente stretta.

Nella pratica, tuttavia, è più importante il caso in cui a generare l'autoinduzione nel circuito siano le bobine ad esso inserite che godono di autoinduzione elevata rispetto al filo esteso (cfr. § 34). In tali contorni la regione di applicabilità della formula (61,5) (cioè l'equazione (61,4) con R e L costanti) è sufficientemente larga.

Consideriamo un contorno collocato nel campo magnetico variabile esterno $\mathbf{H}_e$ che può avere origine qualsiasi. Con $\mathbf{E}_e$ indichiamo il campo elettrico che sarebbe indotto dal campo variabile $\mathbf{H}_e$ se non esistessero conduttori. Sia $\mathbf{H}_e$ che $\mathbf{E}_e$ variano molto debolmente lungo lo spessore del filo sottile (contrariamente al campo proprio creato dalle correnti passanti attraverso il filo). Perciò si può considerare la circuitazione di $\mathbf{E}_e$ lungo il contorno della corrente senza precisare dove questo contorno passi all'interno del filo. Questa circuitazione non è altro che la forza elettromotrice $\mathscr{E}$ indotta nel contorno dal campo magnetico variabile esterno. In accordo con la forma integrale dell'equazione di Maxwell abbiamo

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_e\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}_e\, d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt} \qquad (61,13)$$

ove Φ_e è il flusso del campo esterno attraverso il contorno in questione. Sostituendo questa espressione nell'equazione (61,4) abbiamo

$$RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}.$$

Se il termine con autoinduzione trasportiamo a secondo membro dell'uguaglianza, questa equazione si riscrive nella forma

$$RJ = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt} - \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (61,14)$$

ove $\Phi = \Phi_e + LJ/c$ è il flusso magnetico totale sia del campo magnetico esterno che del campo proprio della corrente. In questa forma l'equazione esprime la legge di Ohm per l'intero circuito, cioè esprime uguaglianza tra RJ e la forza elettromotrice totale nel circuito.

La formulazione dell'equazione (61,14) esprimente la legge di Ohm consente di generalizzarla per il caso in cui con il passare del tempo varii anche la forma del contorno conduttore stesso. In questo caso l'autoinduzione L sarà la funzione del tempo e al posto della (61,14) si deve scrivere

$$RJ = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LJ) - \frac{1}{c}\frac{d\Phi_e}{dt}. \qquad (61,15)$$

Nel dedurre dalla legge di conservazione dell'energia si dovrebbe tener conto anche del lavoro compiuto per la deformazione del conduttore.

Se esistono più contorni vicini di correnti J_a, per ciascuno di essi da Φ_e nell'equazione (61,14) funge la somma dei flussi magnetici dagli altri contorni (e del campo esterno qualora tale esista). Il flusso magnetico generato dalla corrente J_b attraverso il contorno della corrente J_a è $L_{ab}J_b/c$ con L_{ab} quale coefficiente di induzione reciproca di ambedue i contorni. Perciò otteniamo il sistema di equazioni seguente per la corrente variabile nei contorni:

$$R_a J_a + \frac{1}{c}\sum_b L_{ab}\frac{dJ_b}{dt} = \mathscr{E}_a. \qquad (61,16)$$

Nella somma rispetto a b figura anche il termine con autoinduzione ($b = a$) e $\mathscr{E}_a$ è la forza elettromotrice generata nell'a-esimo contorno da sorgenti estranee al sistema di correnti in esame.

Per correnti periodiche (monocromatiche) il sistema di equazioni differenziali (61,16) si riduce al sistema di equazioni algebriche

$$\sum_b Z_{ab}J_b = \mathscr{E}_a, \qquad (61,17)$$

ove le grandezze

$$Z_{ab} = \delta_{ab}R_a - \frac{i\omega}{c^2}L_{ab} \qquad (61,18)$$

costituiscono la *matrice di impedenza*. Alla pari della (61,5), le espressioni (61,18) rappresentano primi termini dello sviluppo della funzione $Z_{ab}(\omega)$ in potenze della frequenza.

Osserviamo che in questa approssimazione non esiste influsso reciproco dei contorni sulla parte reale dell'impedenza. Questo influsso è condizionato dal fatto che il campo magnetico della corrente variabile in un conduttore crea le correnti di Foucault (e con esse anche una dissipazione di energia complementare) nell'altro conduttore. Per i conduttori lineari questo effetto è trascurabilmente piccolo.

Tuttavia esso può divenire sensibile se in prossimità a questi conduttori si trovano quelli massicci.

Infine, soffermiamoci su un'altra questione e vediamo in che modo le equazioni dedotte in questo paragrafo per le correnti variabili nei contorni lineari siano legate alle equazioni generali del campo magnetico variabile in conduttori qualsiasi. Studiamo questo legame su un esempio elementare di corrente che si crea nel contorno per esclusione della forza elettromotrice costante $\mathscr{E}_0$ che azionava in esso fino all'istante $t = 0$. Dall'equazione (61,4) abbiamo [1])

$$\begin{aligned} J &= \frac{\mathscr{E}_0}{R} \text{ per } t < 0, \\ J &= \frac{\mathscr{E}_0}{R} \exp\left(-\frac{c^2 R}{L} t\right) \text{ per } t > 0. \end{aligned} \tag{61,19}$$

Vediamo che dopo esclusione della forza elettromotrice la corrente si smorza con il tempo secondo una legge esponenziale con il decremento di smorzamento

$$\gamma = c^2 R/L. \tag{61,20}$$

Dal punto di vista della formulazione precisa del problema questa grandezza γ è la più piccola tra le grandezze γ_m che si ottengono come risultato della soluzione precisa dell'equazione (58,10) per il conduttore in esame. Tra i valori γ_m per il conduttore lineare esiste uno (il più piccolo di tutti) che per ordine di grandezza è di $\ln(l/a)$ volte inferiore agli altri; tale è il valore (61,20).

§ 62. *Capacità nel circuito di una corrente quasi-stazionaria*

A differenza della corrente continua, la corrente alternata può passare sia per un circuito chiuso che aperto. Consideriamo un contorno lineare i cui estremi sono connessi ai rivestimenti del condensatore che si trovano a poca distanza l'uno dall'altro. Per propagazione della corrente alternata lungo il contorno i rivestimenti del condensatore si caricano e si scaricano periodicamente fungendo da « sorgenti » e « scarichi » di corrente nel circuito aperto.

Essendo piccola la distanza tra le armature del condensatore, l'energia magnetica della corrente si può porre uguale, come precedentemente, a $LJ^2/2c^2$ ove L è autoinduzione del contorno chiuso che sarebbe ottenuto da quello in esame congiugendo le armature con

[1]) A rigore, queste formule sono inapplicabili per valori t molto piccoli quando nello sviluppo spettrale della funzione hanno importanza componenti con frequenze grandi e perciò non si può ricorrere all'equazione (61,4). Ma durante questo piccolo intervallo di tempo la corrente J riesce a variare in modo trascurabile, e perciò la formula (61,19) determina con precisione sufficiente la grandezza della corrente negli istanti di tempo successivi.

un filo corto [1]). In seguito, l'unica modifica nell'equazione (61,4) sarà nell'aggiunta alla caduta della tensione sulla resistenza, RJ, della differenza di potenziale tra le armature del condensatore: e/C, ove C è la capacità del condensatore e $\pm e(t)$ sono le cariche nei suoi rivestimenti. Quindi,

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{e}{C} + \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}.$$

Ma l'intensità di corrente J è uguale alla perdita di carica in una armatura o all'incremento di carica nell'altro:

$$J = \frac{de}{dt}.$$

Esprimendo nell'equazione J in funzione di e abbiamo

$$\frac{L}{c^2}\frac{d^2e}{dt^2} + R\frac{de}{dt} + \frac{e}{C} = \mathscr{E}. \tag{62,1}$$

Questa è l'equazione cercata per la corrente alternata nel circuito con capacità.

Se $\mathscr{E}$ è una funzione periodica del tempo con frequenza ω, allora l'equazione (62,1) si riduce a una relazione algebrica tra $\mathscr{E}$ e la carica e o, che è lo stesso, tra $\mathscr{E}$ e la corrente $J = -i\omega e$. E precisamente, abbiamo $JZ = \mathscr{E}$, ove l'impedenza Z è definita come

$$Z = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{62,2}$$

Separando nella relazione $J = \mathscr{E}/Z$ la parte reale, otteniamo

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R}, \tag{62,3}$$

ciò che determina l'intensità di corrente nel circuito con la forza elettromotrice $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$ applicata dall'esterno.

Se, invece, $\mathscr{E} = 0$, la corrente nel circuito rappresenta oscillazioni libere elettriche. La frequenza (complessa) di queste oscillazioni è determinata dalla condizione $Z = 0$ da cui

$$\omega = -i\frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2}. \tag{62,4}$$

A seconda del segno dell'espressione sotto la radice avremo oscillazioni smorzantisi (a decremento $Rc^2/2L$) o scarica smorzata puramente aperiodica. Nel caso limite $R \to 0$ abbiamo oscillazioni non

[1]) In questo paragrafo trascuriamo l'effetto skin.

smorzate con frequenza espressa dalla *formula di W. Thomson* (1853)

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \tag{62,5}$$

L'equazione (62,1) si generalizza immediatamente a un sistema di più contorni legati in modo induttivo con condensatori. La corrente J_a nell'a-esimo contorno è legato alle cariche $\pm e_a$ nelle armature del condensatore corrispondente mediante la relazione

$$J_a = \frac{de_a}{dt}$$

e al posto della (62,1) abbiamo il sistema di equazioni

$$\sum_b \frac{1}{c^2} L_{ab} \frac{d^2 e_b}{dt^2} + R_a \frac{de_a}{dt} + \frac{e_a}{C_a} = \mathscr{E}_a. \tag{62,6}$$

Per correnti periodiche (monocromatiche) queste equazioni si riducono al sistema algebrico

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathscr{E}_a, \tag{62,7}$$

ove gli elementi della matrice Z_{ab} sono dati dalle formule

$$Z_{ab} = \delta_{ab} \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}. \tag{62,8}$$

Le autofrequenze del sistema di correnti sono determinate dalla condizione di compatibilità delle equazioni (62,7) per $\mathscr{E}_a = 0$, cioè dall'uguaglianza a zero del determinante

$$\det | Z_{ab} | = 0. \tag{62,9}$$

Se le resistenze R sono non nulle, tutte le « frequenze » hanno la parte immaginaria, vale a dire che le oscillazioni elettriche si smorzano.

Badiamo al fatto che le equazioni (62,6) coincidono formalmente con le equazioni meccaniche di moto di un sistema a più gradi di libertà che compie oscillazioni piccole smorzantisi. In questo caso da coordinate generalizzate fungono le cariche e_a e da velocità generalizzate le correnti $J_a = \dot{e}_a$. La lagrangiana del sistema è

$$\mathscr{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2c^2} L_{ab} \dot{e}_a \dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a \mathscr{E}_a. \tag{62,10}$$

Il ruolo delle energie cinetica e potenziale giocano nel sistema meccanico le energie magnetica ed elettrica, rispettivamente, del sistema di correnti, mentre le grandezze $\mathscr{E}_a$ corrispondono alle forze ap-

plicate dall'esterno che creano oscillazioni forzate del sistema. Le grandezze R_a entrano nella funzione dissipativa

$$\mathscr{R}=\frac{1}{2}\sum_a R_a\dot{e}_a^2. \tag{62,11}$$

Le equazioni (62,6) coincidono con quelle di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{e}_a}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial e_a}=-\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial\dot{e}_a}. \tag{62,12}$$

Problemi

1. Determinare le autofrequenze delle oscillazioni elettriche di due contorni legati in modo induttivo e contenenti le autoinduzioni L_1, L_2 e le capacità C_1, C_2; le resistenze R_1 e R_2 vanno trascurate.

Soluzione. Le frequenze cercate sono definibili a partire dalla condizione

$$\det|Z_{ab}|=Z_{11}Z_{12}-Z_{12}^2=0,$$

ove

$$Z_{11}=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right),\quad Z_{22}=-i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2-\frac{1}{\omega C^2}\right),\quad Z_{12}=-\frac{i\omega}{c^2}L_{12}.$$

Il calcolo dà

$$\omega_{1,2}^2=c^2\,\frac{L_1C_1+L_2C_2\mp[(L_1C_1-L_2C_2)^2+4C_1C_2L_{12}^2]^{1/2}}{2C_1C_2(L_1L_2-L_{12}^2)}.$$

Ambedue le frequenze sono reali come conseguenza del fatto che R_1 e R_2 sono trascurate. Per $L_{12}\to 0$ le frequenze ω_1 e ω_2 tendono a valori $c/\sqrt{L_1C_1}$ e $c/\sqrt{L_2C_2}$ corrispondenti ad oscillazioni separate in ciascuno dei due contorni.

2. Risolvere il problema 1 per il circuito di collegate parallelamente resistenza R, capacità C e autoinduzione L.

Soluzione. Le impedenze dei tre rami del circuito valgono

$$Z_1=R,\quad Z_2=\frac{i}{\omega C},\quad Z_3=-\frac{i\omega}{c^2}L$$

e le correnti in essi sono legate dalle relazioni

$$J_1+J_2+J_3=0,\quad Z_1J_1=Z_2J_2=Z_3J_3.$$

Di qui ricaviamo l'equazione

$$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\frac{1}{Z_3}=0,$$

la cui soluzione dà

$$\omega=-\frac{i}{2RC}\pm\sqrt{\frac{c^2}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}}.$$

3. Studiare la propagazione delle oscillazioni elettriche lungo un circuito composto della successione infinita di maglie uguali contenenti le impedenze

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right),$$

come è rappresentato nella fig. 37. Trovare la regione di frequenze delle oscillazioni che possono propagarsi lungo il circuito senza smorzamento [1]).

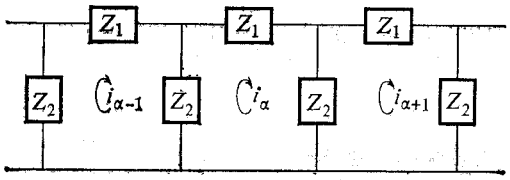


Fig. 37

Soluzione. Le correnti i_α definiamo come correnti di contorno in ciascuna maglia del circuito (fig. 37). L'equazione di Kirchhoff per l'α-esima maglia è

$$Z_1 i_\alpha + Z_2\,(2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0.$$

Questa è un'equazione di differenze lineare (rispetto alla variabile numerica intera α) a coefficienti costanti. Ne cerchiamo la soluzione nella forma

$$i_\alpha = \text{cost}\cdot q^\alpha$$

e per il parametro q otteniamo l'equazione caratteristica

$$q^2 - \left(2 + \frac{z_1}{z_2}\right) q + 1 = 0. \tag{1}$$

Supponiamo che $-4 \leqslant Z_1/Z_2 \leqslant 0$ cui corrispondono i valori ω^2 giacenti tra la più piccola e la più grande delle grandezze

$$\frac{c^2}{L_1 C_1} \quad \text{e} \quad \frac{c^2\,(4/C_2 + 1/C_1)}{4L_2 + L_1}$$

Allora l'equazione (1) ha due radici complesse coniugate con moduli $|\,q\,| = 1$. Ciò vuol dire che al passare da una maglia del circuito all'altra seguente l'ampiezza della corrente non decresce, cioè le oscillazioni elettriche si propagano lungo il circuito senza smorzamento. Se in questo caso introduciamo la notazione $q = e^{ikl}$ (l è la lunghezza di una maglia del circuito), allora k funge da « vettore d'onda » delle oscillazioni propagantisi lungo il circuito. La velocità di propagazione si può calcolare secondo le regole generali come la derivata $u = d\omega/dk$.

Se ω giace al di fuori dei limiti indicati l'equazione (1) ha due radici reali q_1 e q_2; poiché $q_1 q_2 = 1$, una di esse (sia q_1) in valore assoluto più piccola e l'altra (q_2) è superiore a 1. Si vede facilmente che ciò significa l'impossibilità della propagazione senza smorzamento delle oscillazioni nel circuito. Per precisarne la ragione consideriamo un circuito di lunghezza grande ma finita. L'impulso oscillatorio iniziale si dà a un estremo del circuito mentre l'altro suo estremo

[1]) La condizione di applicabilità della teoria quasi-stazionaria a questo circuito periodico consiste nella piccolezza delle dimensioni di ciascuna sua cellula rispetto alla « lunghezza d'onda » c/ω.

è in qualche modo chiuso. La chiusura di un estremo del circuito si descrive matematicamente mediante una condizione di frontiera che consente di determinare nella soluzione generale

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(A-\alpha)} + c_2 q_2^{-(A-\alpha)}$$

(A è la « coordinata » dell'estremo del circuito) il rapporto tra coefficienti c_1/c_2, che con la forma suindicata della soluzione sarà dell'ordine di 1. Ma a misura di aumento di $A - \alpha$ il secondo termine (nel quale $| q_2 | > 1$) sarà rapidamente più piccolo rispetto al primo. Quindi, quasi per tutta la lunghezza del circuito, tranne un suo piccolo tratto in prossimità dell'estremo, la soluzione ha la forma

$$i_\alpha = c_1 q_1^{-(A-\alpha)},$$

nella quale $| i_\alpha |$ descresce nella direzione dall'inizio fino all'estremo del circuito.

Si deve sottolineare che questo smorzamento non ha carattere di assorbimento dissipativo (per il quale non esistono ragioni poiché nel circuito non c'è resistenza); esso può essere descritto intuitivamente come risultato di riflessioni dell'impulso oscillatorio da ciascuna cellula successiva del circuito.

§ 63. *Moto di un conduttore in un campo magnetico*

In tutta l'esposizione precedente è stato supposto tacitamente che i conduttori nel campo elettromagnetico siano a riposo (rispetto al sistema di coordinate K in cui sono definite tutte le grandezze **E**, **H**, ecc.). In particolare, anche il legame $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ tra corrente e campo si verifica, in generale, per i soli conduttori immobili.

Per determinare il legame tra corrente e campo in un conduttore in moto passiamo dal sistema di coordinate K a un altro, K', in cui il conduttore (o un suo singolo tratto) è a riposo a un istante di tempo. In questo sistema abbiamo $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'$, ove $\mathbf{E}'$ è l'intensità del campo elettrico nel sistema K'. Ma in accordo con una nota formula di trasformazione dei campi $\mathbf{E}'$ si esprime in funzione del campo nel sistema K mediante la relazione [1])

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}], \tag{63,1}$$

ove $\mathbf{v}$ è la velocità del sistema K' rispetto al sistema K, cioè, nel caso considerato, è la velocità del conduttore (che supponiamo naturalmente piccola rispetto alla velocità della luce). Troviamo così

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] \right). \tag{63,2}$$

Questa è la formula a determinare il legame tra corrente e campo nei conduttori in moto. A proposito della sua deduzione si deve fare la seguente osservazione. Nel passare da un sistema all'altro abbiamo trasformato il campo lasciando invariata $\mathbf{j}$. La trasformazione

[1]) Cfr. II § 24. Valori microscopici delle intensità dei campi elettrico e magnetico sono sostituiti con loro medie $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$.

della densità di corrente implicherebbe per $v \ll c$ la comparsa di termini infinitesimi complementari di ordine superiore. Nella formula (63,2), invece, il secondo termine comparso in seguito alla trasformazione del campo è in generale non piccolo rispetto al primo benché contenga il fattore v/c. Così, se il campo elettrico stesso è condizionato dall'induzione elettromagnetica del campo magnetico variabile il suo ordine di grandezza contiene in più il fattore $1/c$ rispetto al campo magnetico.

La dissipazione dell'energia nel conduttore attraversato da una corrente non può dipendere, ovviamente, dal moto del conduttore. Perciò la densità di emanazione (in un secondo) di calore di Joule nel conduttore espressa in funzione della densità di corrente è data dalla stessa formula j^2/σ come nel conduttore immobile. Ma al posto del prodotto $\mathbf{jE}$ ora abbiamo [1])

$$\frac{j^2}{\sigma} = \mathbf{j}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right).$$

Quindi, nel conduttore in moto la somma $\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]/c$ funge da intensità « efficace » del campo elettrico che crea la corrente di conduzione. Perciò la forza elettromotrice agente nel circuito chiuso C è data dall'integrale

$$\mathscr{E} = \oint_C \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right) d\mathbf{l}. \qquad (63,3)$$

Trasformiamolo nel seguente modo. Secondo l'equazione di Maxwele $\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ abbiamo

$$\oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{E}\, d\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\, d\mathbf{f},$$

oppure, indicando con Φ il flusso magnetico attraverso la superficie S delimitata dal contorno della corrente,

$$\oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{v}=0}.$$

[1]) Si vede da questa formula che il calore complementare emanato (durante il tempo δt) nel conduttore animato dal moto nel campo magnetico è

$$\delta t\, \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\,[\mathbf{vB}]\, dV = -\frac{1}{c}\int \delta\mathbf{u}\,[\mathbf{jB}]\, dV,$$

ove $\delta\mathbf{u} = \mathbf{v}\delta t$ è uno spostamento durante il tempo δt. Questa grandezza è uguale e opposta di segno al lavoro compiuto durante lo stesso tempo sul conduttore dalle forze $\mathbf{f} = [\mathbf{jB}]/c$; con ciò si chiarisce la contraddizione apparente menzionata alla pag. 194.

La derivata rispetto al tempo con l'indice $\mathbf{v} = 0$ significa la variazione del flusso magnetico dovuta alla variazione con il tempo del campo magnetico stesso per la posizione invariata del contorno C.

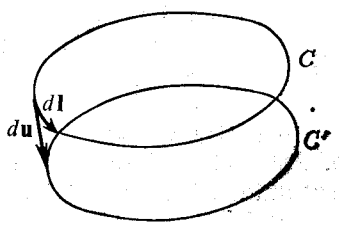


Fig. 38

Nel secondo termine scriviamo $\mathbf{v} = d\mathbf{u}/dt$, ove $d\mathbf{u}$ è uno spostamento infinitesimo dell'elemento di contorno. Allora

$$\oint_C [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l} = \int_C \frac{[d\mathbf{u}\mathbf{B}]\, d\mathbf{l}}{dt} = -\frac{\int \mathbf{B}\, d\mathbf{f}}{dt},$$

ove $d\mathbf{f} = [d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}]$ è un elemento d'area della superficie « laterale » tra due posizioni infinitamente vicine C e C' del contorno della corrente occupate da essa agli istanti t e $t + dt$ (fig. 38). Poiché il flusso magnetico totale attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo, è chiaro che il flusso attraverso la superficie laterale è uguale alla differenza di flussi attraverso le superficie poggiate su C e C'. Quindi,

$$\oint_C [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{B}=\mathrm{cost}},$$

ove la derivata rispetto al tempo significa la variazione del flusso magnetico dovuta allo spostamento del conduttore per il campo invariato.

Sommando i due termini otteniamo

$$\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{63,4}$$

ove la derivata rispetto al tempo significa ora il cambiamento totale del flusso magnetico attraverso il contorno in moto. In tal modo, la *legge di Faraday* esprimibile dalla formula (63,4) è vera qualunque sia la causa di variazione del flusso magnetico: dovuta sia alla variazione del campo stesso (di cui abbiamo parlato nel § 61, cfr. la formula (61,13)) sia al moto del conduttore.

Nel campo magnetico costante la variazione del flusso può essere legata soltanto allo spostarsi del contorno. Se il contorno si muove in modo tale che tutti i suoi punti si spostino lungo le linee di forza senza intersecarle mai, il flusso del campo attraverso il contorno non varia. Questa circostanza è l'immediata conseguenza del fatto che il flusso magnetico attraverso qualsiasi superficie chiusa sia nullo, mentre il flusso attraverso la superficie « laterale » descritta dal contorno in moto in questo caso è nullo identicamente (poiche $B_n = 0$ su questa superficie). Si può dire quindi che per la comparsa del-

la forza elettromotrice induttiva è necessario comunque che il conduttore nel suo moto intersechi le linee magnetiche di forza.

Il campo elettromagnetico nei conduttori in moto è definito dal sistema di equazioni

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),\\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0.\end{gathered}\tag{63,5}$$

Esprimendo $\mathbf{E}$ della seconda equazione in funzione di $\mathbf{H}$ e sostituendo nella prima, abbiamo

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{vB}]=-\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}\right).\tag{63,6}$$

In un conduttore omogeneo a conducibilità costante σ e permeabilità magnetica μ

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]=\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\mathbf{H},\quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0.\tag{63,7}$$

Queste equazioni generalizzano quelle dedotte nel § 58.

Tuttavia si deve osservare quanto segue: se esiste un solo conduttore che si muove rigidamente (senza deformazioni) nel campo magnetico esterno, la soluzione del problema si semplifica notevolmente per uso di un sistema di coordinate rigidamente legato al corpo. In questo sistema il conduttore è immobile mentre il campo esterno varia con il tempo secondo una legge in modo che ritorniamo al tipo di problemi sulle correnti di Foucault studiati nel § 59. La possibilità di questo passaggio è legata tuttavia non al principio di relatività di Galileo (o di Einstein) poiché il nuovo sistema di coordinate in generale è non inerziale. L'equivalenza di ambedue i problemi è la conseguenza dell'indipendenza suindicata dell'induzione elettromagnetica dalla causa che implica la variazione del flusso magnetico. La si può provare in modo matematico puro. A tale scopo sviluppiamo l'espressione rot $[\mathbf{vB}]$ tenendo conto, in questo caso, che div $\mathbf{B}=0$ e che per il moto rigido del corpo anche div $\mathbf{v}=0$ (questa uguaglianza esprime la non compressibilità del corpo). Allora il primo membro dell'equazione (63,6) assume la forma

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}-(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v}.\tag{63,8}$$

Ma questa somma non è altro che la derivata di $\mathbf{B}$ rispetto al tempo, che determina la variazione di $\mathbf{B}$ rispetto al corpo in rotazione. Infatti, la somma dei primi due termini è la derivata « sostanziale » rispetto al tempo $d\mathbf{B}/dt$ che dà la variazione di $\mathbf{B}$ in un punto moventesi a velocità $\mathbf{v}$. Il terzo termine tiene conto del cambiamento

dell'orientazione di **B** rispetto al corpo: esso è nullo per il moto traslatorio puro ($\mathbf{v}$ = costante) e uguale a $-[\mathbf{\Omega B}]$ per la rotazione del corpo ($\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$, ove $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare).

Per concludere il presente paragrafo consideriamo un fenomeno signolare (*induzione unipolare*) che si verifica per rotazione del conduttore magnetizzato. Esso consiste in quanto segue: se mediante due contatti scivolanti (A e B nella fig. 39) collegare a un magnete rotante un filo immobile attraverso quest'ultimo passerà la corrente. Non è difficile calcolare la forza elettromotrice che genera questa corrente. A tale scopo è più semplice passare a un sistema di coordinate rotante assieme al magnete. Se $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare nel nuovo sistema il filo ruota con velocità angolare $-\mathbf{\Omega}$ (mentre il magnete è immobile). Quindi, abbiamo a che fare con un conduttore che si muove nel campo magnetico costante **B** creato dal magnete immobile: trascuriamo la deformazione del campo causata dal conduttore stesso. Secondo la formula (63,6) la forza elettromotrice agente tra gli estremi del filo è data dall'integrale

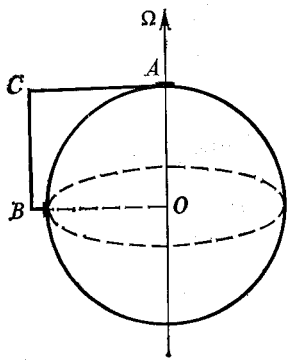


Fig. 39

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c} \int\limits_{ACB} [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \int\limits_{ACB} [\mathbf{B}\,[\mathbf{r\Omega}]]\, d\mathbf{l}, \qquad (63,9)$$

esteso lungo il filo. Questa formula risolve il problema posto.

Problemi

1. Determinare il momento magnetico di una sfera conduttrice (con $\mu = 1$) che ruota uniformemente nel campo magnetico omogeneo costante; determinare il momento di forze agenti sulla sfera.

Soluzione. Supponiamo che nel sistema di coordinate immobile (con l'asse z lungo il vettore della velocità angolare Ω) il campo esterno abbia le componenti $\mathfrak{H}_x$, 0, $\mathfrak{H}_z$. Nel sistema di coordinate ξ, η, z rotante con la sfera le componenti del campo sono

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x \cos \Omega t, \quad \mathfrak{H}_\eta = -\mathfrak{H}_x \operatorname{sen} \Omega t, \quad \mathfrak{H}_z$$

o, nella forma complessa,

$$\mathfrak{H}_\xi = \mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \qquad \mathfrak{H}_\eta = -i\mathfrak{H}_x e^{-i\Omega t}, \quad \mathfrak{H}_z.$$

In tal modo, lungo gli assi ξ e η agisce un campo variabile di frequenza Ω e il momento magnetico da esso indotto è

$$\mathscr{M}_\xi = V \operatorname{Re}\{\alpha\mathfrak{H}_\xi\} = V\mathfrak{H}_{\eta x}(\alpha' \cos \Omega t + \alpha'' \operatorname{sen} \Omega t),$$
$$\mathscr{M}_\eta = V \operatorname{Re}\{\alpha\mathfrak{H}_\eta\} = V\mathfrak{H}_x(-\alpha' \operatorname{sen} \Omega t + \alpha'' \cos \Omega t),$$

ove $V\alpha$ è la polarizzabilità magnetica complessa della sfera trovata nel problema 1 del § 59. Lungo l'asse z, invece, il campo magnetico è costante e perciò non crea (per $\mu = 1$) momento magnetico. Le componenti del momento magnetico rispetto al sistema di coordinate immobile sono

$$\mathcal{M}_x = V\alpha'\mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_y = V\alpha''\mathfrak{H}_x, \quad \mathcal{M}_z = 0.$$

Quindi, in questo problema α' e α'' determinano le componenti del momento magnetico della sfera nei piani dei vettori $\mathbf{\Omega}$ e $\mathfrak{H}$, rispettivamente, e perpendicolarmente a quest'ultimo.

Il momento di forze agente sulla sfera è $\mathbf{K} = [\mathcal{M}\mathfrak{H}]$. Le sue componenti rispetto agli assi immobili sono

$$K_x = V\alpha''\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z, \quad K_y = -V\alpha'\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_z, \quad K_z = -V\alpha''\mathfrak{H}_x^2.$$

Qui abbiamo ridotto il problema della sfera rotante nel campo al problema della sfera immobile nel campo variabile; ciò è del tutto naturale nella luce dell'osservazione fatta alla fine della soluzione del problema 1 del § 59. Sottolineiamo un aspetto interessante di questa analogia: all'aumentare della frequenza ω del campo magnetico variabile quest'ultimo viene « spinto » dalla sfera: nel limite $\omega \to \infty$ tutte le linee di forza « aggirano » la sfera senza penetrare al suo interno; allo stesso modo da una sfera rotante rapidamente viene spinto il campo magnetico perpendicolare all'asse di rotazione.

2. Determinare la forza elettromotrice dell'induzione unipolare che compare tra il polo e l'equatore (fig. 39) di una sfera magnetizzata omogeneamente e rotante uniformemente attorno all'asse coincidente con l'asse di magnetizzazione.

Soluzione. Al ruotare della sfera attorno alla direzione della sua magnetizzazione il campo da essa generato è costante. Tenendo anche conto che all'interno della sfera non esistono correnti dalla formula (63,6) troviamo che rot $[\mathbf{vB}] = 0$. Perciò l'integrale di $[\mathbf{vB}]$ esteso al contorno chiuso $OACBO$ (fig. 39) si annulla e, di conseguenza, l'integrazione secondo il cammino ACB nella formula (63,9) si può sostituire con quella secondo il cammino AOB passante all'interno della sfera. L'integrale esteso al segmento AO dell'asse di rotazione si annulla per coincidenza delle direzioni $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{r}$ e l'integrazione lungo la semiretta OB (tenendo conto della coincidenza delle direzioni $\mathbf{B}$ e $\mathbf{\Omega}$ all'interno della sfera) dà

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int_0^a B_0\Omega r\,dr = \frac{B_0\Omega a^2}{2c}$$

(a è il raggio della sfera e B_0 la sua induzione magnetica). In una sfera magnetizzata omogeneamente (se non esiste campo esterno applicato) il legame tra induzione e magnetizzazione è determinato dalle equazioni $B_0 + 2H = 0$ (cfr. l'(8,1)) e $B_0 - H = 4\pi M$ e di qui $B_0 = 8\pi M/3$. Introducendo il momento magnetico totale $\mathcal{M}$ della sfera, infine otteniamo

$$\mathscr{E} = \frac{\Omega\mathcal{M}}{ac}.$$

3. Trovare la carica totale descrivente un contorno lineare chiuso al variare (per causa qualsiasi) del flusso magnetico attraverso questo contorno da un valore costante (Φ_1) a un altro (Φ_2).

Soluzione. La carica totale cercata è l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} J\,dt$, ove $J(t)$ è la corrente indotta nel contorno. Dal punto di vista matematico questo integrale rappresenta la componente di Fourier della funzione $J(t)$ con frequenza $\omega = 0$.

Perciò esso è legato alla stessa componente della forza elettromotrice mediante la relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}\, dt = Z\,(0) \int_{-\infty}^{\infty} J\, dt$$

(cfr. la (61,3)). Sostituendovi $Z\,(0) = R$ (con R la resistenza del contorno alla corrente continua) e $\mathscr{E} = -\,(1/c)\, d\Phi/dt$ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} J\, dt = \frac{1}{cR}\,(\Phi_1 - \Phi_2).$$

§ 64. *Eccitazione della corrente per accelerazione*

Studiando nel paragrafo precedente il moto del conduttore abbiamo trascurato influsso possibile dell'accelerazione (qualora tale esista). Fra l'altro, il moto accelerato di un metallo è equivalente alla comparsa di forze inerziali complementari agenti sugli elettroni di conduzione. Se $\dot{\mathbf{v}}$ è l'accelerazione del conduttore e m la massa dell'elettrone, questa forza vale $-\,m\dot{\mathbf{v}}$. Essa esercita sull'elettrone lo stesso influsso che creerebbe il campo elettrico di intensità $m\dot{\mathbf{v}}/e$, ove e è la carica dell'elettrone. Quindi, il campo elettrico efficace agente sugli elettroni di conduzione in un metallo animato da un moto accelerato è

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{m}{e}\,\dot{\mathbf{v}}. \tag{64,1}$$

Rispettivamente per la densità di corrente abbiamo

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}' = \sigma\left(\mathbf{E} + \frac{m}{e}\,\dot{\mathbf{v}}\right). \tag{64,2}$$

Esprimiamo $\mathbf{E}$ nella (64,1) in funzione di $\mathbf{E}'$ e sostituiamo nell'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

(ovunque poniamo $\mu = 1$). Allora

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{v}}. \tag{64,3}$$

Scriviamo $\mathbf{v}$ nella forma della somma

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}],$$

ove **u** è la velocità del moto traslatorio e $\mathbf{\Omega}$ la velocità angolare della rotazione del corpo. Derivando rispetto al tempo troviamo l'accelerazione

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{\Omega v}] + [\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}] = \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{\Omega u}] + [\mathbf{\Omega}\,[\mathbf{\Omega r}]] + [\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}].$$

I primi due termini sono indipendenti da **r** e perciò si annullano per derivazione rispetto alle coordiante. Il terzo termine può essere riscritto nella forma

$$[\mathbf{\Omega}\,[\mathbf{\Omega r}]] = -\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,[\mathbf{\Omega r}]^2$$

e perciò il suo rot anch'esso si annulla. Infine, rot $[\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{r}] = 2\dot{\mathbf{\Omega}}$. Quindi, sostituendo $\dot{\mathbf{v}}$ nella (64,3) abbiamo

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{2m}{e}\dot{\mathbf{\Omega}}$$

oppure

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t}, \tag{64,4}$$

ove abbiamo introdotto la notazione

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{2mc}{e}\mathbf{\Omega}. \tag{64,5}$$

Poiché $\mathbf{\Omega}$ è indipendente dalle coordinate, l'equazione

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

conserva la sua forma se esprimiamo in essa **H** in funzione di **H'**

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}'. \tag{64,6}$$

Escludendo **E'** dalle equazioni (64,4) e (64,6) otteniamo per **H'** la seguente equazione:

$$\Delta\mathbf{H}' = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \tag{64,7}$$

coincidente con quella cui **H** soddisfa nel conduttore immobile.

All'esterno del corpo il campo verifica l'equazione $\Delta\mathbf{H} = 0$ (la lunghezza d'onda è supposta grande rispetto alle dimensioni del corpo); la stessa equazione sarà verificata anche da **H'**.

Infine, sulla superficie del conduttore con **H** sarà continuo anche **H'**. È diversa la condizione all'infinito: **H** tende a zero e **H'** a un limite finito, ossia a $-2mc\mathbf{\Omega}/e$.

In tal modo, il problema del campo magnetico variabile **H** attorno a un corpo in rotazione non uniforme è equivalente al problema

del campo $\mathbf{H}'$ attorno a un corpo immobile collocato nel campo magnetico omogeneo esterno di intensità

$$\mathfrak{H} = -\frac{2mc}{e}\,\Omega. \tag{64,8}$$

Partendo dalla soluzione $\mathbf{H}'$ di questo problema il campo cercato $\mathbf{H}^{(e)}$ all'esterno del conduttore si ottiene per sottrazione di $\mathfrak{H}$.

Il campo magnetico così comparso, come ogni campo variabile, induce nel conduttore stesso correnti elettriche. In un corpo semplicemente connesso queste correnti si manifestano sotto forma del momento magnetico acquisito dal corpo. In un'anello in rotazione non uniforme il fenomeno si rivela nella comparsa della forza elettromotrice (l'*effetto Stewart-Tolman*).

Il fatto che nella formula (64,8) figura la velocità angolare stessa e non la sua derivata rispetto al tempo può fornire pretesto per un equivoco. Perciò ricordiamo che tutta la discussione e con essa il suindicato senso della (64,8) si riferisce esclusivamente alla rotazione non uniforme. Infatti, per $\mathbf{\Omega}$ costante l'equazione (64,7) con la condizione richiesta all'infinito è soddisfatta identicamente dal valore $\mathbf{H}' = \mathfrak{H}$; allora in virtú della definizione (64,5) abbiamo $\mathbf{H} = 0$. Quanto al campo magnetico che compare per rotazione uniforme grazie all'effetto giromagnetico (§ 36), esso rappresenta grandezza piccola che qui trascuriamo.

È da notare anche che nella discussione abbiamo trascurato la deformazione che compare per rotazione non uniforme. Evidentemente, questa deformazione non inciderebbe sull'effetto poiché il tempo caratteristico di variazione della velocità angolare è grande rispetto al tempo di rilassamento degli elettroni di conduzione per deformazione (ciò che è supposto). Infatti, la corrente elettrica in un conduttore è generata dal gradiente della somma $\varphi + \zeta_0/e$, ove φ è il potenziale del campo e ζ_0 il potenziale chimico degli elettroni di conduzione (cfr. § 26). La deformazione non omogenea crea il gradiente di ζ_0 che va compensato dal campo elettrico che si crea in virtú della condizione di equilibrio termodinamico $e\varphi + \zeta_0 =$ $=$ costante.

Problemi

1. Determinare il momento magnetico di una sfera (di raggio a) che ruota non uniformemente. La velocità di rotazione è supposta così piccola che la profondità di penetrazione $\delta \gg a$.

Soluzione. Il momento magnetico acquisito dalla sfera nel campo $\mathfrak{H}(t)$ (64,8) è

$$\mathcal{M} = V\hat{\alpha}\mathfrak{H}$$

ove $\hat{\alpha}$ è un operatore la cui azione sulle componenti di Fourier della funzione $\mathfrak{H}(t)$ è determinata dalle formule ottenute nel problema 1 del § 59. Per le componenti con frequenze ω tali che $\delta \gg a$ abbiamo

$$\mathcal{M} = V\alpha(\omega)\,\mathfrak{H} \approx -i\omega \frac{4\pi m a^5 \sigma}{15ce}\,\Omega.$$

Questa formula riscritta nella forma

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi m a^5 \sigma}{15ce}\,\frac{d\Omega}{dt},$$

non contiene ω in forma esplicita e perciò è vera anche per le funzioni $\Omega(t)$ e $\mathcal{M}(t)$ non sviluppate in componenti di Fourier (è supposto che nel loro sviluppo figurino soprattutto le sole frequenze soddisfacenti alla condizione posta).

2. Determinare la carica totale che passerà per un anello sottile circolare per fermata della sua rotazione uniforme attorno all'asse perpendicolare al suo piano.

Soluzione. Nella formula ottenuta nel problema 3 del § 63 con Φ si deve intendere il flusso del campo $\mathfrak{H}$ (64,8). La carica totale al variare dalla velocità angolare da Ω a 0 è

$$\int_{-\infty}^{\infty} J\,dt = \frac{2mc}{cRc}\,\Omega\pi b^2 = \frac{m\sigma V}{2\pi e}\,\Omega,$$

(b è il raggio dell'anello e V il volume del filo).

3. Determinare la corrente che compare in un anello circolare superconduttore per fermata della sua rotazione uniforme.

Soluzione. Dalla condizione di costanza del flusso magnetico totale attraverso l'anello (cfr. la 54,5) troviamo

$$J = \frac{2mc^2}{cL}\,\Omega\pi b^2 = \frac{mc^2 b\Omega}{2e\,[\ln(8b/a) - 2]}$$

(per il valore L si veda la nota alla pag. 273).

Capitolo VIII

IDRODINAMICA MAGNETICA

§ 65. *Equazioni del moto di un fluido in un campo magnetico*

Se un mezzo conduttore liquido (o gassoso) si trova nel campo magnetico, i suoi moti idrodinamici inducono in esso campi elettrici e compaiono correnti elettriche. Ma sulle correnti nel campo magnetico agiscono forze capaci di incidere sensibilmente sul moto del fluido. D'altra parte, queste correnti cambiano il campo magnetico stesso. Quindi, viene a crearsi un quadro complicato di interazioni tra fenomeni magnetici e idrodinamici, che deve essere studiato sulla base di un sistema compatibile di equazioni descriventi il campo e di equazioni di moto del fluido.

Alla regione di applicazioni dell'idrodinamica magnetica appartengono oggetti fisici piú disparati: da metalli liquidi al plasma cosmico. Non discuteremo condizioni specifiche esistenti in oggetti concreti diversi. Sottolineiamo però che l'applicabilità nel senso letterale dell'idrodinamica magnetica chiede che per un moto considerato le distanze caratteristiche e gli intervalli di tempo siano grandi, ovviamente, rispetto alla lunghezza del cammino e al tempo del moto dei portatori di corrente (elettroni e ioni). In alcuni casi, tuttavia, le equazioni coincidenti formalmente con le equazioni dell'idrodinamica magnetica per il fluido perfetto possono descrivere anche il moto del mezzo con grande lunghezza del cammino. Tale situazione si verifica, ad esempio, in un plasma privo di equilibrio in cui la temperatura degli elettroni è di gran lunga superiore a quella degli ioni (cfr. X § 38).

La permeabilità magnetica dei mezzi trattati infatti dall'idrodinamica magnetica differisce poco da 1, e questa differenza è inessenziale per i fenomeni qui studiati. Perciò ovunque nel presente capitolo poniamo $\mu = 1$[1]).

Costruiamo soprattutto un sistema di equazioni magnetoidrodinamiche nelle condizioni in cui si possono trascurare tutti i processi dissipativi, cioè per il fluido perfetto. Ciò vuol dire che vanno tra-

[1]) Nella letteratura dedicata all'idrodinamica magnetica il campo magnetico sotto queste condizioni spesso si denota con **B**, sottolineando con ciò che si tratta precisamente dell'intensità microscopica media $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$. Tuttavia, useremo qui la notazione **H** per non violare l'uniformità con gli altri capitoli del presente libro in cui si studiano mezzi non magnetici.

scurati sia i processi di viscosità e di conduzione termica che la finitezza della conducibilità elettrica del mezzo σ; quest'ultima grandezza è supposta grande a piacere.

Ponendo $\sigma \to \infty$ nelle equazioni (63,7) scriviamo

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{65,1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \tag{65,2}$$

Le equazioni idrodinamiche contengono l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \tag{65,3}$$

(ρ è la densità del liquido) e l'equazione di Eulero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mathbf{f}}{\rho}$$

ove $\mathbf{f}$ è la densità di volume di forze elettromagnetiche, in questo caso, estranee. In accordo con la formula (35,4) abbiamo

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}].$$

Quindi, l'equazione di moto del fluido assume la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}]. \tag{65,4}$$

A queste equazioni si devono aggiungere anche l'equazione di stato

$$P = P(\rho, T) \tag{65,5}$$

che lega reciprocamente pressione, densità e temperatura, e l'equazione di conservazione dell'entropia esprimente adiabaticità del moto se non esiste dissipazione:

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s = 0 \tag{65,6}$$

ove s è l'entropia di unità di massa del fluido e

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla$$

esprime la derivata « sostanziale » esprimente la variazione del valore per spostamento assieme alla particella in moto nel fluido. Le equazioni (65,1-6) formano il sistema totale di equazioni magnetoidrodinamiche per il fluido perfetto.

Come è noto, l'equazione di Eulero si può ridurre (ricorrendo anche all'equazione di continuità) a forma che esprime la legge di conservazione dell'impulso:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{65,7}$$

ove Π_{ik} è il tensore della densità di flusso d'impulso (cfr. VI § 7). Se non esistono forze estranee

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik}.$$

Trasformando l'ultimo termine dell'equazione (65,4) mediante l'uguaglianza

$$[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}] = \frac{1}{2}\nabla H^2 - (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{H}$$

tenendo anche conto che div $\mathbf{H} \equiv \partial H_k/\partial x_k = 0$, troviamo che nell'idrodinamica magnetica

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \frac{1}{4\pi}\left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}\right). \tag{65,8}$$

Come si deve al tensore Π_{ik} si aggiunge il tensore degli sforzi de Maxwell.

La legge di conservazione dell'energia di idrodinamica ordinaria è espressa dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2} + w\right),$$

ove ε e $w = \varepsilon + P/\rho$ sono l'energia interna e la funzione termica di unità di massa del liquido; essa deriva automaticamente dall'equazione di moto (cfr. VI § 6). Se nel mezzo conduttore esiste un campo magnetico alla densità di energia si aggiunge l'energia magnetica $H^2/8\pi$ e alla densità del flusso di energia il vettore di Poynting $\mathbf{S} = c\,[\mathbf{EH}]/4\pi$. Nell'ultimo, inoltre, bisogna esprimere $\mathbf{E}$ in funzione di $\mathbf{H}$ mediante la formula

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,[\mathbf{vH}], \tag{65,9}$$

che si ricava dalla (63,2) per $\sigma \to \infty$ (e $\mathbf{j}$ finita)[1]. In tal modo, la conservazione dell'energia nell'idrodinamica magnetica è espressa dall'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}\right) = -\,\mathrm{div}\,\mathbf{q} \tag{65,10}$$

[1]) Questa espressione corrisponde al campo $\mathbf{E}'$ (63,1) nullo nel sistema di coordinate che si muove assieme con un dato elemento di volume del liquido; in un mezzo conduttore perfetto ha luogo lo schermaggio totale del campo elettrico.

nella quale la densità del flusso di energia è

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{H} [\mathbf{v}\mathbf{H}]]. \tag{65,11}$$

Queste equazioni si possono provare facilmente con calcolo diretto.

Il sistema di equazioni magnetoidrodinamiche suindicato è basato sul fatto che nelle equazioni di Maxwell è stata trascurata la corrente di spostamento. Ciò vuol dire che si parte dall'ipotesi che

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll |\mathrm{rot}\, \mathbf{H}|. \tag{65,12}$$

Esprimendo **E** in funzione di **H** mediante la formula (65,9), di qui ricaviamo la condizione

$$vl/c^2\tau \ll 1 \tag{65,13}$$

ove l e τ sono parametri di lunghezza e di tempo caratteristici per il moto considerato. Dall'espressione (65,2) ricaviamo la stima $l/\tau \sim v$, e, in questo caso, mediante la (65,13) troviamo la condizione $v \ll c$ esprimente cioè che il moto deve essere non relativistico (ciò che abbiamo supposto fin dall'inizio). Dall'equazione (65,4) ricaviamo la stima $\rho v/\tau \sim H^2/l$ che nell'insieme con la (65,13) fornisce la seguente condizione per la grandezza del campo magnetico:

$$H^2 \ll \rho c^2. \tag{65,14}$$

Badiamo al fatto che a primo membro dell'equazione (65,10) non figura l'energia elettrica $E^2/8\pi$ e a primo membro dell'equazione (65,7) manca l'impulso del campo elettromagnetico $\mathbf{S}/c^2$. Ciò è dovuto automaticamente al fatto che è trascurata la corrente di spostamento. La piccolezza dell'energia elettrica rispetto a quella magnetica corrisponde alla disuguaglianza $E \sim vH/c \ll H$, e la piccolezza di $S/c^2 \sim EH/c \sim vH^2/c^2$ rispetto a ρv alla disuguaglianza (65,14).

Torniamo all'equazione (65,2) alla quale è possibile dare un'interpretazione intuitiva importante (*H. Alfvén*, 1942). Sviluppiamo rot a secondo membro, tenendo conto in questo caso che div $\mathbf{H} = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}.$$

Sostituendovi in accordo con l'equazione di continuità (65,3)

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{\rho}\nabla\rho,$$

dopo un semplice raggruppamento di termini otteniamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)\frac{\mathbf{H}}{\rho} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{v}. \tag{65,15}$$

D'altra parte, consideriamo una « linea fluida », cioè quella che si sposta assieme con le particelle del liquido che la costituiscono.

Sia $\delta\mathbf{l}$ un elemento di lunghezza di questa linea; vediamo come esso cambia con il passare del tempo. Se $\mathbf{v}$ è la velocità del liquido in un punto a un estremo di $\delta\mathbf{l}$, la sua velocità all'altro estremo sarà $\mathbf{v} + (\delta\mathbf{l}\nabla)\mathbf{v}$. Perciò durante il tempo dt l'elemento $\delta\mathbf{l}$ cambia di $dt\,(\delta\mathbf{l}\nabla)\,\mathbf{v}$, cioè

$$\frac{d}{dt}\delta\mathbf{l} = (\delta\mathbf{l}\nabla)\,\mathbf{v}.$$

Vediamo così che la variazione con il tempo dei vettori $\delta\mathbf{l}$ e $\mathbf{H}/\rho$ è determinata dalla stessa equazione. Ne segue che se all'istante iniziale questi vettori coincidono per direzione, essi resteranno paralleli anche nel seguito e le loro lunghezze cambieranno in modo reciprocamente proporzionale. In altre parole, se due particelle del liquido infinitamente vicine si trovano sulla medesima linea di forza, esse resteranno anche nel seguito sulla medesima linea di forza e la grandezza H/ρ cambierà proporzionalmente alla loro distanza.

Passando dai punti infinitamente vicini a quelli che sono separati da qualsiasi distanza finita, possiamo concludere che ogni linea di forza si sposta assieme alle particelle del liquido che le appartengono. Si può dire che (per $\sigma \to \infty$) le linee magnetiche di forza come se fossero « congelate » nella sostanza del liquido e si spostano con essa. La grandezza H/ρ varia in ogni punto proporzionalmente alla distensione della corrispondente « linea fluida ». Se il fluido in moto si può ritenere incompressibile, allora $\rho =$ costante e, in questo caso, varia proporzionalmente alla distensione delle linee di forza l'intensità stessa H.

Questi aspetti hanno un altro aspetto intuitivo. Da essi deriva che per uno spostamento con il tempo di un contorno liquido chiuso quest'ultimo non interseca le linee di forza. Ciò significa (cfr. § 63) che il flusso del campo magnetico attraverso superficie qualsiasi, poggiata su un contorno liquido, resta invariabile con il tempo.

§ 66. Processi dissipativi nell'idrodinamica magnetica

Nell'idrodinamica ordinaria i processi dissipativi sono determinati da tre grandezze: due coefficienti di viscosità e oefficiente di conducibilità termica. Questo numero di coefficienti notevolmente aumenta nell'idrodinamica magnetica: sia per comparsa di nuove grandezze di natura elettrica sia per esistenza in ogni punto di una direzione $\mathbf{H}$ fissa, ciò che viola l'isotropia del liquido. Limitiamoci tuttavia al caso semplice in cui tutti i coefficienti cinetici si possono supporre costanti lungo tutto il mezzo, cioè indipendenti dalla grandezza e dalla direzione del campo magnetico. Allora ai coefficienti ordinari di viscosità η, ζ e di conducibilità termica $\varkappa$

si aggiunge una sola grandezza, ossia la conducibilità elettrica σ [1].

L'ipotesi sull'indipendenza dei coefficienti cinetici dal campo magnetico significa che siano soddisfatte determinate condizioni che limitano notevolmente la regione di applicabilità delle equazioni rispetto alle equazioni magnetoidrodinamiche per il liquido perfetto. E precisamente, deve essere piccola la lunghezza del cammino descritto dai portatori di corrente rispetto al raggio di curvatura della loro traiettoria nel campo magnetico; in altre parole, la frequenza di collisioni deve essere grande rispetto alla frequenza di Larmor dei portatori di corrente. Questa condizione è violata in un mezzo troppo rarefatto o in un campo magnetico troppo forte [2].

Per tener conto della viscosità e della conduzione elettrica l'equazione (65,2) va sostituita con l'equazione completa (63,7)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{vH}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \tag{66,1}$$

mentre al posto dell'equazione di Eulero (65,4) si scrive l'equazione di Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} - \\ - \frac{1}{4\pi\rho}[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]. \tag{66,2}$$

È da notare che l'equazione (66,1) non contiene viscosità; perciò la proprietà di « congelamento » delle linee di forza per $\sigma \to \infty$ resta anche in un fluido viscoso perfettamente conduttore.

L'equazione di adiabaticità (65,6) si sostituisce da un'equazione esprimente il trasporto di calore. Nell'idrodinamica ordinaria essa si scrive

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\varkappa\nabla T)$$

(cfr. VI § 49). L'espressione a primo membro dell'uguaglianza rappresenta la quantità di calore (riferita a 1 cm^3) emanata in un secondo da un elemento di fluido in moto. L'espressione a secondo membro, invece, è l'energia dissipata nello stesso volume durante lo stesso tempo. Il primo termine è legato alla viscosità; σ'_{ik} è il tensore viscoso degli sforzi

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \xi\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

---

[1]) Il legame tra corrente e campo elettrico in un mezzo termodinamicamente non omogeneo ma isotropo in ogni punto è contenuto anche nel coefficiente termoelettrico α (§ 26). Ma se questo coefficiente è costante esso va omesso nelle equazioni di moto.

[2]) La questione delle equazioni magnetoidrodinamiche per il plasma quando queste condizioni sono violate è trattata nell'altro volume del Corso: X §§ 58, 59.

Il secondo termine esprime la dissipazione legata alla conducibilità termica. Per un fluido conduttore qui si deve aggiungere anche il calore di Joule che, riferito a unità di volume, vale

$$\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}=\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2.$$

Perciò l'equazione del trasporto di calore nell'idrodinamica magnetica si scrive nella forma

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla s\right)=\sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\varkappa\Delta T+\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2. \quad (66,3)$$

Al tensore di densità del flusso di impulso si aggiunge il tensore viscoso degli sforzi:

$$\Pi_{ik}=\rho v_i v_k+P\delta_{ik}-\sigma'_{ik}-\frac{1}{4\pi}\left(H_iH_k-\frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right). \quad (66,4)$$

La densità del flusso di calore è data ora dall'espressione

$$\mathbf{q}=\rho\mathbf{v}\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-(\mathbf{v}\sigma')-\varkappa\nabla T+\frac{1}{4\pi}[\mathbf{H}[\mathbf{vH}]]-\frac{c^2}{16\pi^2\sigma}[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}] \quad (66,5)$$

ove $(\mathbf{v}\sigma')$ è un vettore avente come componenti $\sigma'_{ik}v_k$. Qui si aggiungono termini legati sia alla viscosità e alla conducibilità termica che alla conducibilità elettrica; quest'ultimo si ottiene sostituendo l'intensità $\mathbf{E}$ della (63,2) nel vettore di Poynting

$$\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]=\frac{c}{4\pi\sigma}\mathrm{rot}\,\mathbf{H}-\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]. \quad (66,6)$$

Le equazioni si rendono più semplici se si può supporre incompressibile liquido in moto. In questo caso l'equazione di continuità si riduce a $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ e nell'equazione (66,2) scompare il penultimo termine. Scriviamo ancora una volta il sistema di equazioni (nelle equazioni (66,1-2) è comodo allora trasformare i termini rot $[\mathbf{vH}]$ e $[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]$ mediante le note formule dell'analisi vettoriale):

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H}=0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0, \quad (66,7)$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{H}=(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{v}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H}, \quad (66,8)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}+\nu\Delta\mathbf{v} \quad (66,9)$$

($\nu=\eta/\rho$ è la viscosità cinematica). Quanto all'equazione (66,3), essa non serve alla soluzione dei problemi del liquido incompressibile se non presenta interesse speciale la distribuzione della temperatura in esso.

Nell'idrodinamica ordinaria si introduce, come è noto, il numero di Reynolds che caratterizza il ruolo dei termini viscosi rispetto a

quelli di convezione nelle equazioni di moto: $R = ul/\nu$ con l e $u \sim \sim l/\tau$ due parametri caratteristici della lunghezza e della velocità per un moto considerato nel liquido. Accanto a questo numero l'idrodinamica magnetica consente l'introduzione del *numero magnetico di Reynolds*

$$R_m = \frac{ul}{\nu_m}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}, \tag{66,10}$$

che caratterizza il ruolo del termine contenente la conducibilità nell'equazione (66,1). Questo termine è analogo a $\nu\Delta\mathbf{v}$ nell'equazione di Navier-Stokes e la grandezza ν_m funge da « coefficiente di diffusione » del campo magnetico. Per $R_m \gg 1$ risulta possibile trascurare questo termine. Tuttavia, la questione dei casi in cui di fatto sia possibile trascurare processi dissipativi nel fluido non ha risposta generale poiché le condizioni corrispondenti dipendono sostanzialmente dal carattere concreto del moto; esse sono completamente diverse, ad esempio, per moti stazionari e non stazionari.

Nel caso limite inverso di un liquido conduttore cattivo $R_m \ll 1$ il sistema di equazioni magnetoidrodinamiche diventa molto più semplice (*S.I. Braginskij*, 1959).

Il fatto è che in questo caso la perturbazione del campo magnetico da parte del liquido in moto è piccola. Se il campo imperturbato $\mathfrak{H}$ è indipendente dal tempo (ciò che è supposto in seguito), la sua variazione $\mathbf{H}'$ nel liquido in moto si può valutare confrontando due termini a secondo membro dell'equazione (66,1):

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}\mathfrak{H}] \sim \nu_m \Delta \mathbf{H}'$$

di qui $H' \sim R_m\mathfrak{H}$ e per $R_m \ll 1$ si ha effettivamente $H' \ll \mathfrak{H}$. Trascurando questa variazione si può supporre il campo magnetico $\mathbf{H}$ coincidente con quello ($\mathfrak{H}$) che sarebbe creato da sorgenti esterne nel vuoto. In questo caso, essendo $\mathfrak{H}$ costante, abbiamo $\operatorname{rot}\mathbf{E} = = -c^{-1}\partial\mathfrak{H}/\partial t \equiv 0$, vale a dire che il campo elettrico è potenziale: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. L'equazione per il potenziale φ si può ottenere dall'uguaglianza $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ che si verifica identicamente se si trascura la corrente di spostamento (cioè in virtù dell'equazione $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$). Sostituendovi la densità di corrente nella forma

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathfrak{H}]\right)$$

e osservando che per il campo imperturbato $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$, otteniamo (per σ = costante) l'equazione

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c}\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{66,11}$$

La seconda equazione è quella di Navier-Stokes

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f} \tag{66,12}$$

(la scriviamo per un liquido incompressibile) nella quale la densità di volume di forze esterne è

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c}\,[\mathbf{j}\mathfrak{H}] = \frac{\sigma}{c}\left\{[\mathfrak{H}\nabla\varphi] + \frac{1}{c}\,[\mathfrak{H}\,[\mathfrak{H}\mathbf{v}]]\right\}. \qquad (66,13)$$

Le equazioni (66,11-13) formano il sistema cercato.

§ 67. *Flusso magnetoidrodinamico tra piani paralleli*

Un esempio istruttivo del moto magnetoidrodinamico di un fluido conduttore viscoso è fornito dal flusso stazionario nello spazio tra due piani solidi paralleli e nella direzione parallela ai piani è applicato un campo magnetico omogeneo $\mathfrak{H}$ (*J. Hartmann*, 1937). Questo moto è analogo elementare della corrente di Poiseuille nell'idrodinamica ordinaria.

È naturale supporre che la velocità del liquido abbia ovunque la medesima direzione (che consideriamo come l'asse x); essa dipende esclusivamente dalla coordinata z nella direzione perpendicolare ai piani solidi. Si può dire lo stesso del campo longitudinale H_x che si crea grazie al moto del liquido. La pressione P, invece, dipende anche da x poiché nella direzione del moto esiste il gradiente della pressione che rende stazionaria la corrente. L'equazione div $\mathbf{v} = 0$ si verifica identicamente e dall'equazione div $\mathbf{H} = 0$ segue che $H_z =$ $=$ costante $= \mathfrak{H}$. In virtù della componente z dell'equazione (66,9) la somma

$$P + \frac{H_x^2}{8\pi}$$

è funzione esclusivamente di x. Poiché, al tempo stesso, H_x è indipendente da x, il gradiente della pressione dP/dx potrebbe essere funzione della sola x e infatti uguale (per omogeneità lungo l'asse x) alla grandezza costante $-\Delta P/l$ (ΔP è la calata della pressione sulla lunghezza l).

In seguito, le componenti x delle equazioni (66,8-9) danno

$$\mathfrak{H}\,\frac{dv}{dz} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\,\frac{d^2H_x}{dz^2} = 0, \qquad (67,1)$$

$$\eta\,\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\,\frac{dH_x}{dz} = \text{cost} \equiv -\frac{\Delta P}{l}. \qquad (67,2)$$

Le condizioni di frontiera sulle superficie solide richiedono che sia nulla la velocità del fluido viscoso e anche continua la componente tangenziale dell'intensità del campo magnetico:

$$v = 0,\ H_x = 0 \text{ per } z = \pm a,$$

ove $2a$ è la distanza tra due piani solidi e il piano $z = 0$ si trova a metà tra questi due piani. La soluzione delle equazioni (67,1-2) soddisfacente a queste condizioni è

$$v = v_0 \frac{\operatorname{ch}(a/\delta) - \operatorname{ch}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(a/\delta) - 1}, \quad \delta = \frac{c}{\mathfrak{H}} \sqrt{\frac{\eta}{\sigma}},$$
$$H_x = -v_0 \frac{4\pi}{c} \sqrt{\sigma\eta} \frac{(z/a)\operatorname{sh}(a/\delta) - \operatorname{sh}(z/\delta)}{\operatorname{ch}(a/\delta) - 1}. \tag{67,3}$$

La costante v_0 è la velocità del liquido nel piano di mezzo $z = 0$. Il suo legame con il gradiente della pressione si può ottenere sostituendo la (67,3) nella (67,2). La velocità media (rispetto alla sezione) del liquido è

$$\bar{v} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} v\, dz = \frac{\Delta P}{l} \frac{a\delta}{\eta} \left(\operatorname{cth} \frac{a}{\delta} - \frac{\delta}{a} \right). \tag{67,4}$$

Di criterio di influsso del campo magnetico sul flusso di fluido rispetto all'influsso della viscosità serve la grandezza

$$\mathrm{G} = \frac{a}{\delta} = \frac{a\mathfrak{H}}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}} \tag{67,5}$$

(detta *numero di Hartmann*). Per $\mathrm{G} \ll 1$ si ha

$$v = v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right), \quad \bar{v} = \frac{\Delta P}{l} \frac{a}{3\eta}, \tag{67,6}$$

cioè la corrente di Poiseuille ordinaria. Se invece $\mathrm{G} \gg 1$ allora

$$v = v_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{a - |z|}{\delta} \right) \right], \quad \bar{v} = \frac{\Delta P}{l} \frac{ac}{\mathfrak{H}\sqrt{\sigma\eta}}. \tag{67,7}$$

All'aumentare del campo magnetico il profilo delle velocità diviene più piano nella gran parte della sezione e ciò diminuisce la velocità media del moto (per dato gradiente della pressione); la caduta fondamentale della pressione si verifica negli strati in prossimità delle pareti di spessore $\sim \delta$.

Il moto del liquido implica la comparsa di un campo elettrico nella direzione dell'asse y. Essendo il moto stazionario, rot $\mathbf{E} = 0$ e di qui $E_y =$ costante. Nel liquido passano correnti di densità

$$j_y = \sigma \left(E_y - \frac{v}{c} \mathfrak{H} \right).$$

Ma la corrente totale attraverso la sezione del liquido deve essere nulla; infatti, poiché al tempo stesso $j_y = (c/4\pi)(\operatorname{rot} \mathbf{H})_y$, allora

$$\int_{-a}^{a} j_y\, dz = \frac{c}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\partial H_x}{\partial z}\, dz = \frac{c}{4\pi} [H_x(a) - H_x(-a)] = 0$$

Perciò abbiamo

$$\int_{-a}^{a} j_y\, dz = 2a\sigma E_y - \frac{\sigma}{c}\, \mathfrak{H} \int_{-a}^{a} v\, dz = 0$$

di qui

$$E_y = \frac{\bar{v}}{c}\, \mathfrak{H}. \tag{67,8}$$

§ 68. *Configurazioni di equilibrio*

L'equilibrio di un fluido perfettamente conduttore (per fissare le idee, parleremo qui di un plasma) che è a riposo nel campo magnetico costante si descrive mediante le equazioni

$$\nabla P = \frac{1}{c}\,[\mathbf{jH}], \tag{68,1}$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}, \tag{68,2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \tag{68,3}$$

La prima di esse è l'equazione (65,4) nella quale è posto $\mathbf{v} = 0$ e introdotta, per maggiore evidenza, la densità di corrente elettrica legata al campo magnetico mediante l'equazione di Maxwell (68,2). Nel presente paragrafo studieremo alcune proprietà generali delle configurazioni di equilibrio che sono conseguenza delle equazioni scritte a prescindere da questioni complicate e molto diverse sulla loro stabilità [1]).

Moltiplicando scalarmente l'equazione (68,1) per $\mathbf{H}$ o per $\mathbf{j}$ troviamo che

$$(\mathbf{H}\nabla)P = 0, \quad (\mathbf{j}\nabla)\,P = 0 \tag{68,4}$$

cioè che sono nulle le derivate della pressione lungo le linee magnetiche di forza e lungo le linee di corrente. In altre parole, le une e le altre giacciono sulle superficie

$$P\,(x, y, z) = \text{costante}; \tag{68,5}$$

---

[1]) Risultati principali inerenti a questa questione (nei limiti dell'idrodinamica magnetica) si possono trovare nell'articolo di *B.B. Kadomtsev* « Stabilità idromagnetica del plasma » nel libro « Questioni della teoria del plasma », edizione russa, Mosca, 1963.

esse si chiamano *superficie magnetiche*. In linea di massima ciascuna superficie magnetica potrebbe essere frontiera della configurazione di equilibrio [1]).

Le equazioni di equilibrio (68,1-2) si possono rappresentare anche nella forma

$$\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}=0, \quad \Pi_{ik}=P\delta_{ik}-\frac{1}{4\pi}\left(H_iH_k-\frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right), \tag{68,6}$$

se si parte dall'equazione di moto riscritta nella forma delle equazioni di conservazione dell'impulso (65,7-8). Moltiplicando queste equazioni per x_k integriamole rispetto a un volume delimitato da una superficie chiusa. Trasformando l'integrale in parti e osservando che $\partial x_k/\partial x_i = \delta_{ik}$, otteniamo [2])

$$\int \Pi_{ii}\, dV = \oint \Pi_{ik} x_k\, df_i. \tag{68,7}$$

Dopo la sostituzione dell'espressione di Π_{ik} dalla (68,6) questa uguaglianza assume la forma

$$\int \left(3P+\frac{H^2}{8\pi}\right) dV = \oint \left\{\left(P+\frac{H^2}{8\pi}\right)\mathbf{r}-\frac{(\mathbf{Hr})\,\mathbf{H}}{4\pi}\right\} d\mathbf{f} \tag{68,8}$$

(*S. Chandrasekhar*, *E. Fermi*, 1953).

Supponiamo che il plasma occupi un volume finito all'esterno del quale la pressione $P = 0$, e che al suo esterno non esistano sorgenti del campo (conduttori rigidi con corrente). Allora lontano dal plasma il campo decresce come $1/r^3$, e se si integra rispetto a tutto la spazio l'integrale di superficie si annulla. Ma l'integrale della grandezza $3P + H^2/8\pi$ positiva a priori non può essere nullo. Ne segue l'impossibilità di esistenza di una configurazione di equilibrio limitata nello spazio che non sia mantenuta dal campo magnetico alimentato da sorgenti esterne; se queste sorgenti esistono il secondo membro dell'uguaglianza (68,8) si riduce all'integrale di loro superficie e la condizione, in principio, può essere soddisfatta (*V.D. Šafranov*, 1957).

Consideriamo una configurazione illimitata elementare, ossia una *stringa di plasma* (o *pinch plasmico* [3])) cilindrica e infinitamente lunga omogenea per tutta la sua estensione; nel sistema di coordinate cilindriche r, φ, z con l'asse z diretto lungo l'asse della stringa tutte le grandezze in essa dipendono esclusivamente dalla sola coordinata radiale r. La componente radiale H_r deve essere nulla; in caso contrario, in virtù dell'equazione

---

[1]) La pressione P è determinata dalle equazioni (68,1-2) soltanto a meno di una costante additiva qualsiasi. Perciò ciascuna delle superficie magnetiche può essere la superficie $P = 0$.

[2]) Questa deduzione è simile a quella del teorema del viriale; cfr. II § 34.

[3]) Dall'inglese to pinch — stringere.

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_r) = 0, \qquad H_r = \frac{\text{cost}}{r}$$

essa diventerebbe infinita per $r \to 0$. Lo stesso si riferisce a j_r in virtù dell'equazione div $\mathbf{j} = 0$ che deriva automaticamente dalla (68,2).

L'uguaglianza (68,2) scritta per componenti dà

$$j_\varphi = -\frac{c}{4\pi}\frac{dH_z}{dr}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi).$$

Dalla seconda di queste formule abbiamo

$$H_\varphi = \frac{2J(r)}{cr}, \quad J(r) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r\, dr. \tag{68,9}$$

Dopo questa trasformazione l'equazione (68,1) assume la forma

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{1}{2\pi c^2 r^2}\frac{dJ^2(r)}{dr} + \frac{1}{8\pi}\frac{dH_z^2}{dr}. \tag{68,10}$$

Qui sono possibili due casi particolari essenzialmente distinti. In uno di essi (detto *pinchz*) $H_z = 0$ e $j_\varphi = 0$. Moltiplicando l'equazione (68,10) per r^2 e integrandola rispetto a r da 0 al raggio della stringa a (con la condizione di frontiera $P(a) = 0$), otteniamo una condizione di equilibrio sotto la forma

$$\int_0^a P(r) \cdot 2\pi r\, dr = \frac{J^2(a)}{2c^2}, \tag{68,11}$$

con $J(a)$ come corrente totale lungo la stringa (*W. Bennett*, 1934). Il mantenimento della configurazione d'equilibrio è realizzato, in questo caso, dal campo della corrente longitudinale.

Nell'altro caso (*pinch teta* [1]) $H_\varphi = 0$ e $j_z = 0$. Allora dalla (68,10) ricaviamo

$$P + \frac{H_z^2}{8\pi} = \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} \tag{68,12}$$

con $\mathfrak{H}$ il campo magnetico longitudinale lungo la stringa. Il mantenimento del plasma si realizza qui dal campo longitudinale esterno.

In una configurazione a simmetria assiale limitata arbitrariamente nello spazio le componenti radiali H_r e j_r possono essere non nulle (nella configurazione toroidale). Inoltre, tutte le grandezze possono dipendere ora non soltanto da r ma anche da z.

---

[1]) Il nome provviene dall'angolo in coordinate cilindriche che spesso si denota con la lettera θ.

Le equazioni (68,1-3) scritte per componenti assumono la forma

$$j_\varphi H_z - j_z H_\varphi = c\frac{\partial P}{\partial r}, \quad j_r H_\varphi - j_\varphi H_r = c\frac{\partial P}{\partial z}, \quad j_z H_r = j_r H_z, \tag{68,13}$$

$$j_r = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi), \quad j_\varphi = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right), \tag{68,14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \tag{68,15}$$

La conseguenza immediata (già dalla scrittura vettoriale della (68,1)) di queste equazioni è la seguente: se la densità di corrente è distribuita *in modo azimutale* ($j_r = j_z = 0$, $j_\varphi \neq 0$) il campo magnetico è diretto lungo il *meridiano* ($H_\varphi = 0$). Se, invece, il campo è azimutale si può accettare una proposizione più forte: la densità di corrente è distribuita non soltanto lungo il meridiano magnetico, ma anche tutta la configurazione d'equilibrio non può essere altro che del tipo pinch z ($j_r = 0$, H_φ e j_z sono indipendenti da z); ciò si prova facilmente escludendo P dalle prime due equazioni (68,13) e usando in seguito le equazioni restanti.

Il sistema di equazioni (68,13-15) può essere ridotto a una sola equazione (*V. D. Safranov*, 1957; *H. Grad*, 1958).

A tale scopo introduciamo le grandezze

$$\psi(r, z) = \int_0^r H_z \cdot 2\pi r\, dr, \quad J(r, z) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r\, dr \tag{68,16}$$

ossia il flusso magnetico e la corrente totale attraverso un cerchio del raggio $\mathbf{r}$ perpendicolare all'asse z. Da queste definizioni e dalle equazioni div $\mathbf{H} = 0$ e div $\mathbf{j} = 0$ troviamo le componenti meridiane del campo e della densità di corrente:

$$\begin{gathered} H_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \\ j_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial r}. \end{gathered} \tag{68,17}$$

Queste espressioni mostrano che i gradienti di ψ e J sono ortogonali alla linea magnetica di forza e alla linea di corrente, rispettivamente. Ricordando quanto detto all'inizio del paragrafo delle superficie (68,5), ne deduciamo che le grandezze ψ e J sono costanti sulle superficie magnetiche e, quindi, ogni coppia delle grandezze ψ, J, P può essere espressa in funzione della terza. In particolare,

$$P = P(\psi), \quad J = J(\psi). \tag{68,18}$$

Le componenti azimutali del campo e della corrente si esprimono in funzione di ψ e J mediante le equazioni (68,14):

$$H_\varphi = \frac{2J}{cr}, \quad j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right). \qquad (68,19)$$

Infine, sostituendo le espressioni ottenute nella prima delle equazioni (68,13) troviamo l'equazione cercata

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2 \frac{dP}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi}. \qquad (68,20)$$

Assegnando una dipendenza concreta (ma considerata in modo arbitrario) $P(\psi)$ e $J(\psi)$ e risolvendo questa equazione, otteniamo una configurazione d'equilibrio in principio possibile; la distribuzione del campo e delle correnti in essa è determinata dalle formule (68,17) e (68,19), mentre le superficie magnetiche sono date dalle uguaglianze $\psi(r, z) =$ costante.

A titolo di illustrazione consideriamo l'espressione

$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{1}{2}(bR^2 + r^2)z^2 + \frac{a-1}{8}(r^2 - R^2)^2, \qquad (68,21)$$

che è soluzione dell'equazione (68,20) per $dP/d\psi =$ costante e $dJ^2/d\psi =$ costante; ψ_0, a, b, R sono costanti e, inoltre,

$$16\pi^3 \frac{dP}{d\psi} = -a\psi_0, \quad \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi} = -bR^2\psi_0.$$

Questa soluzione descrive una configurazione toroidale composta di due superficie magnetiche toroidali $\psi =$ costante incluse l'una nell'altra; ciascuna di esse può essere accettata come frontiera del plasma, $P = 0$. La superficie più interna degenera in una linea, ossia circonferenza $r = R$, $z = 0$ (questa linea si chiama *asse magnetico*). In prossimità dell'asse magnetico

$$\frac{\psi}{\psi_0} \approx \frac{1}{2}R^2(b+1)z^2 + \frac{1}{2}R^2(a-1)(r-R)^2.$$

Così, se $b + 1 > 0$, $a > 1$, le sezioni delle superficie magnetiche in prossimità dell'asse sono delle ellissi. All'allontanarsi dall'asse ψ cresce e la pressione cade. All'esterno della superficie con $P = 0$ (frontiera del plasma) il campo magnetico necessario per il mantenimento dell'equilibrio è determinato dall'equazione (68,20) con il secondo membro nullo e con le condizioni sulla frontiera di continuità della funzione ψ e della sua derivata normale.

§ 69. *Onde magnetoidrodinamiche*

Consideriamo la propagazione di piccole perturbazioni in un mezzo conduttore omogeneo sito nel campo magnetico uniforme costante $\mathbf{H}_0$. In questo caso supporremo il fluido come perfetto, trascurando cioè tutti i processi dissipativi in esso [1]).

Partiamo dal sistema di equazioni magnetoidrodinamiche (65,1-4). L'equazione di adiabaticità (65,6) non significa altro che se il mezzo imperturbato è omogeneo si avrà anche nel mezzo perturbato s = costante, cioè che il moto è isoentropico.

Poniamo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P',$$

ove con l'indice 0 indichiamo valori d'equilibrio delle grandezze mentre $\mathbf{h}$, ρ', P' ne sono piccole variazioni nell'onda. È piccola dello stesso ordine anche la velocità $\mathbf{v}$ nulla in equilibrio. In virtù dell'isoentropicità del moto le variazioni della densità e della pressione sono connesse mutuamente mediante l'uguaglianza

$$P' = u_0^2 \rho'$$

ove $u_0^2 = (\partial P/\partial \rho)_s$ è il quadrato dell'ordinaria velocità del suono nel mezzo considerato. Trascurando nelle equazioni (65,1-4) i termini infinitesimi di ordine superiore al primo, otteniamo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{vh}], \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{u_0^2}{\rho} \nabla \rho' - \frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{h}]. \end{gathered} \tag{69,1}$$

Qui e più avanti, per brevità, l'indice 0 per i valori d'equilibrio è omesso.

Cerchiamo la soluzione di queste equazioni nella forma dell'onda piana $\backsim e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$. Allora il sistema (69,1) si riduce al sistema di equazioni algebriche

$$\begin{gathered} -\omega \mathbf{h} = [\mathbf{k}[\mathbf{vH}]], \quad \omega \rho' = \rho \mathbf{kv}, \\ -\omega \mathbf{v} + \frac{u_0^2}{\rho} \rho' \mathbf{k} = -\frac{1}{4\pi\rho} [\mathbf{H}[\mathbf{kh}]] \end{gathered} \tag{69,2}$$

(l'uguaglianza $\mathbf{kh} = 0$ derivante da $\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$ si verifica automaticamente e la si può non considerare separatamente).

La prima delle equazioni (69,2) mostra che il vettore $\mathbf{h}$ è perpendicolare al vettore d'onda la cui direzione consideriamo come l'asse

[1]) La condizione di ammissibilità di tale trascurazione sta nel valore piccolo di smorzamento delle onde che è stato calcolato nel problema di questo paragrafo.

x. Il piano passante per **k** e **H** consideriamo come il piano xy. Inoltre, introduciamo la velocità di fase dell'onda $u = \omega/k$. Escludendo ρ' dalla terza equazione mediante la seconda e riscrivendo le equazioni per componenti, otteniamo il sistema seguente:

$$uh_z = -v_z H_x, \quad uv_z = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_z, \tag{69,3}$$

$$\begin{gathered} uh_y = v_x H_y - v_y H_x, \quad uv_y = -\frac{H_x}{4\pi\rho} h_y, \\ \left(u - \frac{u_0^2}{u}\right) v_x = \frac{H_y}{4\pi\rho} h_y. \end{gathered} \tag{69,4}$$

Qui abbiamo diviso le equazioni in due gruppi dei quali il primo contiene le sole variabili h_z, v_z e il secondo le sole h_y, v_x, v_y. Ne segue che le perturbazioni di questi gruppi delle variabili si propagano indipendentemente le une dalle altre. Quanto alle perturbazioni della densità (e con essa della pressione), esse si propagano assieme alle perturbazioni h_y, v_x, v_y essendo legate con v_x dalla relazione

$$\rho' = \frac{\rho}{u} v_x. \tag{69,5}$$

La condizione di compatibilità delle due equazioni (69,3) dà

$$u = \frac{|H_x|}{\sqrt{4\pi\rho}} \equiv u_A \tag{69,6}$$

(più avanti supponiamo che $H_x > 0$ e omettiamo il segno del modulo). In queste onde è soggetta ad oscillazioni la componente h_z del campo magnetico, perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda e alla direzione del campo costante **H**. Con h_z oscilla la velocità v_z legata con h_z mediante

$$v_z = -\frac{h_z}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{69,7}$$

Il legame tra ω e **k** (*legge di dispersione*) dato dalla formula (69,6) dipende notevolmente dalla direzione del vettore d'onda

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{Hk}. \tag{69,8}$$

La velocità fisica di propagazione delle onde è rappresentata dalla derivata $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$ che è la velocità di gruppo. In questo caso essa vale

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{H}}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{69,9}$$

e non dipende dalla direzione **k**; la direzione di propagazione dell'onda intesa come direzione della sua velocità di gruppo coincide con la direzione del campo **H**. Queste onde si chiamano *onde di Alfvén* (*H. Alfvén*, 1942), e la velocità (69,6) si dice *velocità di Alfvén*.

Consideriamo le onde descritte dalle equazioni (69,4) che portano il nome di onde *magnetoacustiche*. Costruendo il determinante delle equazioni (69,4) ed uguagliandolo a zero, otteniamo un'equazione quadratica rispetto a u^2 le cui radici sono

$$u_{\mathrm{r.l}}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2\right)^2 - \frac{H_x^2}{\pi\rho} u_0^2\right]^{1/2}\right\}. \quad (69,10)$$

Abbiamo ottenuto così altri due tipi di onde; le onde corrispondenti al segno + o — nella formula (69,10) si chiamano onde *magnetoacustiche rapide* o *lente*, rispettivamente.

Nel caso limite in cui $H^2 \ll 4\pi\rho u_0^2$, abbiamo $u_{\mathrm{r}} \approx u_0$ e dalle equazioni (69,4) segue che $v_y \ll v_x$. In altre parole, le onde magnetoacustiche rapide nel limite si trasformano in onde acustiche ordinarie propagantisi con velocità u_0. Il campo trasversale debole nell'onda è legato con v_x mediante

$$h_y \approx v_x H_y / u_0.$$

Nello stesso caso limite la velocità dell'onda magnetoacustica lenta coincide con la velocità di Alfvén u_{A}. Inoltre,

$$v_x \approx 0, \quad v_y \approx -h_y/\sqrt{4\pi\rho},$$

come nell'onda del primo tipo ma con altra polarizzazione: i vettori **v** e **h** giacciono nel piano passante per **k** e **H** e non perpendicolarmente ad esso.

Nel liquido incompressibile (cui corrisponde formalmente il passaggio limite $u_0 \to \infty$) non resta altro che un solo tipo di onde, ossia quelle di Alfvén con due direzioni indipendenti della polarizzazione. La legge della dispersione per queste onde è data dalla formula (69,8), mentre i vettori **v** e **h** sono perpendicolari al vettore d'onda e legati mediante la relazione

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (69,11)$$

Il fatto che in presenza del campo magnetico longitudinale le traslazioni trasversali del liquido si propagano in esso sotto forma di onde può essere interpretato nel modo intuitivo seguente. Essendo « congelate » le linee di forza, la traslazione trasversale delle particelle del liquido ne implica un incurvamento e, quindi, la divaricazione o in alcune zone l'addensamento. Ma il carattere delle forze agenti nel campo magnetico (espresse dal tensore degli sforzi di Maxwell) è tale come se le linee magnetiche di forza tendessero a stringersi e al tempo stesso a respingersi reciprocamente [1]). Perciò per

[1]) Supponiamo infatti che la linea di forza coincida con l'asse z. Allora l'intensità longitudinale Π_{zz} (65,8) contiene il termine negativo $-H^2/8\pi$ e le intensità trasversali Π_{xx}, Π_{yy} il termine positivo $H^2/8\pi$.

loro incurvarsi compaiono forze quasi-elastiche tendenti a raddrizzarle di nuovo, ciò che implica oscillazioni.

Torniamo di nuovo alle formule (69,4) e (69,10) e consideriamo il caso limite inverso in cui $H^2 \gg 4\pi\rho u_0^2$. Per u_r, abbiamo allora nella prima approssimazione

$$u_r = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Poiché questa espressione è indipendente da **k** la velocità di gruppo coincide in modulo con u_r ed è diretta lungo **k**. Il vettore **v** in questa onda è perpendicolare a **H** (fig. 40) e il suo valore assoluto è legato con $h = |h_y|$ mediante

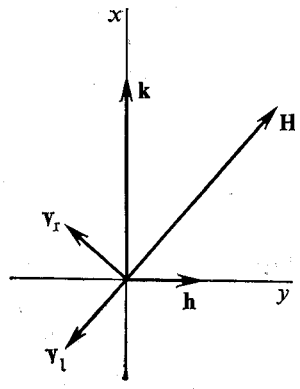


Fig. 40

$$v = \frac{h}{\sqrt{4\pi\rho}}.$$

Per u_l abbiamo in questo caso

$$u_l = u_0 \frac{H_x}{H}.$$

Allora la velocità di gruppo è

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = u_0 \frac{\mathbf{H}}{H}.$$

Il vettore **v** in questa onda è antiparallelo a **H** e per grandezza legato con h mediante

$$v = h \frac{H^2}{4\pi\rho u_0 H_y}.$$

Per relazione qualsiasi tra H^2 e ρu_0^2 sia u_r, che u_l dipendono dalla direzione del vettore d'onda. All'aumentare dell'angolo compreso tra **k** e **H** la grandezza u_r cresce monotonamente e quella u_l decresce monotonamente. Si vede facilmente che sempre si verificano le disuguaglianze

$$u_l \leqslant u_A \leqslant u_r, \quad u_r \geqslant u_0, \quad u_l \leqslant u_0. \tag{69,12}$$

Se $\mathbf{k} \parallel \mathbf{H}$, allora u_r e u_l sono uguali rispettivamente alla più grande o alla più piccola delle grandezze u_0 e $u_A = H\sqrt{4\pi\rho}$. Se, invece, $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, allora abbiamo

$$u_r = \sqrt{u_0^2 + H^2/4\pi\rho}, \tag{69,13}$$

mentre u_A e u_l si annullano, vale a dire che restano le sole onde magnetoacustiche rapide.

Infine, consideriamo due soluzioni esatte delle equazioni magnetoidrodinamiche nella forma di un'onda piana di ampiezza qualsiasi (non necessariamente piccola).

Una di queste soluzioni è l'onda piana di Alfvén nel fluido incompressibile propagantesi con velocità u_A, vale a dire che essa è funzione di x e t nella sola combinazione $x - u_A t$. Torniamo infatti alle equazioni esatte (65,1-4). L'equazione di continuità (65,3) nel liquido incompressibile si riduce a div $\mathbf{v} = 0$ e di qui $v_x =$ costante; senza perdere di generalità, si può porre $v_x = 0$, ciò che si ottiene con una scelta appropriata del sistema di coordinate. Dall'equazione div $\mathbf{H} = 0$ segue che $H_x =$ costante. Indicando con $\mathbf{h}$ le componenti trasversali di $\mathbf{H}$ dalle equazioni (65,2) e (65,4) otteniamo

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x},$$

vale a dire che le equazioni esatte si riducono automaticamente alle equazioni lineari descriventi l'onda piana con la velocità di fase (69,6) ove $\mathbf{h}$ e $\mathbf{v}$ sono legati dalla relazione (69,11); il profilo dell'onda, cioè la dipendenza $\mathbf{h}(x - u_A t)$, è arbitrario. La componente x dell'equazione (65,4) dà

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{h} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} = 0$$

da cui

$$P + \frac{h^2}{8\pi} = \text{cost} \tag{69,14}$$

ciò che determina l'andamento della variazione della pressione nell'onda.

Un altro caso è rappresentato da un'onda semplice propagantesi perpendicolarmente al campo magnetico (*S.A. Kaplan, K.P. Stanjukovič*, 1954). Supponiamo che il campo sia diretto lungo l'asse y e che l'asse x coincida, come sempre, con la direzione di propagazione dell'onda. Allora $H_x = 0$, $H_y = H$ e l'equazione div $\mathbf{H} = 0$ è soddisfatta automaticamente. Le equazioni (65,2-4) in questo caso danno

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (v_x H)}{\partial x} = 0, \tag{69,15}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v_x \rho)}{\partial x} = 0, \tag{69,16}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{69,17}$$

Dalle prime due equazioni segue, come è facile provare, che il rapporto $H/\rho = b$ verifica l'equazione

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} = 0$$

o $db/dt = 0$ ove la derivata totale significa la variazione della grandezza per spostarsi di un elemento di fluido in esame. Ne deriva quanto segue: se all'istante iniziale il fluido era omogeneo in modo che b era costante in esso, anche nel seguito sarà $b =$ costante. Sostituendo $H = \rho b$ nella terza equazione, otteniamo

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2 \right). \qquad (69,18)$$

In tal modo, il campo magnetico si esclude dalle equazioni e il problema si riduce alla risoluzione delle equazioni (69,16) e (69,18). Ma queste equazioni differiscono da quelle descriventi il moto unidimensionale in idrodinamica ordinaria per il solo cambiamento dell'equazione di stato del gas: al posto dell'equazione autentica $P = P(\rho)$ (per entropia s assegnata) si deve ricorrere all'equazione

$$P^*(\rho) = P(\rho) + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2.$$

Questa circostanza consente di estendere al caso del moto magnetoidrodinamico considerato tutti i risultati dell'idrodinamica ordinaria. In particolare, in questo caso si verificano le formule della soluzione esatta per le onde progressive unidimensionali (la soluzione di Riemann è data dalle onde semplici; cfr. VI § 94) ove da velocità del suono in esse fungerà

$$u^* = \left(\frac{\partial P^*}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \sqrt{u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi} \rho} = \sqrt{u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}}$$

in accordo con la formula (69,13).

Problema

Trovare il coefficiente di assorbimento dell'onda di Alfvén (supponendolo piccolo) di un liquido incompressibile.

Soluzione. Il coefficiente di assorbimento dell'onda è definito come

$$\gamma = \overline{Q}/2\overline{q},$$

con $\overline{Q}$ l'energia media (rispetto al tempo) dissipata in un secondo in 1 cm³ e $\overline{q}$ la densità media del flusso di energia nell'onda; l'ampiezza dell'onda decresce a misura della propagazione proporzionalmente a $e^{-\gamma x}$. La dissipazione di Q è data dal secondo membro dell'equazione (66,3); nel fluido incompressibile per l'onda propagantesi lungo l'asse x (per cui $v_x = 0$) abbiamo

$$Q = \eta \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \right)^2 + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} \right)^2.$$

Nella densità del flusso di energia (66,5) omettiamo piccoli termini dissipativi e abbiamo

$$q_x = -\frac{1}{4\pi} H_x \mathbf{hv}.$$

Usando le formule (69,6) e (69,11), come risultato otteniamo

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2u_A^3}\left(\frac{\eta}{\rho} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right).$$

§ 70. *Condizioni nei punti di discontinuità*

Come in idrodinamica ordinaria, le equazioni di moto del mezzo magnetoidrodinamico perfetto ammettono correnti discontinue.

Per trovare le condizioni che devono essere soddisfatte sulla superficie di discontinuità, consideriamo un elemento di questa superficie e ricorriamo al sistema di coordinate animato dal moto assieme a questo elemento [1]).

Prima di tutto, sulla superficie di discontinuità deve essere continuo il flusso della sostanza: la quantità di gas che entra da un lato della superficie considerata deve essere uguale alla quantità che esce dall'altro lato. Ciò vuol dire che

$$\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n},$$

ove gli indici 1 e 2 si riferiscono ai due lati della discontinuità e l'indice n esprime la componente normale del vettore alla superficie. Nel seguito metteremo la differenza di valori di una grandezza qualunque dai due lati della superficie di discontinuità tra parentesi graffe. In tal modo,

$$\{\rho v_n\} = 0.$$

Inoltre, deve essere continuo il flusso di energia. Ricorrendo all'espressione (65,11) otteniamo

$$\{q_n\} = \left\{ \rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + w\right) + \frac{1}{4\pi}\left[v_n H^2 - H_n (\mathbf{vH})\right] \right\} = 0.$$

Il flusso dell'impulso anch'esso deve essere continuo. Questa condizione significa che $\{\Pi_{ik} n_k\} = 0$, ove Π_{ik} è il tensore di densità del flusso dell'impulso e $\mathbf{n}$ il vettore unitario della normale alla superficie. Di qui ricaviamo mediante la (65,8) le seguenti equazioni:

$$\left\{ P + \rho v_n^2 + \frac{1}{8\pi}(\mathbf{H}_t^2 - H_n^2) \right\} = 0,$$

$$\left\{ \rho v_n \mathbf{v}_t - \frac{1}{4\pi} H_n \mathbf{H}_t \right\} = 0$$

[1]) Con questa condizione il sistema di coordinate è fissato soltanto rispetto alla sua velocità nella direzione normale alla superficie. Alla sua velocità tangente deve essere aggiunto anche un vettore costante qualsiasi.

ove con l'indice t sono denotate le componenti dei vettori tangenziali alla superficie.

Infine, sono continue la componente normale del campo magnetico e la componente tangenziale del campo elettrico. Per la conducibilità infinita del mezzo il campo elettrico di induzione è $\mathbf{E} = -[\mathbf{vH}]/c$. Perciò la condizione $\{\mathbf{E}_t\} = 0$ dà

$$\{H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n\} = 0.$$

Nel seguito sarà più comodo usare al posto della densità di gas il suo volume specifico $V = 1/\rho$. La densità del flusso di massa attraverso la discontinuità indichiamo con j:

$$j = \rho v_n = \frac{v_n}{V}. \tag{70,1}$$

Tenendo conto della continuità di j e H_n, le altre condizioni di frontiera si possono scrivere nella seguente forma:

$$j\left\{w + \frac{j^2V^2}{2} + \frac{\mathbf{v}_t^2}{2} + \frac{V\mathbf{H}_t^2}{4\pi}\right\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t\mathbf{v}_t\}, \tag{70,2}$$

$$\{P\} + j^2\{V\} + \frac{1}{8\pi}\{\mathbf{H}_t^2\} = 0, \tag{70,3}$$

$$j\{\mathbf{v}_t\} = \frac{H_n}{4\pi}\{\mathbf{H}_t\}, \tag{70,4}$$

$$H_n\{\mathbf{v}_t\} = j\{V\mathbf{H}_t\}. \tag{70.5}$$

Questo è il sistema fondamentale di equazioni descriventi le discontinuità nell'idrodinamica magnetica.

§ 71. *Discontinuità tangenziali e rotatorie*

In idrodinamica ordinaria sono possibili, come è noto, delle discontinuità di due tipi distinti: onde d'urto e discontinuità tangenziali. L'origine di questi due tipi di discontinuità è legata matematicamente al fatto che alcune delle condizioni di frontiera risulta possibile rappresentare nella forma dell'uguaglianza a zero del prodotto di due fattori; uguagliando a zero ciascuno dei fattori separatamente otteniamo due soluzioni indipendenti.

Nell'idrodinamica magnetica, invece, le equazioni (70,2-5) non hanno questa forma e, quindi, si potrebbe pensare che esista un solo tipo di discontinuità riferito a tutti i casi particolari possibili. In effetti, tuttavia, risulta che anche qui esistono tipi distinti di discontinuità che non si riducono gli uni agli altri (*F. Hoffmann, E. Teller*, 1950).

Consideriamo soprattutto delle discontinuità tali in cui $j = 0$. Ciò vuol dire che $v_{1n} = v_{2n} = 0$, cioè che il fluido si muove parallelamente alla superficie di discontinuità. Se in questo caso $H_n \neq 0$, dalle equazioni (70,2-5) si vede che devono essere continui il campo magnetico, la velocità e la pressione. A un salto qualsiasi può essere soggetta la densità (e anche entropia, temperatura ecc.). Questa discontinuità che si potrebbe chiamare *di contatto* non rappresenta altro che la superficie di separazione tra due mezzi immobili con densità e temperature distinte.

Se per $j = 0$ anche $H_n = 0$, allora delle quattro equazioni (70,2-5) tre sono soddisfatte immediatamente; di qui risulta già con chiarezza che questo è un caso singolare. Troviamo così un tipo di discontinuità che si potrebbero chiamare discontinuità *tangenziali*, come in idrodinamica ordinaria. Su questa discontinuità la velocità e il campo magnetico sono tangenti alla sua superficie e soggetti a salti arbitrari per grandezza e direzione:

$$j = 0, \quad H_n = 0, \quad \{\mathbf{v}_t\} \neq 0, \quad \{\mathbf{H}_t\} \neq 0. \tag{71,1}$$

È arbitrario anche il salto della densità, mentre il salto della pressione è legato a quello di $\mathbf{H}_t$ mediante l'equazione (70,3):

$$\{V\} \neq 0, \quad \left\{P + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi}\right\} = 0. \tag{71,2}$$

Quanto ai salti delle altre grandezze termodinamiche (entropia, temperatura ecc.), essi vanno determinati sulla base dei salti di V e P mediante l'equazione di stato del gas.

Un altro tipo è rappresentato dalle discontinuità in cui la densità del gas non è soggetta a salti. Essendo continuo il flusso $j = v_n/V$ per mancanza di salti della densità risulta che sarà continua anche la componente normale della velocità:

$$j \neq 0, \quad \{V\} = 0, \quad \{v_n\} = 0. \tag{71,3}$$

In seguito, a secondo membro dell'equazione (70,5) portiamo V fuori dalle parentesi graffe e, dividendo termine a termine le equazioni (70,5) e (70,4) l'una per l'altra otteniamo

$$j = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi V}}. \tag{71,4}$$

Dopo questa operazione l'equazione (70,4) o (70,5) dà

$$\{\mathbf{v}_t\} = \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\,\{\mathbf{H}_t\}. \tag{71,5}$$

Nell'equazione (70,2) scriviamo $w = \varepsilon + PV$; tenendo conto della continuità di V, sostituendo H_n secondo la (71,4) e raggruppando i termini, riscriviamo questa equazione nella forma

$$j\{\varepsilon\} + jV\left\{P + \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}_t^2\right\} + \frac{j}{2}\left\{\left(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\,\mathbf{H}_t\right)^2\right\} = 0.$$

Il secondo termine qui si annulla in virtù dell'uguaglianza (70,3) e il terzo in virtù della (71,5), cosicché resta $\{\varepsilon\} = 0$, vale a dire che accanto alla densità l'energia interna anch'essa è continua. Ma ogni altra grandezza termodinamica è definibile univocamente mediante l'assegnazione di due grandezze: ε e V. Perciò sono continue tutte le altre grandezze termodinamiche, la pressione compresa. Allora dall'equazione (70,3) deriva che è continuo anche il quadrato H_t^2, cioè il valore assoluto del vettore $\mathbf{H}_t$:

$$\{P\} = 0, \quad \{H_t\} = 0. \tag{71,6}$$

La continuità contemporanea di H_t e H_n significa che restano invariati anche il valore assoluto del vettore $\mathbf{H}$ e l'angolo formato da esso con la normale alla superficie.

Le formule (71,3-6) definiscono tutte le proprietà delle discontinuità in questione. Su quest'ultime sono continue le grandezze termodinamiche del gas e il campo magnetico ruota attorno alla direzione della normale restando invariato in valore assoluto. Assieme al vettore $\mathbf{H}_t$ è soggetta a un salto la componente tangenziale della velocità (in accordo con la formula (71,5)), mentre la componente normale della velocità $v_n = jV$ è continua e vale

$$v_n = H_n\sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \frac{H_n}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{71,7}$$

Le discontinuità di questo tipo si dicono *rotatorie* o *discontinuità di Alfvén*.

Osserviamo che mediante un sistema di coordinate appropriato sempre è possibile ottenere che dai due lati della superficie di discontinuità rotatoria la velocità del gas sia parallela al campo. A tale scopo è sufficiente passare a un nuovo sistema di coordinate (cfr. la nota alla pag. 351) in moto rispetto a quello iniziale con una velocità uguale a

$$\mathbf{v}_{1t} - \mathbf{H}_{1t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}} = \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{H}_{2t}\sqrt{\frac{V}{4\pi}}.$$

In questo nuovo sistema di coordinate dai due lati della discontinuità i rapporti tra tutti e tre componenti di $\mathbf{v}$ e le componenti corrispondenti di $\mathbf{H}$ sono uguali, e cioè

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1\sqrt{\frac{V}{4\pi}}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2\sqrt{\frac{V}{4\pi}}. \tag{71,8}$$

In altre parole, la velocità ruota con il campo magnetico restando invariata di grandezza e di angolo formato da essa con la normale.

La velocità v_n considerata con il segno opposto è al tempo stesso la velocità con la quale la discontinuità si propaga rispetto al fluído. Essa coincide con la velocità di fase (u_A) delle onde di Alfvén. Ciò che questa coincidenza ha luogo per ogni discontinuità rotatoria è in certa misura casuale, ma per piccoli salti delle grandezze sulla discontinuità questa coincidenza è necessaria. Infatti, questa discontinuità rappresenta una debole perturbazione per cui la velocità **v** e il campo magnetico **H** acquisiscono piccoli incrementi perpendicolari al piano passante per **H** e la normale **n** alla superficie. Questa perturbazione si riferisce precisamente al tipo la cui velocità di fase è u_A. La proiezione della velocità di gruppo sulla normale alla superficie del fronte di piccola perturbazione, cioè sul vettore d'onda **k**, è la velocità fisica di propagazione di questa superficie del fronte. Ma per linearità del legame tra ω e **k** abbiamo

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\mathbf{k}=\omega$$

e perciò la proiezione indicata coincide con la velocità di fase $\omega/k = u_A$.

Sebbene le discontinuità tangenziali e rotatorie rappresentino tipi distinti di discontinuità, esistono delle discontinuità che godono contemporaneamente delle proprietà delle une e delle altre. Tali sono le discontinuità sulle quali **v** e **H** sono tangenziali e soltanto ruotano restando invariati in valore assoluto.

Come è noto, in idrodinamica ordinaria le discontinuità tangenziali sempre sono instabili rispetto a perturbazioni infinitesimali, ciò che ne implica smussamento rapido in zone turbolente. Il campo magnetico, invece, influisce da stabilizzatore sul moto del fluido conduttore perciò le discontinuità tangenziali in esso possono risultare stabili. Questa circostanza è conseguenza naturale del fatto che gli spostamenti trasversali (rispetto al campo) del liquido per perturbazione sono legati alla distensione delle linee magnetiche di forza « congelate » e, quindi, implicano la comparsa di forze che tendono a ristabilire il moto imperturbato.

Studiamo le condizioni di stabilità per la discontinuità tangenziale in un liquido incompressibile (*S.I. Syrovatskij*, 1953).

Scriviamo

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_{1,2}+\mathbf{v}',\quad P=P_{1,2}+P',\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_{1,2}+\mathbf{H}'$$

ove $\mathbf{v}_{1,2}$, $P_{1,2}$, $\mathbf{H}_{1,2}$ sono valori costanti (dai due lati della discontinuità) imperturbati delle grandezze, mentre $\mathbf{v}'$, P', $\mathbf{H}'$ ne sono picco-

le perturbazioni. Sostituendole nelle equazioni (66,7-9) otteniamo per il liquido perfetto:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0, \tag{71,9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{v}' - (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{u}', \tag{71,10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla P' - [\mathbf{u}\operatorname{rot}\mathbf{u}'] =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\nabla(P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}') + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}'; \tag{71,11}$$

per brevità, qui e più avanti omettiamo gli indici 1, 2 e introduciamo la notazione $\mathbf{u} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi\rho}$. Applicando all'equazione (71,11) l'operazione div e tenendo conto della (71,9), otteniamo

$$\Delta\,(P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}') = 0. \tag{71,12}$$

Sia $x = 0$ il piano di discontinuità; i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ gli sono paralleli. In ciascuno dei semispazi $x > 0$ e $x < 0$ cerchiamo tutte le grandezze $\mathbf{v}'$, $\mathbf{u}'$, P' nella forma proporzionale a $\exp\{i\,(\mathbf{kr} - \omega t) + \varkappa x\}$, ove $\mathbf{k}$ è un vettore bidimensionale nel piano yz. Dall'equazione (71,12) ricaviamo $k^2 = \varkappa^2$ in modo che si deve porre $\varkappa = k$ sul lato $x < 0$ e $\varkappa = -k$ sul lato $x > 0$. In seguito, dalle componenti x delle equazioni (71,10-11) escludiamo v'_x e troviamo

$$P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}' = -u'_x\,\frac{i\rho}{\varkappa\,(\mathbf{ku})}\,[(\omega - \mathbf{kv})^2 - (\mathbf{ku})^2] \tag{71,13}$$

(il caso in cui l'espressio e tra parentesi quadre si annulli non presenta qui interesse poiché allora ω è reale e l'instabilità, invece, può essere legata a soli valori complessi di ω).

Sia $\zeta\,(x, y, z)$ lo spostarsi lungo l'asse x della superficie di discontinuità per perturbazione. Sulla superficie spostata devono essere soddisfatte le condizioni (71,1-2):

$$\left\{P + P' + \frac{\rho}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{u}')^2\right\} \approx \{P' + \rho\mathbf{u}\mathbf{u}'\} = 0,$$

$$u_{1n} + u'_{1n} \approx u'_{1x} - (\mathbf{u}_1\nabla)\,\zeta = 0,$$

$$u_{2n} + u'_{2n} \approx u'_{2x} - (\mathbf{u}_2\nabla)\,\zeta = 0$$

(la condizione dell'assenza del flusso di fluido attraverso la superficie di discontinuità si verifica in questo caso automaticamente). Ponendo

$$\zeta = \text{cost}\cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$$

e escludendo ζ, u_{1x}, u_{2x} dalle tre equazioni testé scritte, otteniamo un'equazione che determina valori possibili di ω:

$$(\omega - \mathbf{kv}_1)^2 + (\omega - \mathbf{kv}_2)^2 = (\mathbf{ku}_1)^2 + (\mathbf{ku}_2)^2$$

Questa equazione di secondo grado non ha radici complesse se

$$2\,(\mathbf{k}\mathbf{u}_1)^2 + 2\,(\mathbf{k}\mathbf{u}_2)^2\, u_{2k} - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 > 0$$

ossia

$$[2u_{1i}u_{1k} + 2u_{2i}u_{2k} - v_i v_k]\, k_i k_k > 0$$

ove $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ è il salto della velocità sulla discontinuità.

Questa forma quadratica è positiva se sono positivi la traccia e il determinante del tensore del secondo ordine tra parentesi quadre. Di qui si ricavano le condizioni di stabilità cercate [1]:

$$H_1^2 + H_2^2 > 2\pi\rho v^2, \quad [\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2]^2 \geqslant 2\pi\rho\,([\mathbf{H}_1\mathbf{v}]^2 + [\mathbf{H}_2\mathbf{v}]^2). \qquad (71,14)$$

In effetti, tuttavia, poiché il liquido ha piccole ma finite viscosità e resistenza elettrica la discontinuità tangenziale non resterà tale per un tempo illimitatamente lungo anche se le condizioni (71,14) sono soddisfatte. Sebbene la turbolenza in questo caso non compaia, al posto di una brusca discontinuità si ottiene una zona intermedia gradualmente allargantesi in cui la velocità e il campo magnetico variano in modo piano da un loro valore all'altro.

Ciò è facile provare sulla base delle equazioni di moto (66,8-9) conservando in esse i termini dissipativi. Consideriamo la normale alla discontinuità come l'asse x. Supponendo tutte le grandezze dipendenti dalla sola coordinata x (e, forse, dal tempo), scriviamo le componenti trasversali di queste equazioni:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{H}_t}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2} \qquad (71,15)$$

(il liquido è supposto incompressibile). Se il moto è supposto stazionario, i primi membri di queste equazioni si annullano. Ma allora l'unica soluzione che resta finita per $x \to \pm\infty$ è semplicemente $\mathbf{H}_t =$ costante e $\mathbf{v}_t =$ costante in contraddizione con l'ipotesi sull'esistenza di un salto dei valori di queste grandezze. Quindi, la discontinuità tangenziale non può avere larghezza stazionaria (come l'ha, ad esempio, un'onda d'urto debole). Le equazioni (71,15) hanno la forma delle equazioni della conduzione termica. Come è noto dalla teoria della conduzione termica, la discontinuità di una grandezza descritta da queste equazioni si smussa con il passare del tempo in una zona transitoria la cui larghezza cresce proporzionalmente alla radice quadrata del tempo. Essendo distinti i coefficienti nelle due equazioni (71,15), le larghezze δ_v e δ_H delle zone di variazione della velocità e del campo saranno diverse:

$$\delta_v \sim (\nu t)^{1/2}, \quad \delta_H \sim (c^2 t/\sigma)^{1/2}. \qquad (71,16)$$

[1]) Se le densità dei mezzi incompressibili dai due lati della discontinuità sono distinte, in queste condizioni ρ si sostituisce con $2\rho_1\rho_2/(\rho_1 + \rho_2)$.

Quanto alle discontinuità rotatorie, esse risultano stabili (nel liquido incompressibile) rispetto a perturbazioni infinitesime per quale che sia il valore del campo magnetico (*S.I. Syrovatskij*, 1953). Tuttavia, come le discontinuità tangenziali, anch'esse non possono avere larghezza stazionaria e si dilatano con il tempo sotto influsso della viscosità e della resistenza elettrica del mezzo (si veda il problema).

Problema

Stabilire la legge di dilatazione con il tempo della discontinuità rotatoria.

Soluzione. Supponendo tutte le grandezze dipendenti dalla sola coordinata x (e dal tempo), dalle equazioni div $\mathbf{v} = 0$ e div $\mathbf{H} = 0$ troviamo che $v_x =$ costante, $H_x =$ costante. Sia il sistema di coordinate considerato tale che i valori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{H}$ dai due lati della discontinuità (cioè lontano dallo strato transitorio) siano legati dalle relazioni (71,8); allora $v_x = u_x$ (con la stessa notazione $\mathbf{u}$ come nelle (71,9-11)). Dalle formule (66,8-9) per le componenti trasversali $\mathbf{u}_t$ e $\mathbf{v}_t$ ricaviamo le equazioni

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x}=u_x\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial x^2}\\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x}=u_x\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 \mathbf{v}_t}{\partial x^2}.\end{gathered} \tag{1}$$

Poiché per $x = \pm\infty$ la differenza $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ si annulla in virtù delle relazioni (71,8), all'interno dello strato transitorio essa è piccola rispetto alla somma $\mathbf{v}_t + \mathbf{u}_t$. Sommando le equazioni (1), possiamo perciò trascurare il termine contenente la differenza $\mathbf{v}_t - \mathbf{u}_t$ e otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{v}_t+\mathbf{u}_t)=\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+\nu\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{v}_t+\mathbf{u}_t).$$

Si vede di qui che la larghezza della discontinuità varia secondo la legge

$$\delta \sim \left[\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+\nu\right)t\right]^{1/2}.$$

§ 72. *Onde d'urto*

Passiamo all'altro tipo delle discontinuità nel quale

$$j \neq 0, \quad \{V\} \neq 0. \tag{72,1}$$

Queste discontinuità, come in idrodinamica ordinaria, si chiamano *onde d'urto*. Esse sono caratterizzate da un salto della densità e dal fatto che sono attraversate dal gas in moto (v_{n1} e v_{n2} sono non nulle). Quanto alla componente normale del campo magnetico, essa, in generale, è non nulla, ma in un caso particolare può essere anche $H_n = 0$.

Dal confronto delle equazioni (70,4) e (70, 5) si vede (per $H_n \neq 0$) che i vettori $\mathbf{H}_{t2} - \mathbf{H}_{t1}$ e $V_2\mathbf{H}_{t2} - V_1\mathbf{H}_{t1}$ sono paralleli al medesimo vettore $\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1}$ e perciò sono reciprocamente paralleli. Ne segue a sua volta la collinearità di $\mathbf{H}_{t1}$ e $\mathbf{H}_{t2}$, vale a dire che i vetto-

ri $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ e la normale alla superficie di discontinuità giacciono in un piano, contrariamente alle discontinuità tangenziali e a quelle di Alfvén in cui i piani $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{n}$ e $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{n}$, in generale, non coincidono. Questo risultato è valido anche nel caso $H_n = 0$ quando dalla (70,5) segue che $V_1\mathbf{H}_{t1} = V_2\mathbf{H}_{t2}$ (questo caso sarà trattato in dettaglio alla fine del paragrafo).

Il salto $\mathbf{v}_{t2} - \mathbf{v}_{t1}$ si trova nello stesso piano che $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. Senza perdere di generalità, si può supporre che i vettori stessi $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ giacciano nello stesso piano, cosicché il moto nell'onda d'urto è per sua natura piano. Per di più, è facile vedere che mediante una trasformazione appropriata del sistema di coordinate si può ottenere (per $H_n \neq 0$) che da entrambi i lati della superficie di discontinuità i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{H}$ siano collineari. È necessario a tale scopo passare a un nuovo sistema di coordinate che si muove rispetto a quello iniziale con velocità

$$\mathbf{v}_t - \frac{v_n}{H_n}\mathbf{H}_t = \mathbf{v}_t - \frac{jV}{H_n}\mathbf{H}_t$$

(valori di queste grandezze dai due lati della discontinuità sono uguali in virtù della condizione di frontiera (70,5)). Nelle formule successive non seguiremo questo sistema di coordinate speciale.

Deduciamo una relazione che per le onde d'urto magnetoidrodinamiche funge da adiabatica di Hugonio in idrodinamica ordinaria. Escludendo $\{\mathbf{v}_t\}$ dalle due equazioni (70,4-5) otteniamo

$$j^2\{VH_t\} = \frac{H_n^2}{4\pi}\{H_t\}; \tag{72,2}$$

al posto di $\mathbf{H}_t$ scriviamo qui H_t già tenendo conto della collinearità di $\mathbf{H}_{t1}$ e $\mathbf{H}_{t2}$ [1]). Per escludere $\mathbf{v}_t$ dall'equazione (70,2) la riscriviamo identicamente nella forma seguente:

$$\{w\} + \frac{j^2}{2}\{V^2\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\mathbf{v}_t - \frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t\right)^2\right\} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\{VH_t^2\} - \frac{1}{32\pi^2 j^2}H_n^2\{H_t^2\} = 0.$$

Il terzo termine si annulla in virtù dell'equazione (70,4) e, di conseguenza, $\mathbf{v}_t$ scompare. Nell'ultimo termine sostituiamo j^2 della (72,2) e nel secondo j^2 della (70,3), cioè

$$j^2 = \frac{P_2 - P_1 + (H_{t2}^2 - H_{t1}^2)/8\pi}{V_1 - V_2}. \tag{72,3}$$

[1]) In questo caso tuttavia i vettori $\mathbf{H}_{t1}$ e $\mathbf{H}_{t2}$ potrebbero essere diretti nella stessa direzione o in modo opposto, e in questo senso H_{t1} e H_{t2} potrebbero essere di segno uguale o opposto. Ma nel seguito (§ 73), partendo da altre considerazioni, vedremo che questo segno deve essere uguale.

Infine, dopo semplici calcoli abbiamo

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+\frac{1}{2}(P_2+P_1)(V_2-V_1)+$$
$$+\frac{1}{16\pi}(V_2-V_1)(H_{t2}-H_{t1})^2=0. \qquad (72,4)$$

Questa è l'equazione cercata esprimente *adiabatica d'urto* nell'idrodinamica magnetica. Essa differisce dall'equazione ordinaria per il terzo termine.

Scriviamo qui ancora una volta l'equazione (70,4):

$$\mathbf{v}_{t2}-\mathbf{v}_{t1}=\frac{H_n}{4\pi j}(\mathbf{H}_{t2}-\mathbf{H}_{t1}), \qquad (72,5)$$

(che determina il salto di $\mathbf{v}_t$ rispetto a quello di $\mathbf{H}_t$. Le equazioni (72,2-5) costituiscono il sistema completo di equazioni descriventi le onde d'urto. Conveniamo di attribuire più avanti l'indice 1 al mezzo verso il quale l'onda si propaga; in altre parole, il gas stesso passa dalla parte 1 prima dell'onda d'urto verso la parte 2 dietro l'onda. Ricordiamo anche che abbiamo deciso di usare il sistema di coordinate nel quale l'elemento di superficie di discontinuità considerato è a riposo mentre è attraversato dal gas in moto.

In idrodinamica ordinaria è valido il teorema di Zemplén (cfr. VI § 84) secondo il quale la pressione e la densità nell'onda d'urto crescono:

$$P_2>P_1,\ \rho_2>\rho_1; \qquad (72,6)$$

in altre parole, l'onda d'urto è onda di compressione. In questo caso è supposto che

$$\left(\frac{\partial V^2}{\partial P^2}\right)_s>0 \qquad (72,7)$$

praticamente sempre benché questa disuguaglianza non sia termodinamica. Il teorema di Zemplén è conseguenza della legge di aumento dell'entropia.

È facile provare che il teorema di Zemplén resta in vigore anche nell'idrodinamica magnetica per le onde d'urto di intensità debole sotto l'unica condizione (72,7). In un'onda d'urto debole i salti di tutte le grandezze sono piccoli. Sviluppando l'equazione (72,4) in potenze dei salti della pressione e dell'entropia, otteniamo

$$T(s_2-s_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_s(P_2-P_1)^3-$$
$$-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s(P_2-P_1)(H_{t2}-H_{t1})^2; \qquad (72,8)$$

il primo termine corrisponde all'idrodinamica ordinaria (cfr. VI § 83). Poiché $-(\partial V/\partial P)_s > 0$ secondo una delle disuguaglianze termodinamiche, allora in accordo con la condizione $s_2 - s_1 > 0$ dalla formula (72,8) deriva la disuguaglianza $P_2 > P_1$ e, rispettivamente, $V_2 < V_1$.

Se oltre al rapporto (72,7) è positivo anche il coefficiente di dilatazione termica, $(\partial V/\partial T)_P > 0$, il teorema di Zemplen si può dimostrare in idrodinamica magnetica riducendo alla dimostrazione in idrodinamica ordinaria senza supporre che siano piccoli balzi di tutte le grandezze (*R.V. Polovin, G.J. Liubarskij*, 1958; *S.V. Iordanskij*, 1958).

Sia P_1, V_1 lo stato iniziale assegnato del gas e sia $s_2^{(0)}$ l'entropia nello stato finale del gas per V_2 assegnato in assenza di campo magnetico. Indichiamo con $s_2^{(H)}$ l'entropia dello stato finale del gas per gli stessi valori P_1, V_1, V_2 in presenza del campo magnetico. In idrodinamica ordinaria dalla disuguaglianza $V_2 > V_1$ deriva $s_2^{(0)} < s_1$, ciò che significa impossibilità di onda di rarefazione. Mostriamo (sotto le condizioni suindicate) che $s_2^{(H)} < s_2^{(0)}$ in modo che a fortiori $s_2^{(H)} < s_1$; con ciò dimostriamo impossibilità di onde di rarefazione nell'idrodinamica magnetica.

Derivando l'equazione (72,4) rispetto a P_2 per V_2 costante e usando l'uguaglianza $(\partial\varepsilon/\partial P)_V = T\,(\partial s/\partial P)_V$, otteniamo

$$T_2\left(\frac{\partial s_2^{(H)}}{\partial P_2}\right)_{V_2} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) + \left(\frac{\partial Q}{\partial P_2}\right)_{V_2} = 0 \qquad (72,9)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$Q = \frac{1}{16\pi}(V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2.$$

In virtù delle relazioni termodinamiche

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_V = \frac{T}{c_v}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

il segno del primo termine nella (72,9) coincide con il segno di $(\partial V/\partial T)_P$ e, per ipotesi, è positivo. Perciò se $V_2 > V_1$, allora $(\partial Q/\partial P_2)_{V_2} < 0$. La presenza del campo magnetico implica aumento di Q (senza campo $Q = 0$, e con campo $Q > 0$) e, di conseguenza, diminuzione di P_2 (per V_2 assegnato). Poiché per ipotesi $(\partial s/\partial P)_V > 0$, ne segue a sua volta che $s_2^{(H)} < s_2^{(0)}$, come dovevasi dimostrare.

Infine, consideriamo il caso già menzionato all'inizio del paragrafo quando il campo magnetico da ambedue i lati della superficie di discontinuità giace nel piano $H_n = 0$ tangenziale a questa superficie (*onda d'urto perpendicolare*). In questo caso dalla (72,5) ricaviamo $\mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_{t1}$, cioè che la componente tangenziale della velocità resta continua. Con un sistema di coordinate appropriato si può ottenere

perciò che dai due lati della discontinuità sia $\mathbf{v}_t = 0$, cioè che il gas si muova perpendicolarmente alla discontinuità; supporremo ciò realizzato. In seguito, dall'equazione (72,2) abbiamo

$$V_2 H_2 = V_1 H_1.$$

Tenendo conto di questa relazione è facile provare che le equazioni (72,3-4) si possono riscrivere nella forma

$$j^2 = \frac{P_2^* - P_1^*}{V_1 - V_2},$$

$$\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(P_2^* + P_1^*)(V_2 - V_1) = 0,$$

che differiscono dalle equazioni ordinarie per le onde d'urto in assenza di campo magnetico per il solo cambiamento dell'equazione di stato; al posto dell'equazione originale $P = P(V, s)$ si deve ricorrere all'equazione $P^* = P^*(V, s)$ nella quale

$$P^* = P + \frac{b^2}{8\pi V^2}$$

e con la lettera b è denotato il prodotto costante HV. Rispettivamente, ε^* deve essere definita in modo tale che si verifichi la relazione termodinamica $(\partial\varepsilon^*/\partial V)_s = -P^*$ dalla quale deriva

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{b^2}{8\pi V}.$$

§ 73. *Condizione di evoluzione delle onde d'urto*

Perché sia possibile l'esistenza reale di una discontinuità idrodinamica, quest'ultima deve essere stabile rispetto alla scissione in due o più discontinuità. Questa condizione si può formulare altrimenti, e cioè che ogni perturbazione infinitesima dello stato iniziale implichi variazioni sempre infinitesime della discontinuità; le discontinuità soddisfacenti a questa condizione si dicono *evoluzionali*. Sottolineiamo che la proprietà di evoluzionare non coincide affatto con la stabilità nel senso diretto della parola. L'instabilità ordinaria significa aumento graduale della perturbazione piccola iniziale che conduce in fin dei conti alla distruzione del regime del moto considerato; ma anche per aumento esponenziale (come $e^{\gamma t}$, $\gamma > 0$) durante un intervallo di tempo sufficientemente piccolo ($t \lesssim 1/\gamma$) la perturbazione resta piccola. Nella discontinuità non evoluzionale la perturbazione diviene grande immediatamente (benché per t piccoli occupi ancora una piccola zona dello spazio). Ciò è illustrato dalla figura 41 ove è rappresentata la scissione del salto della densità $\rho(x)$ in due salti consecutivi; la perturbazione $\delta\rho$ non è piccola seb-

bene occupi per t piccoli (quando due discontinuità non sono ancora separate da una distanza sensibile) un piccolo intervallo δx.

Il criterio di evoluzione si può ottenere calcolando il numero di parametri indipendenti che determinano perturbazione piccola iniziale (per $t = 0$) qualsiasi della discontinuità, e il numero di equazioni (condizioni di frontiera linearizzate sulla discontinuità) cui questi parametri devono soddisfare. La discontinuità è evoluzionale se ambedue i numeri sono uguali; allora le condizioni di frontiera determinano univocamente un ulteriore sviluppo della perturbazione che per $t>0$ piccoli resta trascurabile [1]). Se, invece, il numero di equazioni è superiore o inferiore al numero di parametri incogniti, il problema di piccola perturbazione della discontinuità non ha soluzione affatto o ne ha un insieme infinito. Né il primo né il secondo caso è possibile, e questa situazione significa che l'ipotesi iniziale (piccolezza della perturbazione per t piccoli) è scorretta e la discontinuità non evoluzionale.

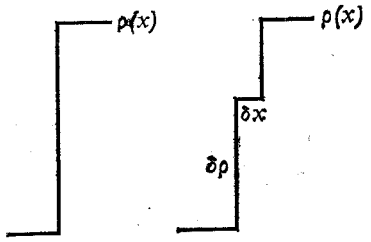


Fig. 41

In idrodinamica ordinaria la condizione di evoluzione delle onde d'urto non implica restrizioni complementari oltre alla condizione di aumento dell'entropia: le onde d'urto ammissibili dal teorema di Zemplen sono automaticamente evoluzionali (cfr. VI § 84). Ciò non è così in idrodinamica magnetica e la condizione di evoluzione impone nuove restrizioni considerevoli sul carattere di variazione delle grandezze nell'onda d'urto (*A.I. Achieser, G.J. Liubarskij, R.V. Polovin*, 1958).

Passando alla precisazione di fatto della condizione di evoluzione delle onde d'urto magnetoidrodinamiche, contiamo prima di tutto il numero di equazioni cui deve soddisfare una perturbazione piccola qualsiasi sulla superficie di discontinuità.

Supponiamo piana l'onda d'urto e ne consideriamo il piano come quello yz. La direzione positiva dell'asse x facciamo coincidere con quella di propagazione del gas attraverso la superficie di discontinuità. Supponiamo inoltre che i campi imperturbati H_1, H_2 e le velocità del gas v_1, v_2 dai due lati della discontinuità giacciano nel piano xy.

Da ogni lato della superficie di discontinuità sono soggette a perturbazione sette grandezze: tre componenti della velocità del fluido (v_x, v_y, v_z), due componenti del campo magnetico (H_y, H_z), la densità $\rho = 1/V$ e l'entropia s. Le perturb ni delle altre gran-

[1]) In questo caso l'onda può essere sia instabile (se tra le autofrequenze delle equazioni esistono quelle complesse con la parte immaginaria positiva) sia stabile (se tali frequenze non esistono).

dezze termodinamiche (P, w) sono determinate dalle perturbazioni di ρ e s. In virtù dell'equazione div $\mathbf{H} = \partial H_x/\partial x = 0$ la componente longitudinale del campo H_x è costante lungo l'asse x e non soggetta a perturbazione. Inoltre, è soggetta a perturbazione la velocità di propagazione dell'onda d'urto stessa, vale a dire che l'onda acquisisce una piccola velocità (indichiamola con δU) rispetto al sistema di coordinate in esame (nel quale la discontinuità imperturbata è a riposo). Tuttavia questa velocità può essere espressa immediatamente in funzione delle perturbazioni di ρ e v_x mediante la condizione di continuità della densità del flusso di massa j attraverso la superficie di discontinuità. Infatti, la velocità del gas rispetto alla discontinuità è

$$v_{x0} + \delta v_x - \delta U,$$

ove v_{x0} è la velocità imperturbata e δv_x la sua perturbazione; scrivendo anche $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, linearizzando la condizione di frontiera $\{j\} = 0$ e omettendo in seguito l'indice 0 nelle grandezze imperturbate, otteniamo

$$\{\delta j\} = \{\rho\delta v_x\} + \{v_x\delta\rho\} - \delta U\,\{\rho\} = 0,$$

di qui determiniamo δU.

La linearizzazione delle condizioni di frontiera di continuità per la componente Π_{zx} del flusso dell'impulso e la componente E_y del campo elettrico (cioè per le componenti z delle equazioni (70,4-5)) danno due equazioni

$$\left\{\rho v_x\,\delta v_z - \frac{1}{4\pi}\,H_x\delta H_z\right\} = 0, \qquad \{H_x\,\delta v_z - v_x\,\delta H_z\} = 0$$

(ricordiamo che i valori imperturbati sono $v_z = 0$ e $H_z = 0$). Queste equazioni contengono perturbazioni delle sole due grandezze

$$\delta v_z,\ \delta H_z. \tag{73,1}$$

Le condizioni di frontiera di continuità del flusso di energia q_x, delle componenti Π_{xx}, Π_{yx} del flusso dell'impulso e della componente E_z del campo elettrico (cioè le equazioni (70,2-3) e le componenti y delle equazioni (70,4-5)) danno quattro equazioni lineari contenenti le perturbazioni

$$\delta v_x,\ \delta v_y,\ \delta H_y,\ \delta\rho,\ \delta s, \tag{73,2}$$

che non scriviamo qui.

Contiamo ora il numero di parametri che determinano la perturbazione dell'onda d'urto. Le perturbazioni dipendenti dal tempo come $e^{-i\omega t}$ si propagano dai due lati della superficie di discontinuità sotto forma di onde magnetoidrodinamiche di tre tipi (onde di Alfvén, onde magnetoacustiche rapide e lente) e sotto forma di un'onda entropica; quest'ultima rappresenta una piccola perturbazione dell'en-

tropia la quale (in virtù della adiabaticità del moto del gas) va trasportata assieme al gas con la sua velocità. In questo caso, ovviamente, queste onde devono allontanarsi a sinistra o a destra della discontinuità. In ciascuna onda le variazioni di tutte le grandezze sono reciprocamente connesse da determinate relazioni (come è stato mostrato nel § 69); perciò ciascuna onda è determinata da un solo parametro, ossia dall'ampiezza di una delle grandezze.

Le onde magnetoacustiche e entropiche trasportano le perturbazioni (73,2) mentre le onde di Alfvén quelle (73,1). Poiché le equazioni per questi due gruppi di perturbazioni sono distinte, la condizione di evoluzione per ciascuna di esse deve essere soddisfatta separatamente (*S.I. Syrovatskij*, 1958); questa circostanza rende più forti limitazioni che compaiono.

Consideriamo dapprima la condizione di evoluzione rispetto alle perturbazioni di Alfvén. Essa chiede che il numero di onde allontanantisi sia uguale a due, ossia al numero di equazioni. Le velocità di fase delle onde di Alfvén rispetto alla superficie di discontinuità possono essere uguali a

$$v_{x1} \pm u_{A1}, \quad y_{x2} \pm u_{A2},$$

ove u_A è la velocità di fase (69,6) dell'onda rispetto al gas. In accordo con la direzione considerata dell'asse x le velocità del gas $v_{x1}, v_{x2} > 0$. Nella zona *1* prima della discontinuità l'onda si allontana da quest'ultima se la sua velocità di fase (rispetto alla discontinuità) è negativa, e nella zona *2* dietro la discontinuità se essa è positiva. Un'onda con velocità $v_{x1} + u_{A1}$ mai soddisfa questa condizione (è sempre onda in arrivo), e un'onda con velocità $v_{x1} - u_{A1}$ sempre si allontana per $v_{x1} < u_{A1}$. Analogamente un'onda con velocità $v_{x2} + u_{A2}$ sempre si allontana e con velocità $v_{x2} - u_{A2}$ si allontana per $v_{x2} > u_{A2}$. Perciò esistono due zone di evoluzione rispetto alle onde di Alfvén:

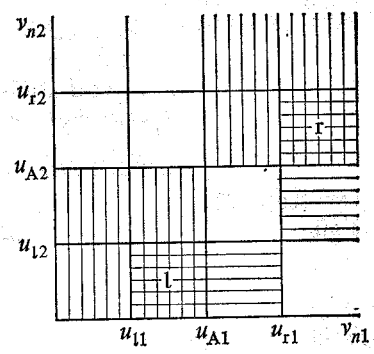


Fig. 42

$$1)\ v_{x1} > u_{A1}, \quad v_{x2} > u_{A2},$$
$$2)\ v_{x1} < u_{A1}, \quad v_{x2} < u_{A2}.$$

Queste zone sono rigate nella fig. 42 verticalmente; la figura è costruita tenendo conto delle disuguaglianze

$$u_l < u_A < u_r. \tag{73,3}$$

La condizione di evoluzione rispetto alle perturbazioni magneto-acustiche e entropiche richiede che il numero di onde allontanantisi sia uguale a quattro. L'onda entropica allontanantesi che si sposta con il gas sempre esiste, ma dal lato *2*. Il numero di onde magneto-acustiche allontanantisi deve perciò essere uguale a tre. La discussione condotta precedentemente per le onde di Alfvén conduce a due zone di evoluzione rispetto al gruppo di perturbazioni considerato, che sono rigate nella fig. 42 orizzontalmente [1]).

L'intersezione di ambedue zone rigate determina due zone di evoluzione rispetto a tutte le perturbazioni: 1) *onde d'urto rapide* per le quali

$$v_{n1} > u_{r1},\ u_{r2} > v_{n2} > u_{A2} \tag{73,4}$$

e 2) *onde d'urto lente* per le quali

$$u_{A1} > v_{n1} > u_{l1},\ u_{l2} > v_{n2} \tag{73,5}$$

(abbiamo ripreso la vecchia notazione v_n per la componente normale della velocità al posto di v_x). Nel caso limite di debole intensità dell'onda (salti piccoli di tutte le grandezze) le onde d'urto rapide e lente si propagano con velocità $u_{r2} \approx u_{r1}$ e $u_{l2} \approx u_{l1}$, rispettivamente.

Applichiamo le condizioni di evoluzione ottenute allo studio del carattere di variazione del campo magnetico nell'onda d'urto. Partiamo dall'uguaglianza (72,2)

$$\frac{H_n^2}{4\pi j^2}\{\mathbf{H}_t\} = \left\{\frac{\mathbf{H}_t}{\rho}\right\} = \frac{1}{j}\{v_n\mathbf{H}_t\}$$

ossia

$$\left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n1}\right)\mathbf{H}_{t1} = \left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n2}\right)\mathbf{H}_{t2}. \tag{73,6}$$

Osservando che $H_n^2/4\pi\rho = u_A^2$, si può riscrivere questa uguaglianza nella forma

$$\frac{u_{A1}^2 - v_{n1}^2}{v_{n1}}\mathbf{H}_{t1} = \frac{u_{A2}^2 - v_{n2}^2}{v_{n2}}\mathbf{H}_{t2}. \tag{73,7}$$

Tenendo conto delle disuguaglianze (73,4-5) si vede dalla (73,7) che i campi tangenziali dai due lati dell'onda d'urto sono collineari e, per di più, hanno la stessa direzione.

Nelle onde d'urto lente dai due lati della discontinuità

$$v_n < \frac{H_n^2}{4\pi j} = \frac{u_A^2}{v_n}.$$

[1]) È da notare che tra le zone di non evoluzione si verificano dei casi quando il numero di parametri è sia maggiore che inferiore al numero di equazioni, ossia rispetto a ciascuno dei due gruppi di perturbazioni.

Osservando anche che dalla continuità del flusso di massa, $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$, e dalla disuguaglianza $\rho_1 < \rho_2$ segue che

$$v_{n1} > v_{n2}, \tag{73,8}$$

concludiamo dalla (73,6) che $H_{t2} < H_{t1}$, vale a dire che nell'onda d'urto lenta il campo magnetico tangenziale si indebolisce. Nell'onda d'urto rapida, invece, $v_n > H_n^2/4\pi j$ e dalla (73,6) segue che $H_{t2} > H_{t1}$ cioè il campo magnetico tangenziale si rafforza.

È da notare un caso particolare delle onde d'urto in cui il campo magnetico dai due lati della superficie di discontinuità sia parallelo alla normale a questa superficie. Come è stato detto all'inizio del § 72, sempre è possibile considerare un sistema di coordinate tale che dai due lati i vettori **v** e **H** siano reciprocamente paralleli. Allora nel caso considerato sarà

$$\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} = 0, \quad \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = 0$$

(*onda d'urto parallela*). Per questa onda le condizioni di frontiera, in generale, non contengono campo magnetico, cioè coincidono con le condizioni di frontiera per l'onda d'urto in idrodinamica ordinaria. L'esistenza del campo magnetico fa sì, tuttavia, che in un intervallo di valori dei parametri dell'onda siano violate le condizioni di evoluzione, e tali onde sono impossibili (si veda il problema 1).

Quanto alle onde d'urto perpendicolari considerate alla fine del paragrafo precedente, tutte queste onde di compressione sono evoluzionali e sono, fra l'altro, onde rapide. Quest'ultimo fatto è evidente in quanto per $H_n = 0$ le velocità $u_A = u_1 = 0$.

Dopo aver studiato tipi diversi di discontinuità nell'idrodinamica magnetica soffermiamoci ancora sulla questione della possibilità di esistenza dei casi transitori tra questi tipi, cioè di discontinuità tali che godessero contemporaneamente delle proprietà dei due tipi. Queste possibilità sono fortemente limitate da restrizioni derivanti dalla condizione di evoluzione.

Prima di tutto, la discontinuità di Alfvén non può trasformarsi con continuità in un'onda d'urto. Infatti, in un'onda d'urto la normale alla superficie di discontinuità e il campo magnetico da ambedue i suoi lati giacciono in un piano. E questa onda d'urto può coincidere con la discontinuità di Alfvén a condizione però che il vettore **H** in essa ruoti di 180°. Ma in questo caso la componente tangenziale del campo cambia di segno mentre nell'onda evoluzionale essa non cambia di segno.

Tra le onde d'urto rapida e lenta sarebbe possibile il passaggio continuo soltanto per $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} = 0$ poiché nell'onda rapida il campo $\mathbf{H}_t$ (qualora non sia nullo) si rafforza e in quella lenta indebolisce; in altre parole, il passaggio continuo potrebbe essere soltanto tra le onde parallele rapida e lenta. Ma le zone di evoluzione di queste onde sono a contatto soltanto per $u_{A1} = u_{01}$ quando l'onda lenta scom-

pare (si veda il problema 1). Quindi, il passaggio continuo tra le onde d'urto rapide e lente è impossibile.

Un'onda rapida non può trasformarsi con continuità in una discontinuità tangenziale in virtù delle disuguaglianze (73,4).

In tal modo, sono possibili soltanto passaggi continui tra la discontinuità tangenziale, da una parte, e la discontinuità a contatto, quella di Alfvén o l'onda d'urto lenta, dall'altra.

Problemi

1. Trovare la zona di valori v_1 in cui si viola l'evoluzione dell'onda d urto parallela nel gas monoatomico perfetto (nel senso termodinamico) con il rapporto tra capacità termiche $c_p/c_v = 5/3$.

Soluzione. Per il gas in questione la funzione termica è $w = 5P/2\rho$ e il sistema di condizioni di frontiera (70,1-3) assume la forma

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2,$$
$$v_1^2 + 5\frac{P_1}{\rho_1} = v_2^2 + 5\frac{P_2}{\rho_2}.$$

Di qui ricaviamo

$$v_2 = \frac{v_1^2 + 3u_{01}^2}{4v_1}$$

(ove $u_0 = (5P/3\rho)^{1/2}$ è la velocità del suono ordinaria) e in seguito:

$$u_{A2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, u_{A1} = \frac{\sqrt{v_1^2 + 3u_{01}^2}}{2v_1}\, u_{A1},$$
$$u_{02} = \frac{\sqrt{(5v_1^2 - u_{01}^2)(v_1^2 + 3u_{01}^2)}}{4v_1}$$
$$u_{r1} = \max(u_{01}, u_{A1}), \quad u_{l1} = \min(u_{01}, u_{A1}),$$
$$u_{r2} = \max(u_{02}, u_{A2}), \quad u_{l2} = \min(u_{02}, u_{A2}).$$

Per $u_{A1} < u_{01}$ le condizioni di evoluzione sempre sono soddisfatte e, inoltre, l'onda d'urto è rapida. Nella fig. 43 è rappresentata approssimativamente la forma delle dipendenze $v_2(v_1)$ (linea in grassetto) e $u_{A2}(v_1)$, $u_{r2}(v_1) = u_{02}(v_1)$ in questo caso; la linea pendente in tratteggio punteggiato è la bisettrice di un angolo retto.

Nella fig. 44 è rappresentato il diagramma analogo per il caso $u_{A1} > u_{01}$. Le curve sottili continue sono di nuovo le dipendenze $u_{A2}(v_1)$ e $u_{02}(v_1)$; in diversi tratti di queste curve è indicato quale delle velocità u_{r2} o u_{l2} coincide con esse. La curva continua in grassetto è la dipendenza $v_2(v_1)$ nelle zone di evoluzione; il suo tratto sinistro corrisponde alle onde d'urto lente e quello destro alle rapide. Il tratto punteggiato in grassetto è non evoluzionale e occupa l'intervallo

$$u_{A1} < v_1 < \sqrt{4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2};$$

esso è limitato a destra da un punto in cui $v_2 = u_{A2}$ [1]).

[1]) Per tratto della linea BB si veda il problema 2.

2. Davanti ad un'onda d'urto il campo magnetico tangenziale è $\mathbf{H}_{t1} = 0$ e dietro di essa $\mathbf{H}_{t2} \neq 0$ (tale onda d'urto si chiama *onda di inclusione*). Trovare l'intervallo di valori della velocità v_{n1} che può avere questa onda in un gas con le stesse proprietà termodinamiche del problema 1.

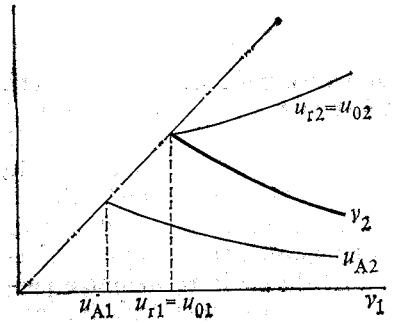


Fig. 43

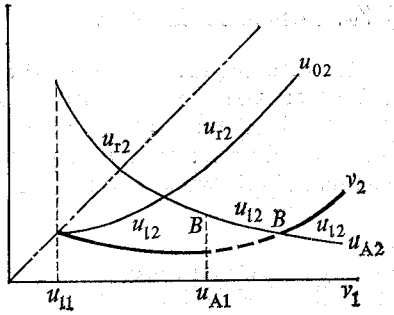


Fig. 44

Soluzione. Dalla (72,2) segue che per $\mathbf{H}_{t1} = 0$ la velocità dietro l'onda rispetto a gas è

$$v_{n2} = H_n / \sqrt{4\pi\rho_2} = u_{A2},$$

e davanti al gas

$$v_{n1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} v_{n2} = u_{A1} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} > u_{A1}.$$

Questa è un'onda rapida; le v e v_{n2} sono reciprocamente legate dalla relazione $v_{n1} v_{n2} = u_{A1}^2$ [1].

Per l'onda di inclusione nel gas con le proprietà termodinamiche suindicate si può ottenere dalle condizioni di frontiera

$$\frac{H_{t2}^2}{8\pi} = \frac{\rho_1}{3u_{A1}^2} (v_{n1}^2 - u_{A1}^2)(4u_{02}^2 - 3u_{01}^2 - v_{n1}^2).$$

Poiché il secondo membro dell'uguaglianza deve essere positivo e poiché $v_{n1} > u_{A1}$ vediamo che i valori possibili di v_{n1} nell'onda di inclusione sono limitati dall'intervallo

$$u_{A1} \leqslant v_{n1} \leqslant \sqrt{4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2}.$$

---

[1]) Si chiama *onda di inclusione* quella in cui $\mathbf{H}_{t1} \neq 0$ e $\mathbf{H}_{t2} = 0$. Essa si riferisce alla categoria di onde lente e le sue velocità sono

$$v_{n1} = u_{A1}, \quad v_{n2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\, u_{A2} < u_{A2}, \quad v_{n1} v_{n2} = u_{A2}^2.$$

Può sorgere un dubbio che le onde di inclusione e di esclusione siano evoluzionali; così, nell'onda di inclusione $v_{n1} > u_{A1}$ e perciò sembrerebbe che da essa non potesse partire che una sola onda di Alfvén di perturbazioni con velocità $v_{n2} + u_{A2} = 2u_{A2}$ indietro. Non si deve dimenticare, tuttavia, che per applicazione di perturbazione il campo magnetico tangenziale diviene non nullo.

Da queste disuguaglianze si vede che le onde di inclusione sono possibili soltanto per $u_{A1} > u_{01}$. Nella fig. 44 a queste onde corrisponde il tratto BB della curva sottile continua.

§ 74. *Dinamica turbolenta*

Il moto turbolento di un fluido conduttore gode di una proprietà notevole: esso può implicare la generazione spontanea di campi magnetici relativamente grandi, fenomeno che porta il nome di *dinamica turbolenta*. Nel fluido conduttore sempre esistono piccole perturbazioni causate da fatti estranei al moto stesso del fluido e accompagnate dalla comparsa di campi elettrici e magnetici molto deboli (tali perturbazioni possono essere legate, per esempio, all'effetto magnetomeccanico in alcuni tratti del fluido in rotazione e persino alle fluttuazioni termiche). Nel seguito tutto dipenderà dall'andamento di queste perturbazioni: a causa del moto turbolento esse si rafforzano, in media, o indeboliscono.

Con il tempo l'andamento della variazione di perturbazioni così comparse una volta del campo magnetico è determinato dal gioco delle cause fisiche più disparate. Nella direzione in cui il campo si rafforza agisce un effetto magnetoidrodinamico specifico che consiste nell'estensione delle linee di forza. Nel § 65 è stato detto che nel caso di un fluido in moto (di conducibilità sufficientemente grande) le linee magnetiche di forza anch'esse si spostano in quanto « congelate » nel fluido, mentre l'intensità del campo magnetico varia proporzionalmente all'estendersi della linea di forza in ogni suo punto. Ma per il moto turbolento due particelle vicine qualsiasi del fluido con il passare del tempo divergono in media. Come risultato le linee di forza si distendono e il campo magnetico si rafforza.

Nella direzione in cui il campo magnetico indebolisce agisce la dissipazione dell'energia magnetica emanata sotto forma di calore di Joule delle correnti indotte. Poiché la dissipazione dell'energia è proporzionale a $(\mathrm{rot}\,\mathbf{H})^2$, cioè è quadratica rispetto alle derivate spaziali del campo, è chiaro che la dissipazione sarà piccola per un moto a variazione del campo su scala spaziale sufficientemente grande. Ciò non significa affatto che su tale scala il campo si rafforzi. Infatti, la estensione menzionata delle linee di forza è accompagnata da un « intrecciarsi » di queste ultime, ciò che implica diminuzione della scala spaziale. Perciò è probabile una situazione quando al posto del rafforzamento del campo con la scala non compaia altro che il flusso di energia dalle pulsazioni turbolente su grande scala alle pulsazioni su piccola scala e, appena raggiunta una scala sufficientemente piccola, l'energia va dissipata.

Si verificherebbe questa situazione se la turbolenza fosse « bidimensionale », cioè se la velocità $\mathbf{v}$ del fluido fosse ovunque parallela al medesimo piano xy (*Ja.B. Zeldovič*, 1956). Sottolineiamo che il

campo generato **H** non è supposto in questo caso bidimensionale. Dimostriamo questo fatto.

Consideriamo soprattutto l'evoluzione della componente H_z del campo, perpendicolare al moto del fluido. Tenendo conto delle uguaglianze div **H** = 0 e div **v** = 0 (in questo paragrafo il fluido è supposto incompressibile!) la componente z dell'equazione (66,1) assume la forma

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla) H_z + \nu_m \nabla H_z; \qquad (74,1)$$

ove entra la sola H_z. Il primo termine descrive semplicemente il trasporto di un dato valore H_z con l'elemento di fluido cui la componente si riferisce. Il secondo termine descrive l'equalizzazione « diffusiva » dei valori H_z in punti distinti del fluido. Evidentemente, né l'uno né l'altro effetto possono condurre ad un aumento di H_z. Se la perturbazione iniziale di H_z occupa una zona finita dello spazio essa si smorza con il passare del tempo in seguito alla « diffusione ».

Per la dimostrazione dello smorzamento delle componenti H_x, H_y del campo si può porre $H_z = 0$ poiché si deve escludere la probabilità che queste componenti restino dopo lo smorzamento di H_z [1]). Dimostriamo questo fatto sotto la condizione complementare che tutte le grandezze (**v** e **H**) siano indipendenti dalla coordinata z [2]). Allora il vettore rot **H** è diretto lungo l'asse z, così come il vettore [**vH**], e perciò (come risulta dall'espressione (66,6)) il campo elettrico **E** è diretto anch'esso lungo l'asse z. In questo caso si può descrivere il campo elettromagnetico mediante il potenziale vettoriale **A** diretto lungo l'asse z e indipendente dalla coordinata z:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Sostituendo queste espressioni nella formula (66,6), dopo una semplice trasformazione otteniamo l'equazione esprimente A_z

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla) A_z + \nu_m \Delta A_z \qquad (74,2)$$

che formalmente coincide in modo esatto con l'equazione (74,1). Ne segue di nuovo che con il passare del tempo, le perturbazioni di A_z, e con esse di H_x, H_y, si smorzano.

Quindi, la dinamica turbolenta rappresenta un fenomeno sostanzialmente tridimensionale. Per illustrare questa circostanza diamo

[1]) Considerazioni ulteriori non escludono che il campo possa aumentare nello stadio iniziale del processo.

[2]) Questa ipotesi serve qui alla sola semplificazione e non assume carattere di principio. Una discussione un po' più complicata consente di dimostrare lo stesso risultato senza questa restrizione.

un esempio di moto che implica rafforzamento del campo senza variazione della sua scala spaziale. Consideriamo l'insieme di linee magnetiche di forza chiuse, congelate all'interno di un toro sito nel fluido (fig. 45,*a*). Supponiamo che per il moto del fluido la lunghezza di questo toro raddoppi (fig. 45,*b*); allora diminuisce di due volte l'area della sua sezione e aumenta la grandezza del campo magnetico. Supponiamo in seguito che per il moto il toro « si torca » (fig. 45,*c*)

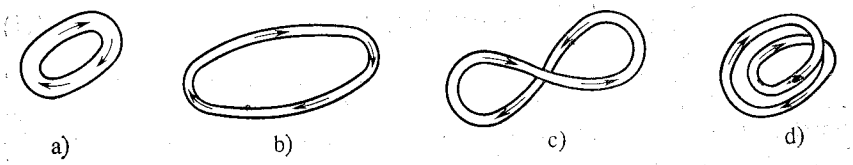


Fig. 45

e poi i cappi si sovrappongano reciprocamente (fig. 45,*d*). Come risultato si ottiene una configurazione pressappoco della stessa dimensione iniziale ma con il valore raddoppiato del campo. Una ripetizione infinita di questo ciclo conduce a un rafforzamento esponenziale infinito del campo. Evidentemente, questo moto è in linea di massima tridimensionale.

È ovvio che questa illustrazione non serve di dimostrazione dell'esistenza vera e propria della dinamica turbolenta; esistono altri moti che frazionano le scale del campo. Per chiarire questa questione è necessario condurre uno studio diretto della stabilità del moto turbolento del fluido conduttore rispetto a piccole perturbazioni iniziali del campo magnetico. Questa via ha consentito di ottenere risultati convincenti secondo i quali per valori sufficientemente grandi del numero magnetico di Reynolds la generazione del campo magnetico effettivamente ha luogo [1]). Non esporremo queste analisi molto complicate limitandoci a una descrizione generale della turbolenza magnetoidrodinamica venutasi a creare sotto ipotesi di esistenza della dinamica turbolenta.

Come è noto, il moto turbolento si può considerare come insieme di « pulsazioni turbolente » di diversa scala a partire da quella fondamentale « esterna » l fino alla scala più piccola « interna » λ_0. La prima coincide con le lunghezze caratteristiche che determinano le dimensioni della regione in cui ha luogo il moto turbolento. La seconda invece determina le distanze alle quali la dissipazione dell'energia diviene importante (cfr. VI, §§ 31, 32). Quando parliamo della stazionarietà della turbolenza teniamo conto che le sue caratteristiche medie sono costanti; ossia quelle rispetto a intervalli di tempo dell'ordine di grandezza dei periodi delle pulsazioni corrispondenti,

[1]) Cfr. *Vainštein S.I.* — JETF, 1980, v. 79, p. 2175; 1982, v. 83, p. 161.

ma, ovviamente, piccoli rispetto a tutto il tempo dell'osservazione. Indichiamo con λ le caratteristiche medie delle pulsazioni della scala λ, per esempio, v_λ, H_λ sono le variazioni medie della velocità e del campo a distanze $\sim \lambda$.

Quando affermiamo che esiste la dinamica turbolenta, ciò significa che sulla scala fondamentale l esistono campi magnetici H_l per i quali la densità dell'energia $H_l^2/8\pi$ è commensurabile con la densità dell'energia cinetica $\rho v_l^2/2$ del fluido. In altre parole, la velocità di Alfvén nel campo H_l

$$u_A \sim \frac{H_l}{\sqrt{4\pi\rho}}, \tag{74,3}$$

è comparabile con la scala fondamentale della velocità idrodinamica $v_l \equiv u$ (variazione della velocità media a distanze $\sim l$). Per le scale $\lambda \ll l$ i campi $H_\lambda \ll H_l$[1]).

Sottolineaimo immediatamente la principale differenza tra la turbolenza magnetoidrodinamica e quella ordinaria. Nell'ultima il moto su scala fondamentale non incide sensibilmente sulle proprietà delle pulsazioni di piccola scala: esso non implica che « deviazione » di queste ultime per convezione. Nel caso magnetoidrodinamico, invece, il campo H_l della scala fondamentale incide sul moto di tutte le scale più piccole.

Poiché per le scale $\lambda \ll l$ il campo H_l si può supporre localmente omogeneo e siccome $H_\lambda \ll H_l$, in questo caso il moto di piccola scala non è altro che l'insieme di onde magnetoidrodinamiche di piccola ampiezza con vettori d'onda $k \sim 1/\lambda$ e velocità $\sim u_A$. Secondo la (69,11) in queste onde l'energia cinetica e l'energia magnetica del fluido sono uguali. In altre parole, nelle pulsazioni di piccola scala si osserva con grande precisione l'equipartizione tra le energie magnetica e cinetica:

$$\rho v_\lambda^2 \sim H_\lambda^2/4\pi. \tag{74,4}$$

Per ordine di grandezza, questa relazione si può estrapolare rispetto alla scala fondamentale nella quale si ha $u \sim u_A$ in accordo con l'ipotesi.

Consideriamo la regione delle scale λ nell'intervallo

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0. \tag{74,5}$$

È da tener conto che la dissipazione viscosa e la dissipazione di Joule, in generale, possono essere importanti per valori diversi di λ, e in

[1]) Qui presenta interesse la generazione del campo magnetico turbolento a dimensioni caratteristiche della variazione spaziale $\lesssim l$. Come risulta, la generazione del campo « con grande scala » e dimensioni caratteristiche $\gg l$ è possibile a sola condizione che le caratteristiche medie del moto turbolento non siano invarianti rispetto all'inversione spaziale (questo caso qui non è trattato). Per teoria corrispondente si veda il libro di *Vainštein S.I.*, *Zeldovič Ja.B.*, *Ruzmajkin A.A.* Dinamica turbolenta in astrofisica. — Mosca, Nauka, ed. russa, 1980.

questo senso nella turbolenza magnetoidrodinamica possono esistere due scale interne; con λ_0 nella (74,5) si intende la più grande di esse in modo che nella zona (74,5) (detta *inerziale*) non esiste nessuna dissipazione.

Come nella teoria della turbolenza ordinaria, introduciamo la quantità media di energia (indicandola con ε) dissipata in unità di massa del fluido per unità di tempo. Questa energia viene attinta dal moto di grande scala da cui si trasmette gradualmente a tutte le scale più piccole finché non sarà dissipata nelle pulsazioni delle scale $\lambda \leqslant \lambda_0$. Evidentemente nella zona inerziale in cui la dissipazione non esiste la quantità ε rappresenta, al tempo stesso, un flusso di energia costante (indipendente da λ) nella direzione delle scale decrescenti. Nella teoria della turbolenza ordinaria puramente idrodinamica si poteva affermare che le proprietà della turbolenza locali (cioè su lunghezze $\lambda \ll l$) dovessero essere determinate dalle sole grandezze, ρ, ε e, ovviamente, dalle distanze stesse λ ma non dalle scale delle dimensioni l e della velocità u in totale; ciò era sufficiente per trovare la dipendenza di v_λ da λ già sulla base delle considerazioni dimensionali. Nella turbolenza magnetoidrodinamica, invece, le proprietà locali possono dipendere anche dal campo H_l (o, che è lo stesso, dalla velocità u_A). Ora le considerazioni dimensionali sono insufficienti e si deve prendere in esame il meccanismo di formazione del flusso di energia.

Questo meccanismo è rappresentato dall'interazione tra le onde magnetoidrodinamiche di piccola ampiezza descritta dai termini non lineari nelle equazioni di moto. Perciò il flusso di energia ε deve essere sviluppato in potenze delle piccole ampiezze v_λ e, inoltre, questo sviluppo deve partire dai termini di potenza superiore alla seconda (poiché i termini quadratici corrisponderebbero alla dissipazione ordinaria che in questo caso non esiste). I termini cubici dipenderebbero dalle fasi delle onde interagenti e, quindi, scompaiono per il calcolo della media rispetto a queste fasi casuali. Perciò $\varepsilon \backsim v_\lambda^4$. Ora è possibile già determinare il coefficiente di proporzionalità partendo dalle considerazioni dimensionali (la dimensione di ε è erg/(g·s) = cm^2/s^3):

$$\varepsilon \sim v_\lambda^4/u_A\lambda, \tag{74,6}$$

ossia

$$v_\lambda \sim (u_A\varepsilon\lambda)^{1/4} \tag{74,7}$$

(*R.H. Kraichnan*, 1965). Questa espressione sostituisce la legge di Kolmogorov-Obuchov ($v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$) della turbolenza idrodinamica ordinaria. Estrapolando la (74,6) alla scala fondamentale otteniamo per ε la seguente stima:

$$\varepsilon \sim u^4/u_A l \sim u^3/l,$$

ossia la stessa come nell'idrodinamica ordinaria.

La scala interna della turbolenza λ_0 si può stimare considerando le pulsazioni di piccola scala come onde magnetoidrodinamiche sullo sfondo del campo di grande scala H_l. La viscosità e la conducibilità del mezzo implicano assorbimento di queste onde; il coefficiente di assorbimento corrispondente γ è stato trovato nel problema al § 69. La dissipazione diviene sensibile quando la lunghezza di assorbimento $1/\gamma$ va comparata con la lunghezza d'onda, cioè con la scala λ. Poiché le onde magnetoidrodinamiche si propagano con la velocità u_A (indipendente dalla loro lunghezza), allora la frequenza $\omega \sim u_A/\lambda$. Abbiamo la seguente stima per il coefficiente di assorbimento:

$$\gamma \sim (\nu + \nu_m)/\lambda^2 u_A.$$

Per $\lambda \sim \lambda_0$ dalla condizione $\gamma \sim 1/\lambda$ ricaviamo la scala interna

$$\lambda_0 \sim \frac{\nu+\nu_m}{U_A} \sim \frac{\nu+\nu_m}{u}. \qquad (74,8)$$

Se $\nu \gg \nu_m$, allora $\lambda_0 \sim \nu/u \sim l/\mathrm{R}$, ove $\mathrm{R} \sim ul/\nu$ è il numero di Reynolds per il moto fondamentale. Analogamente per $\nu_m \gg \nu$ abbiamo $\lambda_0 \sim l/\mathrm{R}_m$.

Per concludere notiamo un'altra proprietà interessante del moto turbolento di un mezzo fortemente conduttore: il campo magnetico va spinto fuori dalla zona turbolenta. Consideriamo infatti una zona finita occupata dalla turbolenza all'esterno della quale si trova un campo magnetico. Le linee di forza di questo campo entrando nella zona turbolenta la si scompigliano in quanto sono « congelate » e il campo diventa caotico nelle direzioni. Questo fatto sta a significare l'annullamento della media dell'intensità **H** rispetto al tempo con precisione più grande quanto più grande è la conducibilità del mezzo (ma la conducibilità finita implica « scivolamento » delle linee di forza in modo che la caotizzazione del campo è incompleta). In altre parole, per applicazione di un campo magnetico non troppo forte al fluido animato da un moto turbolento (in una zona limitata) il fluido si comporta come mezzo diamagnetico con permeabilità magnetica trascurabile ($\mu \ll 1$) la quale è più piccola quanto più grande è il numero di Reynolds R_m.

Un campo magnetico sufficientemente forte non può non penetrare nel fluido. Tuttavia, ciò non significa che un campo magnetico forte debba sopprimere completamente la turbolenza. In un campo magnetico uniforme arbitrariamente forte (diretto lungo l'asse z) è possibile la turbolenza bidimensionale in cui la velocità del fluido è parallela ovunque al piano xy e non dipende dalla coordinata z. Infatti, in questo caso

$$\mathbf{rot}\,[\mathbf{vH}] = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{v} = 0$$

e dall'espressione (65,2) segue che il moto del fluido non perturba il campo esterno il quale resta uniforme. Perciò non compaiono correnti e la forza di Lorentz è nulla. Si può dire che il moto bidimensionale « non sente » in generale l'esistenza di un campo uniforme. È questa turbolenza bidimensionale nella quale degenera la turbolenza in un campo magnetico forte esterno.

Capitolo IX

EQUAZIONI DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 75. *Equazioni del campo in dielettrici senza dispersione*

Nel § 58 abbiamo dedotto le equazioni del campo elettromagnetico variabile in metalli:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{75,1}$$

che si verificano per variazione sufficientemente lenta del campo; le frequenze del campo devono essere tali da non incidere sulle dipendenze di $\mathbf{j}$ da $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{B}$ da $\mathbf{H}$ (se in generale $\mathbf{B}$ differisce sensibilmente da $\mathbf{H}$) che si riferiscono al caso stazionario [1]).

Ora consideriamo una questione analoga per il campo elettromagnetico variabile in un mezzo dielettrico e deduciamo equazioni valide per frequenze tali quando i legami tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ e tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ restano ancora gli stessi come nei campi costanti. Se, come ciò di solito si avvera, questo legame si riduce a una semplice proporzionalità, la condizione suindicata significa che si può porre

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{75,2}$$

con valori statici ε e μ.

Queste relazioni si violano (o, come si suole dire, compare la *dispersione* di ε e μ) per frequenze commensurabili con le autofrequenze di quelle oscillazioni molecolari o elettroniche alle quali è dovuta la comparsa della polarizzazione elettrica o magnetica della sostanza. L'ordine di grandezza di queste frequenze dipende della natura della sostanza e varia in limiti molto larghi. Esso può essere assolutamente distinto per fenomeni elettrici e magnetici [2]).

---

[1]) Quanto alla condizione $l \ll \lambda$, essa non ha niente a che vedere con l'applicabilità delle equazioni (75,1) come tali. Il ruolo di questa condizione per le questioni studiate nel cap. VII consiste nella possibilità di trascurare effetti di ritardo nel campo all'esterno del conduttore.

[2]) Così, nel diamante la polarizzazione elettrica è di natura elettronica e la dispersione di ε comincia soltanto nella regione ultravioletta dello spettro. In un fluido polare come acqua la polarizzazione è legata all'orientazione delle molecole con momenti di dipolo rigidi e la dispersione di ε comincia a frequenze $\omega \sim 10^{11}$ (cioè nella gamma di onde di lunghezze in cm). La dispersione μ nei ferromagnetici può cominciare anche prima.

Le equazioni

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{75,3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{75,4}$$

si ottengono immediatamente per sostituzione di **e** e **h** nelle equazioni microscopiche esatte di Maxwell con le loro medie **E** e **B**. Perciò queste equazioni non necessitano di cambiamenti per nessuna condizione. Quanto all'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{75,5}$$

essa si ottiene (cfr. § 6) mediante il calcolo della media dell'equazione microscopica div $\mathbf{e} = 4\pi\rho$ tenendo conto dell'unica circostanza che la carica totale del corpo è nulla. Evidentemente, questa deduzione non dipende in nessuna misura dalla stazionarietà del campo supposta nel § 6 e perciò l'equazione (75,5) conserva la sua forma anche nei campi variabili.

Un'altra equazione dev'essere derivata mediante il calcolo della media dell'equazione

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{75,6}$$

Questa media dà

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{75,7}$$

Tuttavia nel caso di un campo macroscopico dipendente dal tempo è molto difficile stabilire il legame tra la media $\overline{\rho\mathbf{v}}$ e le grandezze trovate precedentemente. È più facile calcolare la media indicata non direttamente bensì nel modo seguente più formale.

Supponiamo provvisoriamente che nel dielettrico siano introdotte cariche esterne alla sua sostanza di densità di volume ρ_{est}. Queste cariche nel loro moto creano la corrente « esterna » $\mathbf{j}_{\text{est}}$, e la conservazione di queste cariche è espressa mediante l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho_{\text{est}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{est}} = 0.$$

Al posto dell'equazione (75,5) avremo

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{est}}$$

(cfr. la (6,8)). Derivando questa uguaglianza rispetto al tempo e usando l'equazione di continuità, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\frac{\partial \rho_{\text{est}}}{\partial t} = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{est}},$$

ossia

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+4\pi \mathbf{j}_{\text{est}}\right)=0.$$

Ne segue che il vettore sotto il segno div può essere rappresentato come rotore di un altro vettore, che indichiamo con $c\mathbf{H}$; allora

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{est}}+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75,8}$$

All'esterno del corpo questa equazione deve coincidere con l'equazione di Maxwell esatta per il campo nel vuoto per cui il vettore $\mathbf{H}$ coincide con l'intensità del campo magnetico. All'interno del corpo, invece, la corrente $\mathbf{j}_{\text{est}}$ nel caso statico è legata al campo magnetico mediante l'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{est}},$$

dove $\mathbf{H}$ è una grandezza introdotta nel § 29 e legata in determinato modo con la media intensità $\mathbf{B}$. Ne deriva che nel limite della frequenza tendente a zero il vettore $\mathbf{H}$ nell'equazione (75,8) coincide con la grandezza statica $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, mentre la supposta « lentezza » di variazione del campo qui significa che anche per questi campi variabili si conserva la stessa dipendenza $\mathbf{H}(\mathbf{B})$. In tal modo $\mathbf{H}$ diventa una grandezza ben determinata e, omettendo la grandezza ausiliare $\mathbf{j}_{\text{est}}$, otteniamo infine l'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{75,9}$$

La grandezza $\dot{\mathbf{D}}/4\pi$ si dice *corrente di spostamento*.

Questa equazione sostituisce per i dielettrici la prima delle equazioni (75,1) descrivente il campo nei metalli. Si può supporre che nel caso dei metalli in questa equazione per un campo variabile si debba tener conto di un termine con la derivata $\partial\mathbf{E}/\partial t$, cioè che si debba scrivere

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\,\sigma\mathbf{E}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{75,10}$$

con il coefficiente costante ε. Tuttavia per conduttori buoni (metalli autentici) l'introduzione di un termine simile sarebbe insensata. I due termini a secondo membro dell'equazione (75,10) rappresentano infatti i primi termini dello sviluppo in potenze della frequenza del campo. Poiché quest'ultima è supposta sufficientemente piccola, il secondo termine significherebbe nel migliore dei casi l'introduzione di una piccola correzione. In realtà, invece, esso non può avere neanche questo senso poiché nei metalli di fatto le correzioni dovute

alla disuniformità spaziale del campo diventano importanti prima che la correzione alla frequenza (si veda la nota alla pag. 298).

Esiste tuttavia una categoria di corpi (conduttori cattivi) per i quali l'equazione (75,10) può aver senso. Per ragioni particolari (piccola quantità di elettroni di conduzione nei semiconduttori, scarsa mobilità di ioni nelle soluzioni elettrolitiche) la conduzione di tali sostanze è anomalmente piccola, e perciò il secondo termine a secondo membro dell'equazione (75,10) può essere paragonato con il primo termine e persino superarlo nel caso di frequenze per le quali si possono considerare σ e ε costanti. In un campo monocromatico il rapporto tra il secondo e il primo termine è $\varepsilon\omega/4\pi\sigma$. Se questo rapporto è piccolo, il corpo si comporta come conduttore ordinario di conduzione σ. Per le frequenze $\omega \gg 4\pi\sigma/\varepsilon$ esso si comporta come dielettrico con permettività dielettrica ε.

In un mezzo omogeneo con ε e μ costanti le equazioni (75,3-5) e (75,9) assumono la forma

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{75,11}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{75,12}$$

Escludendo da queste equazioni in modo ordinario $\mathbf{E}$ (o $\mathbf{H}$) otteniamo

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

e poiché $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$, abbiamo così l'equazione d'onda

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Ne deriva che la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo dielettrico omogeneo è

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{75,13}$$

La densità del flusso di energia è la somma del flusso di energia del campo elettromagnetico e del flusso di energia trasportata direttamente dalla sostanza in moto. Nel mezzo immobile (che stiamo qui considerando) l'ultima parte manca e la densità del flusso di energia nel mezzo dielettrico è data dalla stessa formula (30,20):

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \tag{75,14}$$

come nei metalli. È facile provarlo calcolando div **S**. Usando le equazioni (75,4) e (75,9) otteniamo

$$\operatorname{div}\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H})=-\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{75,15}$$

in accordo con l'espressione

$$dU=\frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D}+\mathbf{H}\,d\mathbf{B})$$

per il differenziale dell'energia interna del dielettrico per densità ed entropia date.

Come è noto, la condizione di simmetria del tensore energia-impulso quadridimensionale di qualsiasi sistema chiuso (nel caso considerato abbiamo a che fare con un dielettrico nel campo elettromagnetico) conduce all'uguaglianza (a meno del fattore c^2) tra la densità del flusso di energia e la densità spaziale dell'impulso del sistema (cfr. II, §§ 32, 94). Perciò quest'ultima vale

$$\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]. \tag{75,16}$$

In particolare, di questa circostanza bisogna tener conto nella determinazione delle forze che agiscono sulla sostanza dielettrica nel campo elettromagnetico variabile. Si può calcolare la forza **f** (riferita all'unità di volume) in base al tensore degli sforzi σ_{ik} come

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

In questo caso, tuttavia, si deve tener conto che σ_{ik} è la densità del flusso dell'impulso che fa variare l'impulso sia della sostanza che del campo elettromagnetico. Se con **f** si intende la forza agente esclusivamente sul mezzo, dall'espressione scritta bisogna sottrarre la variazione dell'impulso dell'unità di volume del campo, cioè

$$f_i=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c}[\mathbf{EH}]_i. \tag{75,17}$$

In un campo costante l'ultimo termine è nullo, la ragione per cui questo problema prima non è stato sorto.

La lentezza di variazione del campo consente di ricorrere per il tensore degli sforzi alle espressioni precedenti ottenute per il campo costante. Così, per il mezzo dielettrico liquido il tensore σ_{ik} è dato dalla somma delle parti elettrica (15,9) e magnetica (35,2).

Ma derivando queste espressioni rispetto alle coordinate si deve tener conto del fatto che al posto delle equazioni rot $\mathbf{E}=0$ e

rot $\mathbf{H} = 0$ per un campo costante (libero dalle correnti) abbiamo ora le equazioni (75,12). Ciò implica la comparsa di termini nuovi

$$-\frac{\varepsilon}{4\pi}[\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}]-\frac{\mu}{4\pi}[\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}]$$

che ora sono non nulli, bensì valgono

$$\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{E}\dot{\mathbf{H}}]-\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}[\mathbf{H}\dot{\mathbf{E}}]=\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}].$$

In tal modo, la forza cercata è

$$\mathbf{f}=-\nabla P_0(\rho, T)-\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon-\frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu+$$
$$+\nabla\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\frac{E^2}{8\pi}+\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\frac{H^2}{8\pi}\right]+\frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]. \quad (75,18)$$

L'ultimo termine in questa espressione si chiama *forza di Abraham* (*M. Abraham*, 1909).

§ 76. *Elettrodinamica dei dielettrici in moto*

Il movimento del mezzo implica la comparsa dei fenomeni di reciproca influenza tra campi elettrici e magnetici. Per i conduttori questi fenomeni sono stati già studiati nel § 63, e ora studiamo questo problema per i dielettrici. In questo caso si tratta infatti di fenomeni che si verificano nei corpi in moto in presenza del campo esterno elettrico o magnetico. Sottolineiamo che questi fenomeni non hanno niente a che vedere con la comparsa dei campi dovuta al movimento stesso dei corpi (ciò che abbiamo già studiato nei §§ 36, 64).

Come punto di partenza nel § 63 sono state le formule di trasformazione del campo nel passare da un sistema di coordinate a un altro. In questo caso era sufficiente conoscere le formule ordinarie di trasformazione dell'intensità elettrica e magnetica del campo nel vuoto le cui medie forniscono immediatamente le formule di trasformazione di **E** in **B**. Per i dielettrici la questione è più complicata in quanto esiste grande quantità di grandezze che descrivono il campo elettromagnetico.

Nel caso dei corpi macroscopici in moto si ha a che fare di solito con velocità piccole rispetto alla velocità della luce. Tuttavia, è più facile ottenere le formule approssimate di trasformazione corrispondente sulla base delle formule relativistiche che sono valide qualsiasi siano le velocità.

Come è noto, nell'elettrodinamica del campo nel vuoto le componenti dei vettori **e** e **h** dell'intensità elettrica e magnetica sono in realtà componenti di un tensore quadridimensionale (4-tensore) antisimmetrico del secondo ordine (cfr. II, § 23). Poiché **E** e **B** sono le

medie di **e** e **h**, per queste grandezze è valida l'osservazione precedente. In tal modo, esiste un 4-tensore $F_{\mu\nu}$ avente le seguenti componenti [1]):

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76,1}$$

Mediante questo tensore la prima coppia delle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{76,2}$$

può essere scritta nella forma quadridimensionale seguente:

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}=0. \tag{76,3}$$

Con ciò si rivela l'invarianza relativistica di queste equazioni. È da sottolineare che l'applicabilità stessa delle equazioni (76,2) ai corpi in moto è di per sé evidente poiché queste equazioni si ottengono direttamente sostituendo a **e** e **h** nelle equazioni microscopiche esatte di Maxwell le loro medie **E** e **B**.

Ma la seconda coppia delle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{76,4}$$

conserva anch'essa l'aspetto formale nei mezzi in moto. Ciò è evidente dalle considerazioni citate nel paragrafo precedente nelle quali sono state usate esclusivamente proprietà generali (la nullità della carica totale, per esempio) cui godono sia i corpi in moto che quelli immobili. In questo caso, tuttavia, i legami delle grandezze **D** e **B** con le grandezze **E** e **H** non devono coincidere affatto con quelli che esistono nei mezzi immobili.

Le equazioni (76,4), essendo valide sia per i corpi immobili che per quelli in moto, devono conservare la loro forma per la trasformazione di Lorentz. Per il campo nel vuoto i vettori **D** e **H** coincidono con **E** e **B** e l'invarianza relativistica della seconda coppia delle equazioni di Maxwell significa che queste ultime pure possono essere scritte nella forma quadridimensionale mediante lo stesso tensore

[1]) In questo paragrafo gli indici tensoriali quadridimensionali, che descrivono i valori 0, 1, 2, 3, si indicano con le lettere greche λ, μ, ν.

$F_{\lambda\mu}$: $\partial F^{\lambda\mu}/\partial x^{\mu} = 0$ (cfr. II, § 30). È chiaro perciò che per assicurare l'invarianza relativistica delle equazioni (76,4) è necessario che le componenti dei vettori **D** e **H** si trasformino in realtà come componenti di un 4-tensore costruito analogamente al tensore $F_{\mu\nu}$. Indichiamo questo tensore con $H_{\mu\nu}$:

$$H_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_y \\ -D_y & H_z & 0 & -H_x \\ -D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$H^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76,5}$$

Esso consente di scrivere le equazioni (76,4) nella forma

$$\frac{\partial H^{\lambda\mu}}{\partial x^{\mu}}=0. \tag{76,6}$$

Precisando il carattere tensoriale quadridimensionale delle grandezze **E**, **D**, **H** e **B**, abbiamo stabilito così la legge della loro trasformazione nel passare da un sistema inerziale ad un altro. Tuttavia a interessarci è non tanto questa legge quanto il legame tra le dette grandezze nel mezzo in moto, il quale generalizza le relazioni $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ valide per i corpi immobili.

Indichiamo con u^{μ} il 4-vettore di velocità del mezzo; le sue componenti sono legate con la velocità tridimensionale **v** mediante

$$u^{\mu}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\ \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Tramite questo 4-vettore e i 4-tensori $F^{\mu\nu}$ e $H^{\mu\nu}$ costruiamo le combinazioni che nel mezzo immobile si trasformano in **E** e **D**. Tali sono i 4-vettori $F^{\lambda\mu}u_{\mu}$ e $H^{\lambda\mu}u_{\mu}$; per $\mathbf{v} = 0$ le loro componenti temporali si annullano e quelle spaziali si trasformano in **E** e **D**, rispettivamente. È ovvio perciò che la generalizzazione quadridimensionale dell'uguaglianza $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ è [1])

$$H^{\lambda\mu}u_{\mu} = \varepsilon F^{\lambda\mu}u_{\mu}. \tag{76,7}$$

Proviamo analogamente che la generalizzazione della relazione $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ è rappresentata da un'uguaglianza quadridimensionale

$$F_{\lambda\mu}u_{\nu} + F_{\mu\nu}u_{\lambda} + F_{\nu\lambda}u_{\mu} = \mu\,(H_{\lambda\mu}u_{\nu} + H_{\mu\nu}u_{\lambda} + H_{\nu\lambda}u_{\mu}). \tag{76,8}$$

[1]) È da notare che scrivendo relazioni contenenti il solo valore locale della velocità trascuriamo con ciò effetti deboli dovuti all'esistenza eventuale del gradiente della velocità (effetti giromagnetici, ad esempio; cfr. § 36).

Passando dalle notazioni quadridimensionali nuovamente alle grandezze tridimensionali, da queste due equazioni deduciamo relazioni vettoriali [1])

$$\begin{aligned} \mathbf{D}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}] &= \varepsilon\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right), \\ \mathbf{B}+\frac{1}{c}[\mathbf{Ev}] &= \mu\left(\mathbf{H}+\frac{1}{c}[\mathbf{Dv}]\right). \end{aligned} \tag{76,9}$$

Queste formule, ottenute da H. Minkowski nel 1908, sono esatte nel senso che finora non contengono nessun'ipotesi sul valore della velocità. Supponendo piccolo il rapporto v/c e risolvendo queste equazioni rispetto a **D** e **B** a meno dei termini del primo ordine, otteniamo

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{vH}], \tag{76,10}$$

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}[\mathbf{Ev}]. \tag{76,11}$$

Le ultime formule assieme alle equazioni di Maxwell (76,2) e (76,4) costituiscono la base dell'elettrodinamica dei dielettrici in moto.

Le condizioni di frontiera per le equazioni di Maxwell sono soggette anch'esse a una modifica. Dalle equazioni div $\mathbf{D}=0$ e div $\mathbf{B}=0$ derivano come sempre le condizioni di continuità delle componenti normali dell'induzione:

$$D_{n1}=D_{n2},\ B_{n1}=B_{n2}. \tag{76,12}$$

Quanto alle condizioni per le componenti tangenziali del campo, esse si ottengono più facilmente passando dal sistema inerziale immobile K a un sistema nuovo K' che si muove con l'elemento di superficie considerato del corpo; la velocità di quest'ultimo (diretta lungo la normale **n**) indichiamo con v_n. Nel sistema K' sono valide le condizioni ordinarie di continuità di $\mathbf{E}'_t$ e $\mathbf{H}'_t$. In accordo con le formule di trasformazione relativistiche (cfr. II, § 24) queste condizioni sono equivalenti alla condizione di continuità delle componenti tangenziali dei vettori

$$\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vB}],\ \mathbf{H}-\frac{1}{c}[\mathbf{vD}].$$

[1]) Se una delle relazioni $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ non si verifica nel mezzo immobile, allora la relazione corrispondente (76,9) va sostituita con un'altra dipendenza funzionale fra due somme vettoriali che figurano in ambedue membri dell'uguaglianza.

Proiettandole sul piano perpendicolare a **n** e tenendo conto dell'uguaglianza (76,12), otteniamo le condizioni di frontiera richieste:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1),$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \qquad (76,13)$$

Sostituendovi le espressioni (76,10-11) e trascurando i termini di ordine superiore in v/c, abbiamo

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c}(\mu_2 - \mu_1)\mathbf{H}_t,$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -\frac{v_n}{c}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\mathbf{E}_t. \qquad (76,14)$$

In questa approssimazione a secondo membro delle uguaglianze si possono non distinguere valori assunti da **H** e **E** sui due lati della superficie di separazione.

Se il corpo si muove in modo tale che sua superficie non si sposti nella direzione perpendicolare a se stessa (per rotazione del corpo attorno al proprio asse, ad esempio), allora $v_n = 0$. Questo è l'unico caso in cui le condizioni di frontiera (76,13) o (76,14) si riducono alle condizioni ordinarie di continuità di $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{H}_t$.

Problemi

1. Una sfera dielettrica ruota uniformemente (nel vuoto) in un campo magnetico uniforme costante $\mathfrak{H}$. Determinare il campo elettrico che si crea attorno alla sfera.

Soluzione. Per il calcolo del campo elettrico generato il campo magnetico va considerato tale come per la sfera immobile poiché se tenessimo conto dell'influenza inversa del campo magnetico variabile ciò implicherebbe correzioni infinitesime di ordine superiore. All'interno della sfera il campo magnetico è uniforme e vale

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{3}{2+\mu}\mathfrak{H}$$

(cfr. la formula (8,2)).

Essendo stazionaria la rotazione, il campo elettrico generato è costante e, come qualsiasi campo elettrico costante, gode del potenziale: $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. All'esterno della sfera il potenziale verifica l'equazione $\Delta\varphi^{(e)} = 0$ e all'interno della sfera l'equazione

$$\Delta\varphi^{(i)} = 2\frac{\varepsilon\mu - 1}{c\varepsilon}\Omega\mathbf{H}^{(i)}, \qquad (1)$$

ove $\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare della rotazione (questa equazione si deduce da div $\mathbf{D} = 0$ con la sostituzione per **D** dell'espressione (76,10) con $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$). La

condizione di continuità della componente normale di **D** sulla superficie sferica mostra che

$$-\varepsilon \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r}\Big|_{r=a} + \frac{\varepsilon\mu-1}{c}\, a\,\{\mathbf{\Omega H}^{(i)} - (\mathbf{\Omega n})(\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{n})\} = -\frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial r}\Big|_{r=a} \tag{2}$$

(a è il raggio della sfera, **n** il vettore unitario nella direzione **r**).

Per simmetria della sfera il campo elettrico cercato è definito in tutto da due vettori costanti: $\mathbf{\Omega}$ e $\mathfrak{H}$. Con le loro componenti si possono costruire linearmente rispetto a $\mathfrak{H}$ e $\mathbf{\Omega}$ lo scalare $\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$ e il tensore

$$\mathfrak{H}_i\Omega_k + \mathfrak{H}_k\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}$$

con la somma dei termini diagonali nulla. Conformemente a ciò cerchiamo il potenziale del campo all'esterno della sfera nella forma

$$\varphi^{(e)} = \frac{1}{6} D_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2} D_{ik} \frac{n_i n_k}{r^3} \tag{3}$$

dove D_{ik} è un tensore costante (fra l'altro $D_{ii} = 0$), D_{ik} il tensore del momento di quadrupolo elettrico della sfera (cfr. II § 41). Il termine della forma costante/r non può essere in $\varphi^{(e)}$ poiché esso fornirebbe il flusso totale non nullo del campo elettrico attraverso la superficie che delimita la sfera (mentre la sfera non è carica). Il potenziale del campo all'interno della sfera cerchiamo nella forma

$$\varphi^{(i)} = \frac{r^2}{2a^5} D_{ik} n_i n_k + \frac{\varepsilon\mu-1}{3c\varepsilon}\, \mathbf{\Omega H}^{(i)}\,(r^2 - a^2). \tag{4}$$

Il primo termine rappresenta la soluzione dell'equazione $\Delta\varphi = 0$ e il coefficiente in essa assicura la continuità del potenziale (e con ciò anche di $\mathbf{E}_t$) sulla superficie sferica. Sostituendo le (3) e (4) nella (2) troviamo

$$D_{ik} = -\frac{a^5}{c}\,\frac{3(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\left(\mathfrak{H}_i\Omega_k + \mathfrak{H}_k\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}\right). \tag{5}$$

In tal modo, attorno alla sfera ruotante si crea un campo elettrico avente carattere di quadrupolo e il momento di quadrupolo della sfera è dato dalla formula (5). In particolare, se la sfera ruota attorno alla direzione del campo esterno (asse z), allora D_{ik} ha le sole componenti diagonali

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c}\,\frac{4(\varepsilon\mu-1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\,\mathfrak{H}\mathbf{\Omega}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz}.$$

Analogamente, attorno alla sfera ruotante in un campo elettrico omogeneo si crea un campo di quadrupolo magnetico. Il momento di quadrupolo magnetico della sfera è dato in questo caso da una formula che si deduce dalla (5) cambiando il segno e sostituendovi ε, μ, $\mathfrak{H}$ con μ, ε, $\mathfrak{E}$ rispettivamente.

2. Una sfera magnetizzata ruota uniformemente (nel vuoto) attorno al suo asse parallelo all'asse di magnetizzazione. Determinare il campo elettrico che si crea attorno alla sfera [1]).

---

[1]) Se le direzioni della magnetizzazione e dell'asse di rotazione non coincidono, cambia sostanzialmente l'impostazione del problema poiché la sfera produce la radiazione di onde elettromagnetiche nello spazio circostante.

Soluzione. Il campo magnetico all'interno della sfera è omogeneo e si esprime mediante la costante di magnetizzazione **M** in accordo con le equazioni $\mathbf{B}^{(i)} + 2\mathbf{H}^{(i)} = 0$ (cfr. la formula (8,1)) e $\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)} = 4\pi\mathbf{M}$ dalle quali

$$\mathbf{B}^{(i)} = \frac{8\pi\mathbf{M}}{3}, \quad \mathbf{H}^{(i)} = -\frac{4\pi\mathbf{M}}{3}.$$

In questo caso la seconda delle formule (76,9) non si verifica (in quanto non si verifica la formula $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ per un ferromagnete immobile), mentre dalla prima formula per l'interno della sfera otteniamo

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}[\mathbf{vB}] - \frac{1}{c}[\mathbf{vH}] = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}[\mathbf{vM}].$$

Il potenziale del campo elettrico all'esterno della sfera verifica l'equazione $\Delta\varphi^{(e)} = 0$ e all'interno della sfera l'equazione

$$\Delta\varphi^{(i)} = \frac{8\pi(2\varepsilon+1)}{3c\varepsilon} M\Omega.$$

La condizione di continuità di D_n sulla superficie della sfera è

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial r}\bigg|_{r=a} + \frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c} a\Omega M \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial r}\bigg|_{r=a},$$

ove θ è un angolo formato dalla normale **n** e dalla direzione Ω e **M** (asse z). Cerchiamo $\varphi^{(e)}$ e $\varphi^{(i)}$ nella forma

$$\varphi^{(e)} = \frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3} = \frac{D_{zz}}{4r^3}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$\varphi^{(i)} = \frac{r^2}{4a^5} D_{zz}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon} M\Omega\,(r^2 - a^2)$$

e dalla condizione di frontiera otteniamo la seguente espressione per il momento di quadrupolo elettrico che si crea nella sfera ruotante:

$$D_{zz} = -\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)} a^2\Omega\mathcal{M}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

($\mathcal{M}$ è il momento magnetico totale della sfera). Per una sfera metallica bisogna porre $\varepsilon \to \infty$ e allora

$$D_{zz} = -\frac{4}{3c}\Omega\mathcal{M}a^2.$$

§ 77. *Dispersione della permettività dielettrica*

Passiamo ora allo studio della questione importantissima sui campi elettromagnetici rapidamente variabili le cui frequenze non sono limitate dalla condizione di piccolezza rispetto alle frequenze caratteristiche affinché stabilisca la polarizzazione elettrica e magnetica della sostanza.

Un campo elettromagnetico variabile nel tempo è necessariamente variabile anche nello spazio. Per la frequenza ω la periodicità spaziale va determinata dalla lunghezza d'onda il cui ordine di grandezza è $\lambda \sim c/\omega$. All'aumentare ulteriore della frequenza la grandezza λ diventa in fin dei conti commensurabile con le dimensioni atomi-

che a. In queste condizioni è impossibile la descrizione macroscopica del campo.

Ciò premesso, si può chiedere se esiste in generale un dominio di frequenze in cui, da una parte, siano già notevoli fenomeni dispersivi e, d'altra parte, sia ancora ammissibile la considerazione macroscopica? È facile vedere che questo dominio deve necessariamente esistere. Il meccanismo più rapido della comparsa nella sostanza della polarizzazione elettrica o magnetica è quello elettronico. Il tempo di rilassamento è dell'ordine di grandezza dei tempi atomici a/v, ove a sono le dimensioni atomiche e v le velocità elettroniche nell'atomo. Poiché $v \ll c$, anche la lunghezza d'onda $\lambda \sim ac/v$ corrispondente a questi tempi è ancora grande rispetto ad a. Supponiamo più avanti soddisfatta la condizione $\lambda \gg a$ [1]). Tuttavia, si deve tener conto che questa condizione può essere insufficiente: nei metalli a temperature basse esiste il dominio di frequenze in cui la teoria macroscopica è inapplicabile sebbene sia verificata la disuguaglianza $c/\omega \gg a$ (cfr. § 87).

La teoria formale trattata più avanti si riferisce in misura uguale sia ai metalli che ai dielettrici. Per frequenze corrispondenti ai moti elettronici intraatomici (frequenze ottiche) e più grandi ancora scompare di fatto persino la distinzione quantitativa tra le proprietà dei metalli e dei dielettrici.

Già dalle considerazioni esposte nel § 75 risulta con chiarezza che la scrittura formale delle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{77,1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{77,2}$$

resta la stessa nei campi elettromagnetici variabili arbitrari. Ma queste equazioni in misura notevole sono prive di oggettività finché non sarà stabilito un legame fra le grandezze **D**, **B** e **E**, **H** che in esse figurano. Per grandi frequenze qui considerate ora questo legame non ha niente a che vedere con quello che si verifica nel caso statico e al quale abbiamo ricorso nei campi variabili senza dispersione.

Prima di tutto, è violata la proprietà fondamentale di questo legame che aveva luogo precedentemente, ossia la dipendenza univoca di **D** e **B** dai valori di **E** e **H** allo stesso istante di tempo. Nel caso generale di un campo variabile qualsiasi i valori **D** e **B** in un istante di tempo non sono determinati affatto dai soli valori **E** e **H** allo stesso istante. Viceversa, si può affermare che i valori **D** e **B** in un dato istante dipendono, in generale, dai valori delle funzioni $\mathbf{E}(t)$ e $\mathbf{H}(t)$ in tutti gli istanti precedenti. Questa circostanza esprime il fatto che la polarizzazione elettrica o magnetica stabilitasi della sostanza

[1]) Gli effetti legati ai termini dei successivi ordini di grandezza rispetto al piccolo rapporto a/λ saranno studiati nei §§ 104-106.

non fa in tempo a seguire la variazione del campo elettromagnetico. (In questo caso le frequenze per cui compaiono fenomeni dispersivi nelle proprietà elettriche e magnetiche della sostanza possono essere assolutamente distinte.)

In questo paragrafo parleremo della dipendenza di **D** da **E**, mentre le particolarità specifiche della dispersione delle proprietà magnetiche della sostanza saranno trattate nel § 79.

Nel § 6 il vettore di polarizzazione **P** è stato introdotto in accordo con la definizione $\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, ove ρ è la densità autentica (microscopica) di cariche nella sostanza. Questa uguaglianza esprimeva la neutralità elettrica del corpo nel suo insieme ed era sufficiente (assieme alla condizione $\mathbf{P} = 0$ all'esterno del corpo) per mostrare che il momento elettrico totale del corpo è uguale all'integrale $\int \mathbf{P}\, dV$. Evidentemente questa conclusione si riferisce ai campi variabili nella stessa misura che ai campi costanti. Quindi, in campo variabile qualsiasi, anche se esiste la dispersione, il vettore $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi$ conserva il significato fisico del momento elettrico riferito all'unità di volume della sostanza.

Nei campi variabili rapidamente si ha a che fare di solito con intensità relativamente piccole per cui il legame fra **D** e **E** si può supporre lineare [1]). La forma più generale della dipendenza lineare fra $\mathbf{D}(t)$ e i valori della funzione $\mathbf{E}(t)$ in tutti gli istanti precedenti può essere scritta come relazione integrale

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau)\, \mathbf{E}(t-\tau)\, d\tau \qquad (77,3)$$

(è comodo evidenziare il termine $\mathbf{E}(t)$ per ragioni che saranno precisate nel seguito). Qui $f(\tau)$ è la funzione del tempo dipendente dalle proprietà del mezzo. Per analogia con la formula elettrostatica $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ scriveremo la relazione (77,3) nella forma simbolica seguente:

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E},$$

ove $\hat{\varepsilon}$ è un operatore integrale lineare la cui azione è determinata in base alla formula (77,3).

Ogni campo variabile può essere ridotto (mediante lo sviluppo di Fourier) a un insieme di componenti monocromatiche in cui la

---

[1]) Qui supponiamo che **D** dipenda linearmente soltanto da **E**, ma non da **H**. In un campo costante la dipendenza lineare di **D** da **H** è esclusa dalla condizione di invarianza rispetto al cambiamento del segno temporale. In un campo variabile questa condizione non si verifica e la dipendenza lineare di **D** da **H** è possibile per tipi di simmetria determinati della sostanza. Essa si riferisce, tuttavia, a quei piccoli effetti $\sim a/\lambda$ menzionati nella nota alla pag. 389.

dipendenza di tutte le grandezze dal tempo è data dal fattore $e^{-i\omega t}$. Per questi campi il legame (77,3) fra **D** e **E** assume la forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}, \tag{77,4}$$

ove la funzione $\varepsilon(\omega)$ è definita come

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau. \tag{77,5}$$

Quindi, per i campi periodici è possibile introdurre la nozione di permettività dielettrica come coefficiente di proporzionalità fra **D** e **E**; fra l'altro, tuttavia, questo coefficiente dipende non esclusivamente dalle proprietà del mezzo, ma anche dalla frequenza del campo. La dipendenza di ε dalla frequenza si chiama anche legge della sua *dispersione*.

La funzione $\varepsilon(\omega)$ è in generale complessa e ne indicheremo le parti reale e immaginaria con ε' e ε'':

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega). \tag{77,6}$$

Dalla definizione (77,5) si vede immediatamente che

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \tag{77,7}$$

Separando in questa relazione le parti reale ed immaginaria, otteniamo

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \tag{77,8}$$

In tal modo, $\varepsilon'(\omega)$ è una funzione pari e $\varepsilon''(\omega)$ funzione dispari della frequenza.

Per frequenze piccole (rispetto alla frontiera dell'inizio della dispersione) la funzione $\varepsilon(\omega)$ si può sviluppare in serie di potenze di ω. Lo sviluppo della funzione pari $\varepsilon'(\omega)$ contiene termini delle sole potenze pari, mentre lo sviluppo della funzione dispari $\varepsilon''(\omega)$ termini delle potenze dispari. Nel limite $\omega \to 0$ la funzione $\varepsilon(\omega)$ nei dielettrici tende, ovviamente, alla permettività dielettrica elettrostatica (che indichiamo qui con ε_0). Perciò nei dielettrici lo sviluppo di $\varepsilon'(\omega)$ comincia dal termine costante ε_0, mentre lo sviluppo di $\varepsilon''(\omega)$ comincia, in generale, da un termine proporzionale a ω.

Per piccole frequenze la funzione $\varepsilon(\omega)$ si può considerare anche nei metalli supponendo che nel limite $\omega \to 0$ l'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

si trasformi nell'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

nel caso del campo costante nei conduttori. Dal confronto delle due equazioni si vede che per $\omega \to 0$ la derivata $\partial \mathbf{D}/\partial t$ deve trasformarsi in $4\pi\sigma\mathbf{E}$. Ma in un campo periodico $\partial \mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, e si ottiene così la seguente espressione limite di $\varepsilon(\omega)$ per frequenze piccole:

$$\varepsilon(\omega) = i\frac{4\pi\sigma}{\omega}. \tag{77,9}$$

Quindi, nei conduttori lo sviluppo della funzione $\varepsilon(\omega)$ comincia da un termine immaginario proporzionale a $1/\omega$ che si esprime mediante la conducibilità ordinaria σ rispetto alle correnti costanti [1]). Il termine successivo nello sviluppo di $\varepsilon(\omega)$ è una costante reale. Questa costante, tuttavia, per i metalli non ha quel significato elettrostatico di cui essa gode nei dielettrici [2]). Inoltre, bisogna indicare di nuovo che questo termine dello sviluppo può essere privo di qualsiasi senso in generale se gli effetti della disuniformità spaziale del campo dell'onda elettromagnetica compaiono prima che gli effetti della sua periodicità temporale.

§ 78. *Permettività dielettrica per frequenze molto grandi*

Nel limite $\omega \to \infty$ la funzione $\varepsilon(\omega)$ tende all'unità. Questo è evidente già da considerazioni fisiche elementari: per una variazione del campo sufficientemente rapida, in generale, processi di polarizzazione che conducono a un'induzione $\mathbf{D}$ diversa da $\mathbf{E}$ non riescono a prodursi.

È possibile stabilire la forma limite della funzione per grandi frequenze che sia valida per solidi qualsiasi (metalli o dielettrici). Quel che importa è che la frequenza del campo deve essere grande rispetto alle frequenze del moto di tutti (o almeno della maggioranza) gli elettroni negli atomi della sostanza in esame. Se questa condizione è osservata nel calcolare la polarizzazione della sostanza gli elettroni si possono supporre liberi trascurando la loro interazione reciproca e con i nuclei atomici.

Le velocità v degli elettroni negli atomi sono piccole rispetto alla velocità della luce. Perciò le distanze v/ω attraversate dagli elettroni durante il periodo dell'onda sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda c/ω. Ciò premesso, nel calcolare la velocità acquistata da un

---

[1]) Talvolta la parte immaginaria della funzione $\varepsilon(\omega)$ per tutte le frequenze è presentata nella forma (77,9), il che si riduce all'introduzione al posto di $\varepsilon''(\omega)$ di una nuova funzione $\sigma(\omega)$; con questa nuova notazione della funzione si esaurisce il suo significato fisico.

[2]) A scanso di equivoci sottolineiamo che rispetto al § 75 qui c'è un cambiamento delle notazioni. Nell'equazione (75,10) per i conduttori cattivi al posto della grandezza $\varepsilon(\omega)$ si scrive la somma $4\pi i\sigma/\omega + \varepsilon$.

elettrone nel campo dell'onda elettromagnetica si può supporre quest'ultimo uniforme.

L'equazione del moto dice:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$$

(e, m sono la carica e la massa dell'elettrone e $\mathbf{v}'$ la velocità complementare acquistata dall'elettrone nel campo dell'onda); ne segue che $\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega$. Quanto allo spostamento $\mathbf{r}$ dell'elettrone sotto l'influsso del campo, esso è legato con $\mathbf{v}'$ mediante la relazione $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}'$, perciò $\mathbf{r} = -e\mathbf{E}/m\omega^2$. La polarizzazione $\mathbf{P}$ della sostanza è il momento di dipolo dell'unità di suo volume. Sommando a tutti gli elettroni troviamo

$$\mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2} N\mathbf{E},$$

dove N è il numero di elettroni in tutti gli atomi dell'unità di volume della sostanza. D'altra parte, in accordo con la definizione dell'induzione elettrica $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. Perciò otteniamo infine la seguente formula:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}. \tag{78,1}$$

Il dominio di applicabilità di questa formula comincia di fatto dal lontano ultravioletto in elementi più leggeri oppure dalle frequenze di Roentgen in elementi più pesanti.

Per la conservazione del significato letterale della grandezza $\varepsilon(\omega)$ che essa ha figurando nelle equazioni di Maxwell la frequenza deve anche verificare la condizione $\omega \ll c/a$. Vedremo tuttavia nel seguito (§ 124) che all'espressione (78,1) si può attribuire un significato fisico anche per frequenze più grandi.

§ 79. *Dispersione della permeabilità magnetica*

A differenza di $\varepsilon(\omega)$ la permeabilità magnetica $\mu(\omega)$ perde relativamente presto il proprio significato fisico all'aumentare della frequenza; per tali frequenze sarebbe illecito tener conto della differenza di $\mu(\omega)$ da 1. Per mostrarlo vediamo in che misura nel campo variabile si conserva il significato fisico della grandezza $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ quale momento magnetico dell'unità di volume. Il momento magnetico del corpo è, per definizione, l'integrale

$$\frac{1}{2c}\int [\mathbf{r}\cdot\overline{\rho\mathbf{v}}]\, dV. \tag{79,1}$$

La media della densità microscopica di corrente è legata con il campo medio mediante l'equazione (75,7):

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{79,2}$$

Sottraendo dalla (79,2) termine a termine l'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

otteniamo

$$\overline{\rho\mathbf{v}}=c\operatorname{rot}\mathbf{M}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}. \tag{79,3}$$

Fra l'altro, l'integrale (79,1) si può ridurre alla forma $\int\mathbf{M}\,dV$ sotto la sola condizione che $\overline{\rho\mathbf{v}}=c\operatorname{rot}\mathbf{M}$ (e $\mathbf{M}=0$ all'esterno del corpo), come ciò è stato mostrato nel § 29.

In tal modo, il significato fisico della grandezza $\mathbf{M}$ (e con essa della suscettività magnetica) è legato alla possibilità di trascurare il termine $\partial\mathbf{P}/\partial t$ nella formula (79,3). Vediamo in che misura possono essere soddisfatte le condizioni che ammettono questa possibilità.

Per una data frequenza le condizioni più favorevoli per la misurazione della suscettività richiedono che il corpo abbia possibilmente piccole dimensioni (per aumentare le derivate spaziali in rot $\mathbf{M}$) e che il campo elettrico sia possibilmente debole (per diminuire $\mathbf{P}$). Il campo dell'onda elettromagnetica non soddisfa quest'ultima condizione poiché in esso $E\sim H$. Perciò consideriamo un campo magnetico variabile nel solenoide, ad esempio, quando il corpo in esame è collocato sul suo asse. Il campo elettrico compare soltanto in seguito all'induzione dal campo magnetico variabile. È possibile ottenere l'ordine di grandezza della sua intensità all'interno del corpo stimando i due membri dell'equazione

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

da cui $E/l\sim\omega H/c$ oppure $E\sim(\omega l/c)\,H$, ove l sono le dimensioni del corpo. Ponendo $\varepsilon-1\sim1$ avremo

$$\frac{\partial P}{\partial t}\sim\omega E\sim\frac{\omega^2 l}{c}H.$$

Per le derivate spaziali del momento magnetico $\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}$ abbiamo

$$c\operatorname{rot}\mathbf{M}\sim\frac{c}{l}\chi\mathbf{H}.$$

Confrontando ambedue le espressioni troviamo che la prima è piccola rispetto alla seconda se

$$l^2\ll\chi c^2/\omega^2. \tag{79,4}$$

È chiaro che la nozione di suscettività magnetica può essere sensata sotto l'unica condizione che questa disuguaglianza ammetta (almeno con una riserva non molto grande) dimensioni macroscopiche del corpo, cioè che essa sia commensurabile con la disuguaglianza $l \gg a$, ove a sono le dimensioni atomiche. Questa condizione va violata a priori già nel dominio delle frequenze ottiche. Infatti, la suscettività magnetica per queste frequenze è una grandezza $\sim v^2/c^2$ [1]) (v sono le velocità elettroniche nell'atomo); quanto alle frequenze ottiche stesse, esse sono $\omega \sim v/a$ e perciò il secondo membro della disuguaglianza (79,4) $\sim a^2$.

In tal modo, non ha senso ricorrere alla permeabilità magnetica già a partire dal dominio ottico delle frequenze e per lo studio dei fenomeni corrispondenti bisogna porre $\mu = 1$. L'intento di tener conto della differenza fra **B** e **H** in questo dominio sarebbe una vera e propria esagerazione della precisione. Infatti se tenessimo conto della differenza di μ da 1 ciò esagererebbe la precisione per la maggioranza dei fenomeni già a frequenze molto più basse di quelle ottiche [2]).

L'esistenza di dispersione sensibile della permeabilità magnetica conduce alla possibilità di esistenza delle oscillazioni quasi-stazionarie della magnetizzazione nei corpi ferromagnetici; per escludere un influsso eventuale della conducibilità della sostanza tratteremo più avanti i corpi ferromagnetici non metallici, ossia i ferriti.

La quasi-stazionarietà significa, come sempre (§ 58), che la frequenza è supposta soddisfacente alla condizione $\omega \ll c/l$, ove l sono le dimensioni caratteristiche del corpo (oppure la « lunghezza d'onda » delle oscillazioni). Inoltre, trascureremo l'energia di scambio dovuta alla comparsa della distribuzione non omogenea della magnetizzazione per oscillazioni (in altri termini, è supposta inessenziale la dispersione spaziale della permeabilità magnetica; cfr. § 103). A tale scopo le dimensioni l devono essere grandi rispetto alla lunghezza caratteristica per l'energia di disuniformità:

$$l \gg \sqrt{\alpha}$$

ove α è l'ordine di grandezza dei coefficienti che figurano nell'espressione (43,1).

Rappresentiamo **H** e **B** nella forma $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, ove $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{B}_0$ sono intensità e induzione nel corpo staticamente magne-

---

[1]) Questa stima corrisponde alla suscettività diamagnetica; i tempi di rilassamento di certi processi para- o ferromagnetici sono grandi a priori rispetto ai periodi ottici. Sottolineiamo tuttavia che i calcoli sono stati eseguiti per un corpo isotropo e devono essere applicati con prudenza ai ferromagneti. In particolare, i termini girotropi nel tensore μ_{ik} (cfr. problema 1) che decrescono lentamente (come $1/\omega$) all'aumentare della frequenza possono diventare sostanziali anche per frequenze sufficientemente alte.

[2]) Questa circostanza sarà trattata da un punto di vista diverso nel § 103; si veda la nota alla pag. 519.

tizzato, $\mathbf{H}'$ e $\mathbf{B}'$ componenti variabili dell'intensità e dell'induzione per oscillazioni. Queste ultime, se va trascurata la corrente di spostamento, verificano le equazioni

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = 0, \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0 \tag{79,5}$$

che differiscono dalle equazioni della magnetostatica per il solo fatto che ora la permeabilità magnetica (che per un campo monocromatico $\backsim e^{-i\omega t}$) è la funzione della frequenza e non una costante [1]). Il mezzo ferromagnetico è magneticamente anisotropo e perciò la sua permeabilità è data da un tensore $\mu_{ik}(\omega)$, che determina il legame lineare tra le componenti variabili dell'induzione e dell'intensità.

In virtù della prima equazione (79,5) il campo magnetico è potenziale: $\mathbf{H}' = -\nabla\psi$. Sostituendo in seguito nella seconda equazione

$$B'_i = \mu_{ik} H'_k = -\mu_{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x_k}$$

otteniamo un'equazione per il potenziale all'interno del corpo:

$$\mu_{ik}(\omega) \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0. \tag{79,6}$$

All'esterno del corpo il potenziale verifica l'equazione di Laplace $\Delta\psi = 0$, mentre sulla frontiera del corpo devono essere continue, come al solito, $\mathbf{H}'_t$ e B'_n. La prima condizione si riduce alla continuità del potenziale stesso ψ, mentre la seconda significa la continuità dell'espressione

$$\mu_{ik} n_i \frac{\partial\psi}{\partial x_k},$$

ove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario della normale alla superficie del corpo. Lontano dal corpo deve essere $\psi \to 0$.

Il problema così formulato ha una soluzione non banale soltanto per determinati valori delle grandezze μ_{ik} considerate come parametri. Uguagliando le funzioni $\mu_{ik}(\omega)$ a questi valori, troviamo le frequenze delle autooscillazioni della magnetizzazione del corpo, che si chiamano frequenze della *risonanza ferromagnetica non uniforme*.

La forma elementare delle oscillazioni magnetostatiche di un ellissoide magnetizzato uniformemente sono oscillazioni che non violano l'uniformità, e la magnetizzazione dell'ellissoide oscilla come un tuttuno. La ricerca delle loro frequenze non richiede nuova solu-

[1]) Perciò le oscillazioni in esame si dicono *magnetostatiche*. La teoria delle oscillazioni magnetostatiche omogenee (si veda più avanti) è stata data da *Ch. Kittel* nel 1947, e di quelle non omogenee da *L. Walker* nel 1957.

zione delle equazioni del campo e può essere realizzata direttamente mediante le relazioni (29,14):

$$H_i + n_{ik}(B_k - H_k) = \mathfrak{H}_i \tag{79,7}$$

ove n_{ik} è il tensore di demagnetizzazione dell'ellissoide, **H** e **B** sono relativi al campo interno dell'ellissoide, e $\mathfrak{H}$ il campo magnetico esterno. Quest'ultimo è supposto uniforme, mentre in **H** e **B** si distinguono di nuovo le parti oscillanti **H**′ e **B**′ ma, in questo caso, uniformi rispetto al volume del corpo. Per queste ultime otteniamo la relazione

$$H'_i + n_{ik}(B'_k - H'_k) = 0$$

ossia

$$(\delta_{ik} + 4\pi n_{il}\chi_{lk}) H'_k = 0,$$

ove abbiamo introdotto il tensore di suscettività magnetica $\chi_{ik}(\omega)$ in accordo con la definizione $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$. Uguagliando a zero il determinante di questo sistema di equazioni lineari omogenee, otteniamo l'equazione

$$\det | \delta_{ik} + 4\pi n_{il}\chi_{lk}(\omega) | = 0, \tag{79,8}$$

le cui radici determinano le frequenze delle autooscillazioni. Esse si chiamano frequenze della *risonanza ferromagnetica uniforme.*

Problemi

1. Nei limiti dell'equazione macroscopica del moto del momento magnetico (equazione di Landau-Lifšits (69,9) del vol. IX) e in assenza di dissipazione trovare il tensore di permeabilità magnetica per un ferromagnete uniassico magnetizzato uniformemente del tipo asse facile (*L.D. Landau, E.M. Lifšits*, 1935).

Soluzione. L'equazione del moto della magnetizzazione nel ferromagnete è

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma\,[(\mathbf{H} + \beta M_z \mathbf{v})\,\mathbf{M}],$$

ove $\gamma = g\,|\,e\,|/2mc$ (g è il rapporto giromagnetico), $\beta > 0$ è il coefficiente di anisotropia, $\mathbf{v}$ il vettore unitario della magnetizzazione facile (asse z). Rappresentiamo il campo **H** nella forma $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, ove $\mathbf{H}'$ è un piccolo campo variabile diretto in modo qualsiasi e $\mathbf{H}_0$ un campo costante che supponiamo diretto lungo l'asse z [1]). Con il campo $\mathbf{H}'$ è piccola anche da esso creata la magnetizzazione trasversale M_x, M_y, e $M_z \approx M =$ costante. Trascurando le grandezze infinitesime del secondo ordine troviamo le seguenti equazioni:

$$-i\omega M_x = -\gamma\,(H_0 + \beta M)\,M_y + \gamma M H'_y,$$
$$-i\omega M_y = \gamma\,(H_0 + \beta M)\,M_x - \gamma M H'_x.$$

[1]) Introduciamo qui questo campo tenendo conto del fatto che i risultati saranno trattati nei problemi che seguono.

Determinando mediante quest'ultime M_x, M_y, troviamo la suscettività (come coefficienti nelle relazioni $M'_i = \chi_{ik} H'_k$) e tramite essa la permeabilità:

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = 1 - \frac{4\pi}{\beta} \frac{\omega_M(\omega_M + \omega_H)}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2} \equiv \mu, \quad \mu_{zz} = 1,$$
$$\mu_{xy} = -\mu_{yx} = i \frac{4\pi}{\beta} \frac{\omega\omega_M}{\omega^2 - (\omega_M + \omega_H)^2}, \quad \mu_{xz} = \mu_{yz} = 0, \tag{1}$$

ove $\omega_M = \gamma\beta M$, $\omega_H = \gamma H_0$. Badiamo alla girotropia del mezzo ferromagnetico (per definizione di questa nozione si veda il § 101).

2. Trovare le frequenze della risonanza ferromagnetica omogenea di un ellissoide uno degli assi principali del quale coincide con l'asse di magnetizzazione facile. Nella stessa direzione è applicato un campo esterno (*Ch. Kittel*, 1947) [1].

Soluzione. All'interno dell'ellissoide lungo l'asse z (asse di magnetizzazione facile) esiste il campo

$$H_0 = \mathfrak{H} - 4\pi n^{(z)} M$$

($n^{(x)}$, $n^{(y)}$, $n^{(z)}$ sono coefficienti di demagnetizzazione lungo gli assi principali dell'ellissoide). Un calcolo elementare del determinante (79,8) conduce all'equazione

$$\frac{\omega^{(x)}\omega^{(y)} - \omega^2}{(\omega_M + \omega_H)^2 - \omega^2} = 0$$

ove

$$\omega^{(x)} = \gamma\,[M\beta + \mathfrak{H} + 4\pi M\,(n^{(x)} - n^{(z)})],$$
$$\omega^{(y)} = \gamma\,[M\beta + \mathfrak{H} + 4\pi M\,(n^{(y)} - n^{(z)})].$$

Di qui troviamo la frequenza della risonanza uniforme:

$$\omega = (\omega^{(x)}\omega^{(y)})^{1/2}.$$

Così, per una sfera abbiamo $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = 1/3$ e la frequenza della risonanza è

$$\omega = \gamma\,(M\beta + \mathfrak{H}).$$

Per una lamina pianoparallela la cui superficie è perpendicolare all'asse di magnetizzazione facile abbiamo $n^{(x)} = n^{(y)} = 0$, $n^{(z)} = 1$ e la frequenza della risonanza è

$$\omega = \gamma\,(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)$$

(la lamina è magnetizzata se $M\beta + \mathfrak{H} > 4\pi M$).

3. Trovare la legge di dispersione delle oscillazioni magnetostatiche in un mezzo illimitato.

Soluzione. Con il tensore μ_{ik} dell'(1) l'equazione (79,6) assume la forma

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

Ponendovi $\psi \propto e^{i\mathbf{kr}}$ troviamo che

$$\mu(\omega) = -\mathrm{ctg}^2\,\theta,$$

[1]) Nei problemi 2-4 è supposto che la permeabilità magnetica della sostanza sia data dalle formule (1).

ove θ è l'angolo formato da $\mathbf{k}$ e dall'asse di magnetizzazione facile (asse z). Con μ (ω) dell'(1) ($\mathfrak{H} = 0$) otteniamo la frequenza delle oscillazioni

$$\omega = \gamma M (\beta + 4\pi \operatorname{sen}^2 \theta)^{1/2}.$$

Essa dipende dalla sola direzione e non dalla grandezza del vettore d'onda. Questo risultato coincide, come deve essere, con la legge dispersiva limite (per $k \to 0$) delle onde di spin nei ferromagneti (cfr. IX § 70).

4. Trovare le frequenze della risonanza non uniforme in una lamina piano-parallela illimitata la cui superficie è perpendicolare all'asse di magnetizzazione facile; lungo questo stesso asse è diretto un campo esterno $\mathfrak{H}$.

Soluzione. Si deve trovare soluzione dell'equazione (2) per il potenziale $\psi^{(i)}$ all'interno della lamina e dell'equazione $\Delta\psi^{(e)} = 0$ per il potenziale all'esterno della lamina con le condizioni di frontiera

$$\psi^{(i)} = \psi^{(e)}, \quad \frac{\partial\psi^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial\psi^{(e)}}{\partial z} \quad \text{per } z = \pm L,$$
$$\psi^{(e)} \to 0 \quad \text{per } |z| \to \infty.$$

(l'asse z è perpendicolare alla superficie della lamina, il piano $z = 0$ passa per la sua metà, $2L$ lo spessore della lamina). La soluzione può essere pari o dispari rispetto a z. Nel primo caso

$$\psi^{(i)} = A \cos k_z z \cdot e^{ik_x x}, \quad \psi^{(e)} = Be^{-k_x|z|} e^{ik_x x},$$

fra l'altro, $\mu k_x^2 = -k_z^2$ (il vettore d'onda giace nel piano xz); le condizioni di frontiera conducono alla relazione

$$\operatorname{tg} k_z L = k_x/k_z. \tag{3}$$

Nel secondo caso

$$\psi^{(i)} = A \operatorname{sen} k_z z \cdot e^{ik_x x}, \quad \psi^{(e)} = \pm Be^{-k_x|z|} e^{ik_x x},$$

e dalle condizioni di frontiera ricaviamo

$$\operatorname{tg} k_z L = -k_z/k_x. \tag{4}$$

Il coefficiente demagnetizzatore della lamina è $n^{(z)} = 1$ in modo che il campo di demagnetizzazione è $-4\pi M$. Mediante l'espressione di μ (ω) dall'(1) troviamo la frequenza delle oscillazioni:

$$\omega^2 = \gamma^2 (M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M \cos^2 \theta), \tag{5}$$

ove θ è l'angolo tra $\mathbf{k}$ e l'asse z. Per ogni valore arbitrario k_x esiste un'infinità discreta di valori k_z determinati dalle condizioni (3) e (4). Le frequenze corrispondenti sono date dall'espressione (5) e dipendono esclusivamente dal rapporto k_x/k_z. Tutti i valori possibili della frequenza appartengono all'intervallo

$$\gamma (M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M) \leqslant \omega \leqslant \gamma [(M\beta + \mathfrak{H} - 4\pi M)(M\beta + \mathfrak{H})]^{1/2}.$$

Per $k_z \to 0$ sono possibili le sole oscillazioni simmetriche e dalla (3) si vede che $k_x L \sim (k_z L)^2$, cioè è una grandezza infinitesima del secondo ordine. Ponendo conformemente a ciò $\theta = 0$ nella (5), troviamo la frequenza coincidente, come deve essere, con quella della risonanza uniforme.

§ 80. Energia del campo nei mezzi dispersivi

La formula

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \tag{80,1}$$

esprimente la densità del flusso di energia resta valida in campi elettromagnetici variabili qualsiasi anche se esiste dispersione. Ciò deriva con evidenza dalle considerazioni esposte alla fine del § 30: essendo continue le componenti tangenziali di **E** e **H**, la formula (80,1) deriva univocamente dalla condizione di continuità della componente normale di **S** sulla frontiera del corpo e dal fatto che essa si verifica nel vuoto all'esterno del corpo.

La variazione (in un secondo) dell'energia concentrata nell'unità di volume del corpo si calcola come div **S**. Questa espressione si riduce mediante le equazioni di Maxwell alla forma

$$-\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{80,2}$$

(cfr. la (75,15)). In un mezzo dielettrico senza dispersione, quando ε e μ sono grandezze reali costanti, questa grandezza può essere considerata come variazione dell'energia elettromagnetica

$$U = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2), \tag{80,3}$$

che ha il senso termodinamico esatto: ciò è la differenza tra l'energia interna di 1 cm^3 di materia, se c'è il campo, e l'energia se il campo è assente, per densità ed entropia identiche.

Se dispersione esiste questa semplice interpretazione è già impossibile. Per di più, nel caso generale di dispersione qualsiasi è impossibile dare una definizione sensata dell'energia elettromagnetica come grandezza termodinamica. Ciò è dovuto al fatto che la dispersione è legata, in generale, all'esistenza contemporanea della dissipazione dell'energia, vale a dire che il mezzo dispersivo è al tempo stesso mezzo assorbente.

Per definire questa dissipazione consideriamo un campo elettromagnetico monocromatico. Calcolando la media della grandezza (80,2) rispetto al tempo, troviamo così l'afflusso sistematico di energia (nell'unità di tempo per l'unità di volume del mezzo) da sorgenti esterne che alimentano il campo. Poiché l'ampiezza del campo monocromatico è supposta costante, tutta questa energia è consumata per compensarne la dissipazione. In tal modo, sotto le condizioni in esame, è proprio la media della grandezza (80,2) rispetto al tempo a dare la quantità di calore media Q emanata entro un secondo da 1 cm^3 del mezzo.

Essendo l'espressione (80,2) quadratica rispetto al campo, nel suo calcolare tutte le grandezze devono essere scritte nella forma rea-

le. Se con **E** e **H** intendiamo rappresentazioni complesse delle grandezze, ciò che è conveniente per il campo monocromatico, allora nell'(80,2), per **E** e $\partial \mathbf{D}/\partial t$, si devono sostituire rispettivamente le espressioni

$$^1/_2\,(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \text{ e } ^1/_2\,(-i\omega\varepsilon\mathbf{E} + i\omega\varepsilon^*\,\mathbf{E}^*)$$

e analogamente per **H** e $\partial \mathbf{B}/\partial t$. Nel calcolare rispetto al tempo i prodotti **EE** e $\mathbf{E}^*\mathbf{E}^*$ contenenti i fattori $e^{\mp 2i\omega t}$ si annullano e resta

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi}\{(\varepsilon^* - \varepsilon)\,\mathbf{EE}^* + (\mu^* - \mu)\,\mathbf{HH}^*\} = \frac{\omega}{8\pi}\,(\varepsilon''\,|\,\mathbf{E}\,|^2 + \mu''\,|\,\mathbf{H}\,|^2). \tag{80,4}$$

Questa espressione si può anche riscrivere nella forma

$$Q = \frac{\omega}{4\pi}(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}^2} + \mu''\overline{\mathbf{H}^2}), \tag{80,5}$$

ove **E** e **H** sono intensità reali del campo e il trattino superiore significa la media rispetto al tempo (si veda la nota alla pag. 300).

È facile dedurre anche la formula esprimente la dissipazione dell'energia nel campo non monocromatico che si annulla in modo sufficientemente rapido per $t \to \pm\infty$. In questo caso è opportuno considerare la dissipazione non entro un'unità di tempo, bensì durante tutto il tempo di esistenza del campo.

Sviluppando il campo $\mathbf{E}\,(t)$ nell'integrale di Fourier, scriviamo

$$\mathbf{E}\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = -i\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon\,(\omega)\,\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi},$$

ove $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^*$. Scrivendo il prodotto di queste grandezze nella forma dell'integrale doppio e integrando in seguito rispetto al tempo, abbiamo

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\,dt = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon\,(\omega)\,\mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_{\omega'}e^{-i(\omega+\omega')t}\,\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}\,dt.$$

L'integrazione rispetto a t è realizzabile in base alla formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t}\,dt = 2\pi\delta\,(\omega + \omega'),$$

dopo di che la funzione δ si elimina integrando rispetto a ω'. Come risultato otteniamo

$$-\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon\,(\omega)\,|\,\mathbf{E}_\omega\,|^2\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Dopo la sostituzione $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ il termine contenente $\varepsilon'(\omega)$ si annulla per integrazione in quanto l'espressione integranda è dispari quale funzione di ω. Assieme all'espressione analoga per il campo magnetico troviamo infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\,[\varepsilon''(\omega)\,|\,\mathbf{E}_\omega\,|^2 + \mu''(\omega)\,|\,\mathbf{H}_\omega\,|^2]\,\frac{d\omega}{2\pi} \qquad (80,6)$$

(l'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ può essere sostituito con l'integrale doppio da 0 a ∞).

Dalle formule dedotte si vede che l'assorbimento (dissipazione) dell'energia è determinato dalle parti immaginarie di ε e μ; i due termini nell'(80,5) si chiamano perdite elettrica e magnetica, rispettivamente. In virtù della legge di crescita dell'entropia queste perdite hanno un segno ben determinato: la dissipazione dell'energia è accompagnata dall'emanazione di calore, cioè si ha sempre $Q > 0$. Ne segue che le parti immaginarie di ε e μ sono sempre positive:

$$\varepsilon'' > 0,\ \mu'' > 0 \qquad (80,7)$$

per tutte le sostanze e per tutte (positive) le frequenze [1]). Il segno delle componenti reali di ε e μ (per $\omega \neq 0$) non è limitato da nessuna condizione fisica in modo che ε' e μ' possono essere grandezze sia positive che negative.

Ogni processo non stazionario in una sostanza reale è in questa o quella misura sempre termodinamicamente irreversibile. Perciò le perdite elettriche e magnetiche nel campo elettromagnetico variabile esistono sempre in qualche misura (anche piccola). In altre parole, le funzioni $\varepsilon''(\omega)$ e $\mu''(\omega)$ non si annullano a rigore per nessuna frequenza non nulla. Vedremo nel paragrafo seguente che questa affermazione ha una grande importanza di principio anche se non esclude in nessun modo la possibilità di esistenza di domini di frequenze tali per cui le perdite sono relativamente piccole.

I domini di frequenze in cui ε'' e μ'' sono piccole (rispetto a ε' e μ') si dicono *domini di trasparenza* della sostanza. Trascurando l'assorbimento, si trova che in questi domini è possibile introdurre la nozione dell'energia interna del corpo nel campo elettromagnetico nel senso usato per il campo costante.

---

[1]) Questa affermazione si riferisce ai corpi che si trovano (in assenza di campo variabile) in equilibrio termodinamico, ciò che è supposto ovunque. Se il corpo di per sé non si trova in equilibrio termico, allora, in linea di massima, Q potrebbe essere anche grandezza negativa. La seconda legge termodinamica non chiede altro che l'entropia cresca totalmente sia sotto influsso del campo elettromagnetico variabile che sotto influsso del non equilibrio termodinamico non dovuto all'esistenza del campo. Come esempio di tale corpo può servire la sostanza i cui atomi sono stati portati in modo artificiale (cioè non sotto influsso di autoeccitazione termica arbitraria, bensì dal « campo di pompaggio » esterno) in stati eccitati.

Per determinare questa grandezza è insufficiente considerare il campo monocromatico vero e proprio poiché grazie alla sua periodicità rigorosa in esso non si verifica nessuna accumulazione sistematica di energia elettromagnetica. Perciò considereremo un campo rappresentante insieme di componenti monocromatiche con frequenze appartenenti a uno stretto intervallo attorno a un certo valore medio ω_0. Le intensità di questo campo si possono scrivere nella forma seguente:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}, \tag{80,8}$$

ove $\mathbf{E}_0(t)$ e $\mathbf{H}_0(t)$ sono due funzioni del tempo che variano lentamente (rispetto al fattore $\exp(-i\omega_0 t)$). Le parti reali di queste espressioni devono essere sostituite a secondo membro dell'(80,2) e dopo calcoliamo la media temporale rispetto al periodo $2\pi/\omega_0$ piccolo in confronto al tempo di variazione dei fattori $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$.

Il primo termine nell'(80,2) dopo il passaggio alla rappresentazione complessa di $\mathbf{E}$ assume la forma

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathbf{E}+\mathbf{E}^*}{2}\,\frac{\dot{\mathbf{D}}+\dot{\mathbf{D}}^*}{2}$$

(analogamente per il secondo termine). I prodotti $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}$ e $\mathbf{E}^*\dot{\mathbf{D}}^*$ scompaiono per il calcolo della media temporale suindicata e perciò essi, in generale, non vanno presi in considerazione. Quindi, non resta altro che

$$\frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^*\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right). \tag{80,9}$$

Scriviamo la derivata $\partial\mathbf{D}/\partial t$ nella forma $\hat{f}\mathbf{E}$, ove $\hat{f}$ è un operatore

$$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial t}\,\hat{\varepsilon},$$

e vediamo quale è il risultato che produce l'azione di questo operatore su una funzione della forma (80,8). Se $\mathbf{E}_0$ fosse costante avremmo semplicemente

$$\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega)\,\mathbf{E}, \quad f(\omega) = -i\omega\varepsilon(\omega).$$

Nel caso considerato realizziamo lo sviluppo di Fourier della funzione $\mathbf{E}_0(t)$ rappresentandola nella forma di applicazione di componenti della forma $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$ con $\mathbf{E}_{0\alpha}$ costanti. La lentezza di variazione di $\mathbf{E}_0(t)$ significa che in questo sviluppo figurano le sole componenti con $\alpha \ll \omega_0$. Tenendone conto scriviamo

$$\hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} = f(\alpha+\omega_0)\,\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} \approx$$
$$\approx \left[f(\omega_0) + \alpha\,\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\right]\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}.$$

Realizzando ora la sommatoria inversa delle componenti di Fourier otteniamo

$$\hat{f}\mathbf{E}_0(t)\,e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + i\,\frac{df(\omega_0)}{d\omega_0}\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}\,e^{-i\omega_0 t}.$$

Omettendo più avanti l'indice 0 in ω_0 abbiamo così

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}\,e^{-i\omega t}. \qquad (80,10)$$

Sostituendo questa espressione nell'(80,9) e ricordando che la parte immaginaria della funzione $\varepsilon(\omega)$ va trascurata, otteniamo

$$\frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\left(\mathbf{E}_0^*\,\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0\,\frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\,\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\mathbf{E}^*)$$

(il prodotto $\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*$ coincide con $\mathbf{E}\mathbf{E}^*$). Aggiungendo l'espressione analoga al campo magnetico possiamo concludere che la velocità di variazione sistematica dell'energia contenuta in 1 cm³ del mezzo è data dalla derivata $d\overline{U}/dt$, ove

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\mathbf{E}\mathbf{E}^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\,\mathbf{H}\mathbf{H}^*\right]. \qquad (80,11)$$

Mediante le intensità reali $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ questa espressione si riscrive nella forma

$$\overline{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\,\overline{\mathbf{E}^2} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\,\overline{\mathbf{H}^2}\right] \qquad (80,12)$$

(*L. Brillouin*, 1921).

Questo è il risultato cercato, vale a dire che $\overline{U}$ rappresenta la media della parte elettromagnetica dell'energia interna contenuta nell'unità di volume del mezzo trasparente. Se la dispersione non esiste ε e μ sono costanti e l'(80,12) si trasforma, come deve essere, nella media dell'espressione (80,3).

Se l'alimentazione del corpo di energia elettromagnetica dall'esterno cessa, allora sempre esiste di fatto almeno piccolo assorbimento che in fin dei conti implicherà il passaggio di tutta l'energia $\overline{U}$ in calore. Poiché in accordo con la legge di crescita dell'entropia questo calore deve essere emanato e non assorbito, deve essere $\overline{U} > 0$. Secondo la formula (80,11) a tale scopo devono essere soddisfatte le disuguaglianze

$$\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \qquad (80,13)$$

In realtà queste condizioni si verificano automaticamente come conseguenza di disuguaglianze più forti cui sempre soddisfano le funzioni $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ nei domini di trasparenza (si veda la nota alla pag. 421).

È da sottolineare ancora una volta che l'espressione (80,12) è stata ottenuta nella prima approssimazione rispetto alle frequenze α di variazione dell'ampiezza $\mathbf{E}_0(t)$. Perciò essa si verifica per i soli campi la cui ampiezza varia con il tempo in modo sufficientemente lento (questa riserva si riferisce anche al calcolo del tensore degli sforzi che sarà trattato nel paragrafo prossimo).

§ 81. *Tensore degli sforzi nei mezzi dispersivi*

Presenta interesse notevole anche la questione sulla media (rispetto al tempo) del tensore degli sforzi che determina forze agenti sulla sostanza nel campo elettrico variabile. Mostriamo che anche se esiste la dispersione (ma sempre senza assorbimento) l'espressione per questo tensore non contiene derivate rispetto alla frequenza a differenza dell'espressione (80,12) per l'energia. In particolare, per un fluido isotropo dispersivo trasparente nel campo elettrico monocromatico la media $\overline{\sigma}_{ik}$ si ottiene dalla formula (15,9) con la semplice sostituzione di ε con $\varepsilon(\omega)$ e dei prodotti E_iE_k, $\mathbf{E}^2$ con le loro medie $\overline{E_iE_k}$, $\overline{\mathbf{E}^2}$ (*L.P. Pitaevskij*, 1960).

Per dimostrare questa affermazione torniamo alla conclusione ottenuta nel § 15 cambiandone un po' la formulazione. Là abbiamo considerato il condensatore piano riempito di dielettrico e determinato il tensore degli sforzi dalla condizione di uguaglianza del lavoro compiuto dalle forze ponderomotoriche per spostamento del rivestimento alla variazione del potenziale termodinamico corrispondente. Scriviamo qui questa condizione per grandezze complete (non per unità di area) e rappresentiamola nella forma

$$A\sigma_{ik}\xi_i n_k = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e} \tag{81,1}$$

(A è l'area dell'armatura del condensatore). Al posto del potenziale $\widetilde{\mathcal{F}}$ qui figura l'energia ordinaria $\mathcal{U}$ la cui variazione è considerata per dati valori dell'entropia $\mathcal{S}$ del dielettrico e delle cariche totali $\pm e$ nell'armatura del condensatore (al posto del potenziale dato φ); inoltre, in accordo con il teorema sulle piccole aggiunte abbiamo

$$(\delta\widetilde{\mathcal{F}})_{T,\varphi} = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e}.$$

Questa condizione nella forma (81,1) ha un significato particolarmente semplice: il condensatore termoisolato con cariche date nell'armatura rappresenta un sistema elettricamente chiuso; se una sorgente esterna compie un lavoro meccanico (spostando l'armatura) sul condensatore, tutto questo lavoro ne aumenta l'energia. L'energia del condensatore è

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \frac{e^2}{2C}, \tag{81,2}$$

ove $\mathcal{U}_0$ è l'energia del dielettrico in assenza del campo (per la stessa entropia $\mathcal{S}$) e C la capacità del condensatore; per un condensatore piano si ha $C = \varepsilon A/4\pi h$, ove h è la distanza fra le armature. Di qui

$$(\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e} = (\delta\mathcal{U}_0)_{\mathcal{S}} - \frac{e^2}{2C^2}(\delta C)_{\mathcal{S}}. \tag{81,3}$$

Esprimendo δC in funzione dello spostamento delle armature ξ (tenendo conto che ε dipende dalla densità del dielettrico variabile per spostamento) si ottiene facilmente la formula (15,9) [1]; non ci soffermiamo su questo risultato di per sé evidente.

Se la dispersione esiste l'espressione per l'energia $\mathcal{U}$ cambia. Mostriamo che ciò nonostante la relazione (81,3) resta valida per la variazione media $\overline{\delta\mathcal{U}}$ rispetto al tempo e con ciò sarà dimostrata l'affermazione summenzionata sulla media del tensore degli sforzi.

Supponiamo che la carica nelle armature del condensatore varii secondo una legge monocromatica con frequenza ω. Allora il condensatore di per se stesso non sarà più sistema elettricamente chiuso in quanto è necessario fornire e portare via la carica. Tuttavia questo sistema è rappresentato da un contorno oscillante con autofrequenza ω composto da un condensatore e da autoinduzione appropriata [2]; quindi, per la sua energia sarà valida la relazione (81,1).

Se la resistenza non esiste la differenza di potenziale φ nei rivestimenti del condensatore è uguale alla somma della forza elettromotrice esterna e della forza elettromotrice dell'autoinduzione:

$$\varphi = \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} L \frac{dJ}{dt}, \tag{81,4}$$

e la corrente J è legata alla carica e nelle armature del condensatore mediante l'uguaglianza $J = de/dt$. Per le grandezze variabili con il tempo secondo una legge monocromatica, in accordo con la definizione della capacità $C(\omega)$, abbiamo $\varphi = e/C(\omega)$. Ponendo nell'(81,4) $\mathcal{E} = 0$, $J = -i\omega e$ troviamo, prima di tutto, che anche per dispersione della capacità l'autofrequenza del contorno verifica, come precedentemente, la relazione di Thomson (62,5):

$$\omega = c/\sqrt{LC(\omega)}. \tag{81,5}$$

---

[1]) In questo caso la formula sarà espressa in altre variabili: al posto della derivata $\partial\varepsilon/\partial\rho$ e della funzione P_0 isotermiche in essa figureranno le grandezze adiabatiche. Ma ambedue le espressioni sono, ovviamente, equivalenti.

[2]) Perché le condizioni di quasi-stazionarietà siano soddisfatte è necessario che le dimensioni del contorno siano piccole rispetto alla lunghezza d'onda c/ω. Questa limitazione, tuttavia, non ha carattere di principio e non viola la generalità dell'affermazione fatta.

In seguito, moltiplicando l'uguaglianza (81,4) per $J = de/dt$ e considerando (come nel dedurre la formula (80, 12)) grandezze « quasi monocromatiche », otteniamo senza difficoltà alcuna:

$$\overline{\mathscr{E}J} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{L\overline{J^2}}{2} + \frac{d(\omega C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}\right\}.$$

È chiaro dalla forma di questa uguaglianza che l'espressione tra parentesi graffe rappresenta l'energia $\mathscr{U}$ del contorno oscillante. Il primo termine di questa espressione trasformiamo mediante la sostituzione $J = -i\omega e$ e usando l'(81,5):

$$\frac{1}{2c^2}L\overline{J^2} = \frac{1}{2c^2}L\omega^2\overline{e^2} = \frac{1}{2c^2}LC^2\omega^2\overline{\varphi^2} = \frac{C\overline{\varphi^2}}{2}.$$

L'energia del contorno scriviamo infine nella forma [1])

$$\overline{\mathscr{U}} = \frac{1}{\omega}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}. \tag{81,6}$$

Dobbiamo calcolare la variazione di questa energia per piccolo spostamento delle armature del condensatore, cioè per piccola variazione della sua capacità. Nel campo variabile questo spostamento bisogna supporre come processo infinitamente lento. Ma per questo cambiamento resta costante l'invariante adiabatica uguale (come per qualsiasi sistema oscillante lineare) al rapporto tra energia di oscillazioni e frequenza [2]). In tal modo, $\delta(\overline{\mathscr{U}}/\omega) = 0$, cioè

$$\delta\overline{\mathscr{U}} = \overline{\mathscr{U}}\frac{\delta\omega}{\omega}. \tag{81,7}$$

A causa della piccola variazione della capacità del condensatore dall'uguaglianza (81,5) ricaviamo

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta C}{2C}. \tag{81,8}$$

Ma la variazione della capacità è composta delle due parti seguenti:

$$\delta C = (\delta C)_{\text{st}} + \frac{dC}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,9}$$

Il primo termine è la parte « statica » della variazione legata alla deformazione nello stesso modo come nel caso statico (qui è più importante che per dispersione la capacità $C(\omega)$ si esprima in funzione di $\varepsilon(\omega)$ come nel caso statico). Il secondo termine, invece, è

[1]) Qui è più avanti per rendere più semplice la scrittura delle formule omettiamo la parte « non elettromagnetica » dell'energia $\mathscr{U}_0$.

[2]) Cfr. I, § 49. L'invarianza della grandezza suindicata è particolarmente evidente nei termini della teoria quantistica: il rapporto $\overline{\mathscr{U}}/\hbar\omega$ rappresenta numero dello stato quantistico che non varia per cambiamento adiabatico delle condizioni.

legato semplicemente alla variazione della frequenza. Dalle formule (81,8-9) ricaviamo la parte « statica »

$$(\delta C)_{\text{st}} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,10}$$

Se sostituiamo l'(81,6) nell'(81,7) e teniamo conto dell'(81,10), la derivata $dC/d\omega$ scompare e la variazione dell'energia si ottiene nella forma

$$\delta\overline{\mathcal{U}} = -\frac{\overline{\varphi^2}}{2}(\delta C)_{\text{st}} = -\frac{\overline{e^2}}{2C^2}(\delta C)_{\text{st}}, \tag{81,11}$$

che coincide di fatto con la media del secondo termine nell'espressione (81,3).

Osserviamo che la scomparsa dei termini con la derivata rispetto a ω in $\delta\overline{\mathcal{U}}$ ha un carattere assolutamente generale e non è legata a un modo concreto di variazione del corpo (del condensatore nel caso in esame). In particolare, per un mezzo con dispersione resta valida (sostituendo $\mathbf{E}^2$ con $\overline{\mathbf{E}^2}$) la formula (14,1) descrivente la variazione dell'energia libera per piccolo cambiamento di ε:

$$\delta\mathcal{F} = -\int \delta\varepsilon(\omega)\frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{8\pi}dV. \tag{81,12}$$

Se è noto il tensore degli sforzi, allora mediante la formula (75,17) si può trovare la forza agente sull'unità di volume del dielettrico. In questo caso i termini contenenti le derivate spaziali coincideranno con i termini corrispondenti della media dell'espressione (75,18) calcolata rispetto al tempo (nella quale si deve porre $\mu = 1$). Ma il termine con la derivata rispetto al tempo (forza di Abraham) è diverso.

Infatti, questo termine compare come differenza

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DH}] - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\},$$

la cui media deve essere calcolata rispetto al tempo. A tale scopo rappresentiamo $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ nella forma complessa (cioè sostituiamo queste grandezze con $(\mathbf{D} + \mathbf{D}^*)/2$ e via di seguito) e in seguito per la derivata $\partial\mathbf{D}/\partial t$ usiamo la formula (80,10). Come risultato otteniamo la forza di Abraham nella forma

$$\frac{1}{8\pi c}(\varepsilon - 1)\,\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}^*] + \frac{1}{8\pi c}\,\omega\,\frac{d\varepsilon}{d\omega}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{H}^*\right] \tag{81,13}$$

(*Ch. Vašina, V.I. Karpman*, 1976).

La questione sul tensore degli sforzi nel campo variabile ha senso sia per il mezzo trasparente che per quello dispersivo, a differenza della questione sull'energia interna che può essere formulata a sola condizione che sia trascurata la dissipazione. Tuttavia, è lecito

supporre che nel mezzo assorbente il tensore degli sforzi non possa essere espresso in funzione della sola permettività dielettrica e, quindi, non possa essere trovato nella forma generale in modo macroscopico.

§ 82. *Proprietà analitiche della funzione* $\varepsilon(\omega)$

La funzione $f(\tau)$ nella formula (77,3) è finita per tutti i valori della sua variabile indipendente, compreso $\tau = 0$ [1]. Nei dielettrici questa funzione tende a zero, per $\tau \to \infty$. Questa circostanza esprime semplicemente il fatto che sul valore $\mathbf{D}(t)$ in un dato istante non possono influenzare sensibilmente i valori $\mathbf{E}(t)$ in istanti molto lontani. Il meccanismo fisico che sta alla base di una dipendenza integrale della forma (77,3) consiste nei processi di stabilimento della polarizzazione elettrica. Perciò l'intervallo di valori in cui la funzione $f(\tau)$ differisce sensibilmente da zero è dell'ordine di grandezza del tempo di rilassamento che caratterizza la velocità dei processi suindicati.

Quanto detto si riferisce anche ai metalli con la sola differenza che per $\tau \to \infty$ tende a zero non la funzione stessa, bensì la differenza $f(\tau) - 4\pi\sigma$. Questo fatto significa che già il passaggio della corrente stazionaria di conduzione, pur non implicando un cambiamento reale dello stato fisico del metallo, conduce nelle equazioni considerate alla comparsa dell'induzione $\mathbf{D}$ secondo la relazione

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

ossia

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{t} 4\pi\sigma\mathbf{E}(\tau)\,d\tau = 4\pi\sigma\int_{0}^{\infty}\mathbf{E}(t-\tau)\,d\tau.$$

La funzione $\varepsilon(\omega)$ è stata definita secondo la formula (77,5):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_{0}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau)\,d\tau. \tag{82,1}$$

Si trova possibile precisare alcune proprietà molto generali di questa funzione considerando ω come variabile complessa ($\omega = \omega' + i\omega''$). Queste proprietà si potrebbero formulare qui immediatamente osservando che la suscettività elettrica $[\varepsilon(\omega) - 1]/4\pi$ si riferisce alla categoria di grandezze (suscettività generalizzate) già considerate in V § 123. Ciononondimeno ripeteremo qui in parte le

[1]) A tale scopo nella dipendenza integrale (77,3) è stato evidenziato il termine $\mathbf{E}(t)$; in caso contrario $f(\tau)$ sarebbe per $\tau = 0$ una singolarità del tipo della funzione δ.

considerazioni e i risultati corrispondenti sia per rendere più facile la lettura che per sottolineare alcune distinzioni tra dielettrici e metalli.

Dalla definizione (82,1) e dalle proprietà suindicate della funzione $f(\tau)$ deriva che in tutto il semipiano superiore $\varepsilon(\omega)$ è una funzione monodroma che non diventa infinita in nessun punto, cioè non avente nessun punto singolare. Infatti, per $\omega'' > 0$ nell'espressione integranda della formula (82,1) esiste il fattore $e^{-\omega''\tau}$ esponenzialmente decrescente, e poiché la funzione $f(\tau)$ è finita in tutto il dominio d'integrazione l'integrale converge. La funzione $\varepsilon(\omega)$ non ha singolarità sull'asse reale stesso ($\omega'' = 0$), tranne, forse, l'origine delle coordinate (in metalli la funzione $\varepsilon(\omega)$ ha in questo punto semplice polo).

Nel semipiano inferiore la definizione (82,1) è inapplicabile in quanto l'integrale diverge. Perciò la funzione $\varepsilon(\omega)$ nel semipiano inferiore può essere definita soltanto come prolungamento analitico dell'espressione (82,1) dal semipiano superiore. In questo dominio la funzione $\varepsilon(\omega)$, in generale, ha dei punti singolari. Nel semipiano superiore la funzione $\varepsilon(\omega)$ ha sia il significato formale matematico che quello fisico: in altre parole, essa determina un legame tra **D** e **E** per campi con l'ampiezza crescente (come $e^{\omega''t}$). Nel semipiano inferiore, invece, questa interpretazione fisica è impossibile almeno per esistenza del campo che indebolisce (come $\exp(-|\omega''|t)$), ciò che ne suppone valore infinito per $t \to -\infty$.

È da notare che la conclusione circa la mancanza di punti singolari della funzione $\varepsilon(\omega)$ nel piano superiore è, dal punto di vista fisico, conseguenza del principio di causalità. Quest'ultimo si rivela nel fatto che nella (77,3) si integra unicamente rispetto al tempo precedente a un dato istante t, ragione per cui nella formula (82,1) il dominio d'integrazione va da 0 a ∞ (anziché da $-\infty$ a $+\infty$).

In seguito, dalla definizione (82,1) è evidente che

$$\varepsilon(-\omega^*) = \varepsilon^*(\omega). \tag{82,2}$$

Questa è la generalizzazione della relazione (77,7) concernente i valori reali di ω. In particolare, per valori puramente immaginari di ω abbiamo

$$\varepsilon(i\omega'') = \varepsilon^*(i\omega''). \tag{82,3}$$

Ciò vuol dire che sul semiasse immaginario superiore la funzione $\varepsilon(\omega)$ è reale [1]).

[1]) Per il semiasse immaginario inferiore questa conclusione, in generale, sarebbe non vera. La funzione $\varepsilon(\omega)$ può avere qui punti di ramificazione e per la sua definizione come funzione analitica nel semipiano inferiore può essere necessario un taglio lungo il semiasse. Allora l'uguaglianza (82,2) non significa altro che la coniugazione complessa dei valori di $\varepsilon(\omega)$ su ambedue le sponde del taglio.

Sottolineiamo che la proprietà (82,2) esprime semplicemente che il legame operatoriale $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ deve rendere reale $\mathbf{D}$ per reale $\mathbf{E}$. Se la funzione $\mathbf{E}(t)$ è data dall'espressione reale

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t}, \tag{82,4}$$

allora, applicando l'operatore $\hat{\varepsilon}$ a ciascuno dei due termini, otteniamo

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon(-\omega^*)\,\mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t};$$

la condizione per cui questa grandezza è reale coincide con la condizione (82,2).

Secondo i risultati del § 80 la parte immaginaria della funzione $\varepsilon(\omega)$ è positiva per valori reali positivi di $\omega = \omega'$, cioè sulla parte destra dell'asse reale. Poiché, secondo l'(82,2), $\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega') = -\operatorname{Im}\varepsilon(\omega')$, nella parte sinistra di questo asse la parte immaginaria di $\varepsilon(\omega)$ è negativa. Quindi,

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\varepsilon > 0 \text{ per } \omega = \omega' > 0, \\ \operatorname{Im}\varepsilon < 0 \text{ per } \omega = \omega' < 0. \end{cases} \tag{82,5}$$

Nel punto $\omega = 0$ la funzione $\operatorname{Im}\varepsilon$ cambia di segno passando per zero (in dielettrici) o per infinito (in metalli). Questo è l'unico punto dell'asse reale in cui $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ può diventare nulla.

Quando ω tende all'infinito seguendo qualsiasi via (nel semipiano superiore) la funzione $\varepsilon(\omega)$ tende all'unità. Questa circostanza è stata già menzionata nel § 78 per il caso in cui $\omega \to \infty$ lungo l'asse reale. Nel caso generale ciò risulta dalla stessa formula (82,1): se $\omega \to \infty$ in modo tale che $\omega'' \to \infty$, allora l'integrale nell'(82,1) si annulla grazie al fattore $\exp(-\tau\omega'')$ nell'espressione integranda; se, invece, ω'' resta finita e se $|\omega'| \to \infty$ allora l'integrale si annulla grazie al fattore oscillante $e^{i\omega'\tau}$.

Le proprietà suindicate della funzione $\varepsilon(\omega)$ sono sufficienti per dimostrare il seguente teorema: la funzione $\varepsilon(\omega)$ non assume valori reali in nessun punto finito del semipiano superiore, ad eccezione dei punti dell'asse immaginario; su quest'ultimo la funzione $\varepsilon(\omega)$ decresce monotonamente dai valori $\varepsilon_0 > 1$ (in dielettrici) o da $+\infty$ (in metalli) per $\omega = i0$ fino a 1 per $\omega = i\infty$. Ne segue, in particolare, che la funzione $\varepsilon(\omega)$ non ha zeri nel semipiano superiore. Non ripetiamo qui la dimostrazione di queste affermazioni, data in V § 123; si deve ricordare soltanto che da suscettività generalizzata funge non la funzione stessa $\varepsilon(\omega)$, ma la differenza $\varepsilon(\omega) - 1$.

Non ripetiamo neanche la deduzione delle relazioni tra le componenti reale ed immaginaria della funzione $\varepsilon(\omega)$. Scriviamo soltanto le formule derivate cambiando, in modo opportuno, le denotazioni.

Scriviamo la funzione $\varepsilon(\omega)$ della variabile reale ω così come nel § 77, nella forma $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. Se la funzione $\varepsilon(\omega)$ si riferisce ai dielettrici, le relazioni summenzionate sono

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega} dx, \tag{82,6}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega} dx, \tag{82,7}$$

ove il trattino trasversale nel segno di integrale significa che l'integrale dell'espressione polare è inteso nel senso di suo valore principale (*H.A. Kramers*, *R.L. Kronig*, 1927). Ricordiamo che l'unica proprietà fondamentale della funzione $\varepsilon(\omega)$ usata nel dedurre queste formule è la mancanza di punti singolari nel semipiano superiore. Perciò si può affermare che le formule di Kramers-Kronig (così come la proprietà della funzione $\varepsilon(\omega)$) sono conseguenza diretta del principio fisico di causalità.

Tenendo conto che la funzione $\varepsilon''(\omega)$ è dispari, si può ridurre l'(82,6) alla forma

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2-\omega^2} dx. \tag{82,8}$$

Se si ha a che fare con un conduttore, nel punto $\omega = 0$ la funzione $\varepsilon(\omega)$ ha un polo nell'intorno del quale $\varepsilon = 4\pi\sigma i/\omega$ (77,9). Ciò implica la comparsa nella formula (82,7) di un termine addizionale (cfr. V, la formula (123,18))

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(x)}{x-\omega} dx + \frac{4\pi\sigma}{\omega}; \tag{82,9}$$

quanto alla formula (82,6) o (82,8), esse restano immutate. Inoltre, nel caso dei metalli si deve fare la seguente osservazione. Alla fine del § 77 è stato detto che per i metalli possono esistere domini di frequenze in cui la funzione $\varepsilon(\omega)$ perde il suo significato fisico per effetti della non uniformità spaziale del campo. Fra l'altro, nelle formule in esame si deve integrare rispetto a tutte le frequenze. In questi casi con $\varepsilon(\omega)$ nei domini di frequenze corrispondenti si deve intendere funzione che si ottiene in seguito alla soluzione del problema formale concernente il comportamento del corpo nel campo elettrico periodico spazialmente uniforme virtuale (e non nel campo immancabilmente non uniforme dell'onda elettromagnetica).

È di importanza particolare la formula (82,8). Essa consente di calcolare la funzione $\varepsilon'(\omega)$ se è nota almeno in modo approssimato

(empirico, ad esempio) la funzione $\varepsilon''(\omega)$ per il corpo in esame. In questo caso è importante che per ogni funzione $\varepsilon''(\omega)$ soddisfacente fisicamente alla condizione necessaria $\varepsilon'' > 0$ per $\omega > 0$ la formula (82,8) fornisca la funzione $\varepsilon'(\omega)$ che non contraddice nessuna condizione fisica necessaria, cioè in linea di principio possibile (il segno e la grandezza di ε' non sono limitati da nessuna condizione fisica generale). Questa circostanza è a dare la possibilità di usare la formula (82,8) anche per una funzione $\varepsilon''(\omega)$ approssimata. Viceversa, la formula (82,7) non dà (nel caso generale della funzione $\varepsilon'(\omega)$ qualsiasi) una funzione $\varepsilon''(\omega)$ fisicamente possibile poiché la positività di quest'ultima non è assicurata automaticamente.

Nella teoria della dispersione si può scrivere l'espressione di $\varepsilon'(\omega)$ nella forma

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} \int_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2}\, dx, \tag{82,10}$$

ove e, m sono la carica e la massa dell'elettrone e $f(\omega)\, d\omega$ si chiama *forza degli oscillatori* nell'intervallo di frequenze $d\omega$. Secondo l'(82,8) questa grandezza è legata con $\varepsilon''(\omega)$ mediante la relazione

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2}\, \omega\varepsilon''(\omega). \tag{82,11}$$

Nei metalli $f(\omega)$ tende a un limite finito per $\omega \to 0$.

Per ω sufficientemente grandi nell'espressione integranda dell'(82,8) si può trascurare x rispetto a ω. Allora

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^\infty x\varepsilon''(x)\, dx.$$

D'altra parte, abbiamo la formula (78,1) esprimente la permettività dielettrica per grandi frequenze. Il confronto di ambedue le espressioni conduce alla *regola delle somme*

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty f(\omega)\, d\omega = N, \tag{82,12}$$

ove N è il numero totale di elettroni nell'unità di volume della sostanza.

Se $\varepsilon''(\omega)$ non ha singolarità per $\omega = 0$, nella formula (82,8) si può passare al limite $\omega \to 0$ e si ottiene così

$$\varepsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon''(x)}{x}\, dx. \tag{82,13}$$

Se, invece, il punto $\omega = 0$ è singolare per la funzione $\varepsilon''(\omega)$ (nei metalli), il limite cui tende l'integrale (82,8) per $\omega \to 0$ non coincide con il valore che si ottiene per semplice cancellazione di ω in esso. Per il calcolo del limite suindicato è necessario sostituire preliminarmente nell'espressione integranda $\varepsilon''(x)$ con

$$\varepsilon''(x) - \frac{4\pi\sigma}{x};$$

questa sostituzione non cambia il valore dell'integrale poiché si ha identicamente

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - \omega^2} = 0.$$

Per i dielettrici la formula (82,13) si può riscrivere come segue:

$$\varepsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \overline{\omega^{-2}}, \tag{82,14}$$

ove il trattino superiore indica la media calcolata mediante la forza degli oscillatori:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2} d\omega.$$

Questa espressione può essere utile per diverse stime delle grandezze ε_0.

Infine, si può dedurre una formula esprimente valori della funzione $\varepsilon(\omega)$ sul semiasse immaginario superiore in funzione dei valori di $\varepsilon''(\omega)$ sull'asse reale (i calcoli corrispondenti sono stati eseguiti in V § 123). Questa formula si scrive così:

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 + \omega^2} dx. \tag{82,15}$$

Integrando questa espressione rispetto a ω da entrambe le parti, otteniamo

$$\int_0^\infty [\varepsilon(i\omega) - 1]\, d\omega = \int_0^\infty \varepsilon''(\omega)\, d\omega. \tag{82,16}$$

Tutti i risultati ottenuti (con qualche piccola modifica) si riferiscono alla permeabilità magnetica $\mu(\omega)$. La differenza è legata soprattutto al fatto che all'aumentare della frequenza la funzione $\mu(\omega)$ perde relativamente presto il suo significato fisico. Perciò è necessario applicare le formule di Kramers-Kronig, ad esempio, nel seguente modo. Al posto dell'intervallo infinito consideriamo quello

finito di valori ω (da 0 a ω_1) che si estende fino a frequenze per le quali μ ha ancora senso, ma cessa già di variare e si può supporne la componente immaginaria nulla; il valore corrispondente di μ indichiamo con μ_1 [1]). Allora la formula (82,8) si deve scrivere come segue:

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2}\, dx. \qquad (82,17)$$

Contrariamente a ε_0, il valore $\mu_0 = \mu(0)$ può essere sia minore che maggiore di 1. La variazione di $\mu(\omega)$ lungo l'asse immaginario rappresenta, come prima, una decrescenza monotona, ma questa volta da μ_0 a $\mu_1 < \mu_0$.

È da notare infine che delle proprietà analitiche stabilite in questo paragrafo per la funzione $\varepsilon(\omega)$ gode in misura uguale anche la funzione $\eta(\omega) \equiv 1/\varepsilon(\omega)$. Così, l'analiticità di $\eta(\omega)$ nel semipiano superiore deriva dall'analiticità e dalla mancanza di zeri della funzione $\varepsilon(\omega)$ in questo semipiano. Per la funzione $\eta(\omega)$ si verificano le stesse relazioni di Kramers-Kronig (82,6-7) che per $\varepsilon(\omega)$.

§ 83. *Onda monocromatica piana*

Le equazioni di Maxwell (77,2) per il campo monocromatico sono

$$i\omega\mu(\omega)\,\mathbf{H} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \quad i\omega\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \qquad (83,1)$$

Queste equazioni di per se stesse costituiscono un sistema completo in quanto da esse derivano automaticamente le equazioni (77,1), e perciò non si devono considerare separatamente. Supponendo omogeneo il mezzo e escludendo da queste equazioni **H** (o **E**), otteniamo l'equazione del secondo ordine

$$\Delta\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0 \qquad (83,2)$$

(e la stessa equazione per **H**).

Consideriamo un'onda monocromatica piana propagantesi in un mezzo omogeneo illimitato. Nell'onda piana nel vuoto la dipendenza del campo dalle coordinate è data da un fattore della forma $e^{i\mathbf{kr}}$ con il vettore d'onda reale **k**. Quando va considerata la propagazione

[1]) Di fatto ω_1 deve verificare la condizione $\omega_1\tau \gg 1$, ove τ è il più piccolo dei tempi di rilassamento per i processi ferro- e paramagnetici nei magneti.

delle onde nei mezzi materiali nel caso generale, è necessario introdurre anche valori complessi:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'',$$

ove $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{k}''$ sono vettori reali.

Ponendo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ proporzionali a $e^{i\mathbf{kr}}$ e derivando le equazioni (83,1) rispetto alle coordinate, otteniamo

$$\omega\mu\mathbf{H} = c\,[\mathbf{kE}], \quad \omega\varepsilon\mathbf{E} = -c\,[\mathbf{kH}]. \tag{83,3}$$

Escludendo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ da queste due relazioni troviamo la seguente espressione per il quadrato del vettore d'onda:

$$\mathbf{k}^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2i\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{83,4}$$

Si vede che $\mathbf{k}$ può essere reale esclusivamente se ε e μ sono reali e positive. Ma persino in questo caso $\mathbf{k}$ può essere anche complesso a condizione che debba essere $\mathbf{k}'\mathbf{k}'' = 0$ (avremo a che fare con questo caso studiando la riflessione totale, si veda il § 86).

Si deve tener conto che nel caso generale dei vettori $\mathbf{k}$ complessi si può chiamare « piana » l'onda soltanto in modo convenzionale. Scrivendo

$$e^{i\mathbf{kr}} = e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}e^{-\mathbf{k}''\mathbf{r}},$$

vediamo che i piani perpendicolari al vettore $\mathbf{k}'$ sono piani della fase costante. Ma piani dell'ampiezza costante sono quelli perpendicolari al vettore $\mathbf{k}''$ lungo la direzione del quale l'onda si smorza. Quanto alle superficie del valore costante del campo stesso, esse nel caso generale non saranno piane. Le onde di questo tipo si chiamano *onde piane eterogenee* a differenza delle onde piane omogenee ordinarie.

Il legame tra componenti dei campi elettrico e magnetico nel caso generale è dato dalle formule (83,3). In particolare, moltiplicando queste formule scalarmente per $\mathbf{k}$, otteniamo

$$\mathbf{kE} = 0, \quad \mathbf{kH} = 0, \tag{83,5}$$

ed elevando una di esse al quadrato e usando l'espressione (83,4) troviamo

$$\mathbf{E}^2 = \frac{\mu}{\varepsilon}\mathbf{H}^2. \tag{83,6}$$

Tuttavia, si deve ricordare che essendo complessi tutti e tre i vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, queste relazioni nel caso generale non hanno quel significato evidente che avrebbero per grandezze reali.

Senza soffermarci su relazioni complicate che si ottengono nel caso generale, consideriamo alcuni casi particolari più importanti.

Risultati particolarmente semplici si ottengono per un'onda che si propaga senza smorzamento in un mezzo omogeneo non assorbente (trasparente). Il vettore d'onda in questo caso è reale e per grandezza vale

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c} = n\,\frac{\omega}{c}, \tag{83,7}$$

ove $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ si chiama *indice di rifrazione* del mezzo. Sia il campo elettrico che quello magnetico giacciono nel piano perpendicolare al vettore **k** (onda trasversale pura), essendo fra l'altro mutuamente perpendicolari e legati dalla relazione

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,[\mathbf{lE}] \tag{83,8}$$

(**l** il vettore unitario nella direzione **k**). Ne risulta che

$$\varepsilon\mathbf{EE}^* = \mu\mathbf{HH}^*;$$

ciò non significa tuttavia uguaglianza delle energie elettrica e magnetica nell'onda (come nel caso senza dispersione) poiché quest'ultime sono date da altre espressioni (due termini nella formula (80,11)). La densità totale dell'energia elettromagnetica in questo caso si può ridurre alla forma

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi\mu\omega}\,\frac{d}{d\omega}\,(\omega^2\varepsilon\mu)\,\mathbf{EE}^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{dk}{d\omega}\,\mathbf{EE}^*. \tag{83,9}$$

La velocità u di propagazione dell'onda nel mezzo è data dalla nota espressione per la velocità di gruppo [1]):

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{d\,(n\omega)/d\omega}. \tag{83,10}$$

Quindi, $u = \overline{S}/\overline{U}$ conformemente al suo significato come velocità di trasporto dell'energia nel pacchetto d'onda; qui $\overline{U}$ è la densità dell'energia data dalla formula (83,9) e

$$\overline{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{EE}^* \tag{83,11}$$

la media del vettore di Poynting. Nel caso senza dispersione allorché l'indice di rifrazione è indipendente dalla frequenza, l'espressione (83,10) si riduce semplicemente a c/n (cfr. la formula (75,13)).

In seguito, consideriamo il caso più generale di propagazione dell'onda elettromagnetica nel mezzo assorbente quando il vettore d'onda ha una direzione ben determinata, cioè $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{k}''$ sono mutua-

[1]) Se esiste un assorbimento sensibile l'introduzione della nozione di velocità di gruppo è in generale impossibile poiché nel mezzo assorbente i pacchetti d'onda non si propagano ma sono soggetti a un rapido smussamento.

mente paralleli. Tale onda è piana nel senso letterale poiché da superficie di valori costanti del campo fungono in essa i piani perpendicolari alla direzione di propagazione (onda piana omogenea).

In questo caso è possibile introdurre la « lunghezza » complessa k del vettore d'onda secondo $\mathbf{k} = k\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}$ è il vettore unitario nella direzione $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{k}''$), e dall'(83,4) abbiamo così $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\omega/c$. Si suole descrivere la grandezza complessa $\sqrt{\varepsilon\mu}$ nella forma $n + i\varkappa$ con n e $\varkappa$ reali in modo che

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c} = (n + i\varkappa)\frac{\omega}{c}. \tag{83,12}$$

La grandezza n si chiama *indice di rifrazione* e $\varkappa$ *coefficiente di assorbimento* del mezzo; quest'ultimo determina la velocità di smorzamento dell'onda a misura della sua propagazione. È da sottolineare, tuttavia, che lo smorzamento dell'onda non è legato necessariamente all'esistenza di assorbimento vero e proprio; la dissipazione dell'energia si verifica esclusivamente per ε o μ complessi, mentre il coefficiente $\varkappa$ può essere non nullo anche per ε e μ reali (negative).

Esprimiamo le grandezze n e $\varkappa$ in funzione delle parti reale e immaginaria della costante dielettrica supponendo in questo caso che $\mu = 1$. Dall'uguaglianza $n^2 - \varkappa^2 + 2in\varkappa = \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ abbiamo

$$n^2 - \varkappa^2 = \varepsilon', \quad 2n\varkappa = \varepsilon''.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto a n e $\varkappa$, otteniamo [1])

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}}. \tag{83,13}$$

In particolare, per i metalli nel dominio di frequenze in cui si verifica la formula (77,9), la componente immaginaria di ε è grande rispetto a quella reale ed è legata alla conducibilità mediante la relazione $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; trascurando ε' rispetto a ε'', troviamo che n e $\varkappa$ coincidono e valgono (in accordo con la (59,4))

$$n = \varkappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \tag{83,14}$$

Quanto al legame tra i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ nell'onda omogenea piana considerata, riotteniamo la formula (83,8) ma con le grandezze ε e μ complesse. Essa mostra nuovamente che i due campi sono perpendi-

[1]) Poiché $\varepsilon'' > 0$, n e $\varkappa$ possono essere di segno identico conformemente al fatto che l'onda si smorza nella direzione in cui si propaga. I segni positivi nell'(83,13) corrispondono all'onda propagantesi nella direzione positiva dell'asse x.

colari alla direzione di propagazione dell'onda e tra di essi. Se $\mu = 1$, allora scrivendo $\sqrt{\varepsilon}$ nella forma

$$\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{n^2 + \varkappa^2} \exp [i \operatorname{arctg} (\varkappa/n)],$$

vediamo che il campo magnetico in valore assoluto supera il campo elettrico di $\sqrt{n^2 + \varkappa^2}$ volte e per fase è in ritardo di un angolo $\operatorname{arctg} (\varkappa/n)$; nel caso (83,14) lo sfasamento vale $\pi/4$.

Problema

In un istante dato ($t = 0$) esiste perturbazione elettromagnetica in un dominio spaziale. Non alimentata da sorgente esterna questa perturbazione si smorzerà con il tempo. Trovare le condizioni che determinano questo smorzamento.

Soluzione. Sviluppiamo la perturbazione iniziale nell'integrale di Fourier rispetto alle coordinate e consideriamo una componente con **k** come vettore d'onda (vettore reale!). La sua dipendenza ulteriore dal tempo è data (per t sufficientemente grande) dal fattore $e^{-i\omega t}$ con una frequenza ω complessa da definire; il decremento dello smorzamento è $-\operatorname{Im} \omega$.

Dalle equazioni

$$-c^{-1}\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\,[\mathbf{kE}], \quad c^{-1}\dot{\mathbf{D}} = \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\,[\mathbf{kH}]$$

ricaviamo, escludendo **H**,

$$c^{-2}\ddot{\mathbf{D}} = [\mathbf{k}\,[\mathbf{kE}]]. \tag{1}$$

Consideriamo la direzione **k** come l'asse x. Per la parte longitudinale della perturbazione di qui abbiamo $\ddot{D}_x = 0$, e perciò $D_x = 0$.

D'altra parte, il legame tra D_x e E_x è dato dall'operatore integrale

$$E_x(t) = \hat{\varepsilon}^{-1} D_x = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, D_x(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Poiché in questo caso $D_x(t) = 0$ per $t > 0$ (per cui non esistono sorgenti del campo per $t > 0$), allora

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{0} F(t-\tau)\, D_x(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Di qui si vede che per t grandi la dipendenza di E_x dal tempo è determinata prima di tutto dalla dipendenza temporale della funzione $F(t)$.

Per il campo monocromatico dalla (3) ricaviamo

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \int_{0}^{\infty} F(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

e, viceversa,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\, e^{-i\omega t}\, \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Per stimare questo integrale per t grandi spostiamo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore ω ove l'espressione integranda decresce rapidamente. In questo caso si devono aggirare tutti i punti singolari della funzione $1/\varepsilon(\omega)$ cioè gli zeri della funzione $\varepsilon(\omega)$ e i suoi punti di diramazione. Come risultato l'integrale sarà proporzionale soprattutto a $e^{-i\omega_0 t}$, ove ω_0 è il più vicino all'asse reale dei punti singolari suindicati. Con ciò si risolve il problema posto per la parte longitudinale della perturbazione.

Per le componenti trasversali dall'(1) abbiamo

$$\frac{1}{c^2}\ddot{D}_{y,z}+k^2E_{y,z}=0.$$

Uno studio analogo consente di concludere che la parte cercata ω_0 è nel caso considerato lo zero più vicino all'asse reale o il punto di diramazione della funzione

$$\omega^2\varepsilon(\omega)-c^2k^2.$$

§ 84. *Mezzi trasparenti*

Applichiamo le formule generali dedotte nel § 82 a mezzi debolmente assorbenti (in un dato dominio di frequenze), supponendo cioè che per queste frequenze si possa trascurare la parte immaginaria della permettività dielettrica.

In questo caso è superfluo calcolare il valore principale nella formula (82,2) poiché il punto $x=\omega$ scompare difatti dal dominio d'integrazione. In seguito, l'integrale si può derivare rispetto al parametro ω come integrale ordinario non avente singolarità nell'espressione integranda. Dopo questa derivazione otteniamo

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}=\frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{x\varepsilon''(x)\,dx}{(\omega^2-x^2)^2}.$$

Essendo positiva l'espressione integranda in tutto il dominio di integrazione, possiamo concludere che

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}>0, \tag{84,1}$$

vale a dire che nel dominio senza assorbimento la permettività dielettrica è una funzione monotonamente crescente della frequenza.

Nello stesso dominio di frequenze si ottiene analogamente un'altra disuguaglianza

$$\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\varepsilon-1)]=\frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2-\omega^2)^2}\,dx>0,$$

ossia

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}>\frac{2(1-\varepsilon)}{\omega}. \tag{84,2}$$

Se $\varepsilon < 1$ o persino negativa, questa disuguaglianza è più forte di quella (84,1) [1]).

È da notare che le disuguaglianze (84,1) e (84,2) (e quelle analoghe per $\mu(\omega)$) garantiscono automaticamente che sia soddisfatta la disuguaglianza $u < c$ per la velocità di propagazione delle onde. Così, per $\mu = 1$ abbiamo $n = \sqrt{\varepsilon}$ e, introducendo n^2 al posto di ε nelle (84,1) e (84,2), otteniamo

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \tag{84,3}$$

Quindi, per la velocità u (83,10) si ottengono due disuguaglianze: $u < c/n$ e $u < cn$, da cui si vede che $u < c$ come per $n > 1$ così per $n < 1$. Da queste disuguaglianze risulta anche che $u > 0$, vale a dire che la velocità di gruppo è diretta come il vettore d'onda. Questa sua proprietà è del tutto naturale anche se dal punto di vista meramente logico non è affatto obbligatoria.

Supponiamo che il dominio di assorbimento debole si estenda in un intervallo largo di frequenze da ω_1 a ω_2 (e che $\omega_2 \gg \omega_1$) e consideriamo frequenze ω tali che $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Il dominio di integrazione nell'(82,8) si dimezza in due parti: $x < \omega_1$ e $x > \omega_2$. Nella prima parte si può trascurare a denominatore dell'espressione integranda x rispetto a ω, e nella seconda $-\omega$ rispetto a x:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_{\omega_2}^{\infty} \varepsilon''(x)\frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^{\omega_1} x\varepsilon''(x)\,dx, \tag{84,4}$$

vale a dire che la funzione $\varepsilon(\omega)$ nel dominio considerato ha la forma $a - b/\omega^2$, ove a e b sono costanti positive. La seconda di esse può essere espressa in funzione della forza degli oscillatori N_1 responsabili per assorbimento nel dominio da 0 a ω_1 (cfr. l'(82,12)), e allora

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{4\pi N_1 e^2}{m\omega^2}. \tag{84,5}$$

Da questa espressione risulta che in un dominio sufficientemente largo di assorbimento debole la permettività dielettrica, in generale, passa per lo zero. Ricordiamo in questo proposito che è trasparente nel senso letterale un mezzo in cui la funzione $\varepsilon(\omega)$ è non soltanto reale, ma anche positiva; per la grandezza ε negativa l'onda si smorza in profondità del mezzo anche se in essa non si produce dissipazione vera e propria dell'energia.

Nel caso della frequenza per la quale $\varepsilon = 0$ l'induzione $\mathbf{D}$ si annulla identicamente e le equazioni di Maxwell ammettono l'esi-

[1]) Operando con la semisomma delle disuguaglianze (84,1) e (84,2) otteniamo che $d(\omega\varepsilon)/d\omega > 1$, cioè questa disuguaglianza è più forte di quella (80,13).

stenza di un campo elettrico variabile soddisfacente alla sola equazione rot $\mathbf{E} = 0$ per il campo magnetico nullo. In altre parole, in questo caso è possibile l'esistenza delle onde elettriche longitudinali. Per determinare la velocità della loro propagazione è necessario tener conto della dispersione della permettività dielettrica non soltanto rispetto alla frequenza, ma anche rispetto al vettore d'onda; torneremo a questa questione nel § 105.

Supponiamo infine che in un dominio di trasparenza largo esista un dominio (« linea ») di assorbimento attorno a una certa frequenza ω_0. Consideriamo l'intorno di questa frequenza soddisfacente alla condizione

$$\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \tag{84,6}$$

ove γ è la larghezza della linea. In questo dominio si può sostituire ovunque nell'espressione integranda (82,6) x con ω_0, ad eccezione della funzione rapidamente variabile $\varepsilon''(x)$. Allora otteniamo

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega) \approx \frac{1}{\pi(\omega_0 - \omega)} \int \varepsilon''(x)\, dx, \tag{84,7}$$

ove l'integrazione segue la linea di assorbimento.

Problema

Sulla frontiera del semispazio ($x > 0$) riempito da un mezzo trasparente ($\mu = 1$) cade nella direzione normale un'onda elettromagnetica piana con il fronte anteriore che si interrompe bruscamente. Determinare la struttura del fronte d'onda capitato nell'interno del mezzo (*A. Sommerfeld, L. Brillouin*, 1914).

Soluzione. Supponiamo che l'onda incida sulla frontiera del mezzo all'istante $t = 0$ in modo tale che per $x = 0$ il campo dell'onda incidente (E o H) sia

$$E = 0 \text{ per } t < 0; \quad E \sim e^{-i\omega_0 t} \text{ per } t > 0.$$

Sviluppando questo campo nell'integrale di Fourier rispetto al tempo, riduciamo il problema alla caduta delle onde infinitamente estese di frequenza diversa sulla stessa frontiera. L'ampiezza della componente di Fourier di frequenza ω è proporzionale a

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\, d\tau.$$

L'onda incidente di frequenza ω penetrata all'interno del mezzo ha la forma

$$a(\omega) \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega}{c} nx\right),$$

ove l'ampiezza $a(\omega)$ è una funzione lentamente variabile della frequenza. Perciò, nel caso in questione, il campo dell'onda nel mezzo è

$$E \sim \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, a(\omega) \exp\left(-i\omega t + i\frac{\omega}{c} nx\right) \int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\, d\tau.$$

Nel dominio in prossimità del fronte d'onda in questo integrale sono importanti i valori di ω vicini a ω_0. Introducendo la nuova variabile $\xi = \omega - \omega_0$, sostituiamo $a(\omega)$ con $a(\omega_0)$ e sviluppiamo l'esponente in potenze di ξ. Omettendo tutte le costanti inessenziali e i fattori di fase, otteniamo

$$E \sim \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ i\xi \left(\tau - t + \frac{x}{u} \right) - \frac{i\xi^2}{2} x \frac{u'}{u^2} \right\} d\xi \, d\tau,$$

ove $u = u(\omega_0)$ è la velocità di propagazione (83,10) e $u' = \left.\frac{du}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$. Integrando rispetto a $d\xi$ è facile ridurre E alla forma seguente:

$$E \sim \int_w^{\infty} e^{\pm i\eta^2} d\eta, \qquad w = \frac{x - ut}{\sqrt{2x \mid u' \mid}}$$

(il segno dell'esponente dipende dal segno di u'). L'intensità dell'onda in prossimità del suo fronte è distribuita secondo la legge

$$I \sim \left| \int_w^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta \right|^2.$$

Questa espressione coincide formalmente con la formula che determina la distribuzione dell'intensità in prossimità dell'orlo dell'ombra per diffrazione di Fresnel (cfr. II § 60). Per $w > 0$ l'intensità decresce monotonamente all'aumentare di w, e per $w < 0$ compie oscillazioni con ampiezza decrescente attorno a un valore costante cui tende per $w \to -\infty$.

A grandi distanze il fronte considerato è preceduto dai cosiddetti « precursori » propagantisi a velocità c. Essi corrispondono alle componenti di Fourier con grandi frequenze per le quali $\varepsilon \to 1$.

Capitolo X

PROPAGAZIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 85. *Ottica geometrica*

La condizione di applicabilità dell'ottica geometrica consiste, come è noto, nella piccolezza della lunghezza d'onda λ rispetto alle dimensioni caratteristiche del problema l (cfr. II § 53). Il legame tra l'ottica geometrica e quella ondulatoria è stabilita dal fatto che per $\lambda \ll l$ ogni grandezza φ descrivente il campo dell'onda (ciascuna delle componenti di **E** o **H**) è espressa da una formula del tipo

$$\varphi = ae^{i\psi}$$

ove l'ampiezza a è funzione lentamente variabile delle coordinate e del tempo, mentre la fase ψ, grandezza rilevante, è funzione « quasi lineare » delle coordinate e del tempo. Quest'ultima si chiama *iconale* nell'ottica geometrica e gioca ruolo fondamentale. La sua derivata temporale determina la frequenza dell'onda:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega, \tag{85,1}$$

e le derivate rispetto alle coordinate determinano il vettore d'onda:

$$\nabla\psi = \mathbf{k} \tag{85,2}$$

e quindi la direzione dei raggi (semirette) in ciascun punto dello spazio.

Per l'onda monocromatica nelle condizioni stazionarie la frequenza è grandezza costante e la dipendenza dell'iconale dal tempo è data dal termine $-\omega t$. Al posto di ψ introduciamo un'altra funzione ψ_1 (che chiameremo sempre iconale) secondo

$$\psi = -\omega t + \frac{\omega}{c}\psi_1(x, y, z); \tag{85,3}$$

ψ_1 è la sola funzione delle coordinate e il suo gradiente

$$\nabla\psi_1 = \mathbf{n}, \tag{85,4}$$

ove **n** è un vettore legato a **k** mediante

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{85,5}$$

Il valore assoluto del vettore $\mathbf{n}$ è uguale all'indice di rifrazione n del mezzo [1]). Perciò l'equazione dell'iconale per la propagazione dei raggi in un mezzo con l'indice di rifrazione $n(x, y, z)$ come funzione data è

$$(\nabla\psi_1)^2 \equiv \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \qquad (85,6)$$

L'equazione per la propagazione dei raggi (nelle condizioni stazionarie) può essere anche ottenuta dal *principio di Fermat* secondo il quale per la traiettoria del raggio tra due punti dati A e B dello spazio l'integrale

$$\psi_1 = \int_A^B \mathbf{n}\, d\mathbf{l} = \int_A^B n\, dl$$

è minimo. Uguagliando a zero la variazione di questo integrale abbiamo

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n \cdot dl + n\delta\, dl) = 0.$$

Supponiamo che $\delta\mathbf{r}$ sia lo spostamento della traiettoria del raggio per variazione. Allora abbiamo

$$\delta n = \delta\mathbf{r}\cdot\nabla n, \quad \delta\, dl = \mathbf{l}\, d\,\delta\mathbf{r},$$

ove $\mathbf{l}$ è il vettore unitario della tangente al raggio. Sostituendo in $\delta\psi_1$ e integrando il secondo termine per parti (tenendo conto che nei punti A e B $\delta\mathbf{r} = 0$) abbiamo

$$\delta\psi_1 = \int_A^B \delta\mathbf{r}\cdot\nabla n\, dl + \int_A^B n\mathbf{l}\, d\,\delta\mathbf{r} = \int_A^B \left(\nabla n - \frac{d(n\mathbf{l})}{dl}\right)\delta\mathbf{r}\cdot dl = 0.$$

Di qui

$$\frac{d(n\mathbf{l})}{dl} = \nabla n. \qquad (85,7)$$

Sviluppando la derivata e sostituendovi $\frac{dn}{dl} = \mathbf{l}\nabla n$, riscriviamo questa equazione nella forma

$$\frac{d\mathbf{l}}{dl} = \frac{1}{n}[\nabla n - \mathbf{l}(\mathbf{l}\nabla n)]. \qquad (85,8)$$

Questa è l'equazione che determina la forma dei raggi.

Come è noto dalla geometria differenziale, la derivata $d\mathbf{l}/dl$ lungo il raggio vale $\mathbf{N}/R$, ove $\mathbf{N}$ è il vettore unitario della normale princi-

[1]) Nell'ottica geometrica si studiano i soli mezzi trasparenti.

pale e R il raggio di curvatura del raggio. Moltiplicando l'equazione (85,8) da ambo le parti per **N** e tenendo conto della mutua perpendicolarità di **N** e **l**, otteniamo

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N}\frac{\nabla n}{n}. \tag{85,9}$$

Il raggio si incurva verso il crescere dell'indice di rifrazione.

La velocità di propagazione dei raggi nell'ottica geometrica è diretta lungo **l** e data dalla derivata

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \tag{85,10}$$

Questa velocità si chiama *velocità di gruppo* e il rapporto ω/k *velocità di fase*. Quest'ultima non corrisponde alla velocità della propagazione fisica reale qualunque ne sia la grandezza.

È facile scrivere anche l'equazione che determina la variazione dell'intensità della luce lungo il raggio. L'intensità I rappresenta valore assoluto della media (rispetto al tempo) del vettore di Poynting. Quest'ultimo è diretto assieme alla velocità di gruppo lungo **l**:

$$\overline{\mathbf{S}} = I\mathbf{l}.$$

Nelle condizioni stazionarie la densità media dell'energia del campo in ogni punto dello spazio non varia con il tempo. Perciò l'equazione di conservazione dell'energia è div $\overline{\mathbf{S}} = 0$ o

$$\operatorname{div}(I\mathbf{l}) = 0. \tag{85,11}$$

Questa è l'equazione cercata.

Consideriamo infine la questione sul modo di variazione della direzione lungo il raggio della polarizzazione della luce polarizzata linearmente (*S.M. Rytov*, 1938).

Come è noto dalla geometria differenziale, una curva spaziale (nel caso considerato un raggio) è caratterizzata in ciascun suo punto da tre vettori unitari mutuamente perpendicolari appartenenti alla tangente **l**, alla normale principale **N** e alla binormale **b** (il cosiddetto triedro naturale). In virtù della trasversalità delle onde elettromagnetiche il vettore **E** (o **H**) giace sempre nel piano normale, ossia nel piano **N**, **b**.

Supponiamo che in un punto del raggio la direzione **E** coincida con la direzione **N**, cioè che essa giaccia nel piano osculatore (piano **N**, **l**). Come è noto, la deviazione della curva sulla lunghezza dl dal piano osculatore è sempre un infinitesimo di ordine superiore (del terzo ordine). Perciò si può affermare che il vettore **E** nello spostarsi lungo il raggio per la distanza dl resta nel piano osculatore iniziale. Il nuovo piano osculatore, invece, ruota rispetto a quel vecchio di angolo $d\varphi = dl/T$, ove T è il raggio di torsione della cur-

va. A ciò sarà uguale, quindi, l'angolo di rotazione del vettore **E** rispetto al vettore **N** nel piano normale. In tal modo, nello spostarsi lungo il raggio la direzione della polarizzazione ruota nel piano normale in modo tale che il suo angolo con la direzione della normale principale varia secondo l'equazione

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{T}. \tag{85,12}$$

In particolare, se non esiste torsione, cioè quando il raggio è una curva piana, la direzione del vettore **E** nel piano normale resta immutata come ciò è evidente a priori per ragioni di simmetria.

Problemi

1. Stabilire la legge di trasformazione della velocità di propagazione della luce in un mezzo (della velocità di gruppo) per trasformazione del sistema inerziale.

Soluzione. Per definizione della velocità di gruppo **u**, abbiamo

$$d\omega = \mathbf{u}\, d\mathbf{k}, \quad d\omega' = \mathbf{u}'\, d\mathbf{k}';$$

le grandezze con apice si riferiscono al sistema inerziale K' che si muove a velocità **v** rispetto al sistema K (grandezze senza apice). Secondo le formule della trasformazione di Lorentz per ogni 4-vettore d'onda abbiamo

$$k'_x = \gamma\,(k_x - v\omega/c^2), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z,$$
$$\omega = \gamma\,(\omega' + vk'_x),$$

ove $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (gli assi x, x' coincidono con la direzione **v**). Dalla formula nella seconda riga abbiamo

$$d\omega = \gamma\,(d\omega' + v\,dk'_x) = \gamma\,(\mathbf{u}'\, d\mathbf{k}' + v\, dk'_x).$$

Sostituendovi $d\mathbf{k}'$ espresso in funzione di $d\mathbf{k}$ e $d\omega$ dalle formule della prima riga e riunendo tutti i termini con $d\omega$, otteniamo

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{c^2}\, vv'_x\right) d\omega = \gamma\,(u'_x + v)\, dk_x + u'_y\, dk_y + u'_z\, dk_z.$$

Confrontando con $d\omega = \mathbf{u}\, d\mathbf{k}$, troviamo che le velocità $\mathbf{u}'$ e **v** si sommano in **u** secondo le formule relativistiche ordinarie della somma di velocità, come ciò si dovrebbe aspettare.

2. Determinare la velocità di propagazione della luce in un mezzo in moto (rispetto all'osservatore).

Soluzione. Siano ω e **k** la frequenza e il vettore d'onda luminosa nel sistema inerziale fisso K, e ω', $\mathbf{k}'$ le stesse grandezze nel sistema K' che si muove rispetto a K assieme con un liquido a velocità **v**. Nel sistema K' il liquido è immobile e perciò ω' e $\mathbf{k}'$ sono legati dalla relazione

$$ck' = \omega' n\,(\omega'). \tag{1}$$

Secondo le formule esprimenti la trasformazione di Lorentz per un 4-vettore d'onda abbiamo a meno dei termini del primo ordine in v/c;

$$\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v}, \quad k' = k - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{v}\mathbf{l}$$

($\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$). Sostituendo queste espressioni nell'(1) e sviluppando la funzione $n(\omega')$ in potenze di $\mathbf{v}$, otteniamo con la stessa precisazione [1])

$$k = \frac{\omega}{c} n + \frac{\omega}{c^2}\left[1 - n\frac{d(n\omega)}{d\omega}\right]\mathbf{vl}. \tag{2}$$

La velocità di propagazione (velocità di gruppo) in un mezzo immobile si ottiene derivando la relazione $ck = \omega n(\omega)$ e vale

$$\mathbf{u}_0 = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}\mathbf{l}. \tag{3}$$

Nel mezzo in moto essa si ottiene derivando la relazione (2) che preliminarmente riscriviamo nella forma

$$k = \frac{\omega}{c} n + \mathbf{kv}\left(\frac{1}{cn} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Troviamo di nuovo a meno dei termini del primo ordine

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{l}(\mathbf{lv})\left(\frac{u_0}{cn} - \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{n\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}\right) + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{4}$$

Quando la luce si propaga nella direzione del moto del mezzo ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{l}$), di qui ricaviamo [2])

$$u = u_0 + v\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) - \frac{vn\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}. \tag{5}$$

I primi due termini si possono ottenere semplicemente applicando la formula relativistica della somma di velocità. Se, invece, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{l}$ sono mutuamente perpendicolari, allora

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{6}$$

La velocità di fase dell'onda si ottiene dalla (2) nella forma

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \mathbf{vl}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right).$$

Per $\mathbf{v} \perp \mathbf{l}$ in essa non esiste effetto del primo ordine.

§ 86. *Riflessione e rifrazione delle onde*

Consideriamo la riflessione e la rifrazione di un'onda elettromagnetica monocromatica piana sulla frontiera piana di separazione tra due mezzi omogenei. L'incidenza si produce dal mezzo trasparente (mezzo *1*); per il momento non supponiamo che il secondo mezzo sia trasparente. Le grandezze relative alle onde incidente e rifratta indichiamo con gli indici 0 e 1, rispettivamente, e all'onda rifratta

[1]) È da notare che il secondo termine nella (2) e con esso tutti gli effetti del primo ordine si annullano identicamente per $n^2 = \varepsilon = 1 - \text{cost}\cdot\omega^{-2}$.

[2]) Questa formula descrive il cosiddetto *effetto Fizeau* previsto prima da *A. Fresnel* (1818). L'influenza della dispersione su questo effetto è stata studiata da *H.A. Lorentz* (1895).

con l'indice 2 (fig. 46). Consideriamo l'asse z come direzione della normale al piano di separazione (con la direzione positiva verso l'interno del mezzo *2*).

Essendo completamente uniforme il piano xy, la dipendenza della soluzione dell'equazione del campo da queste coordinate deve essere uguale in tutto lo spazio. Ciò vuol dire che le componenti k_x, k_y del vettore d'onda sono uguali per tutte e tre le onde. Ne segue, soprattutto, che le direzioni di propagazione di tutte le onde giacciono in un medesimo piano; supponiamo che esso sia il piano xz.

Dalle uguaglianze

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{86,1}$$

segue che le componenti z di questi vettori sono

$$\begin{gathered} k_{1z} = -k_{0z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0, \\ k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0}; \end{gathered} \tag{86,2}$$

in ambedue i mezzi poniamo $\mu = 1$. Il vettore $\mathbf{k}_0$, per definizione, è reale. Con esso è reale anche il vettore $\mathbf{k}_1$. Quanto alla grandezza k_{2z}, essa è complessa nel mezzo assorbente e la radice deve avere segno tale che $\operatorname{Im} k_{2z} > 0$ conformemente al fatto che l'onda rifratta si smorza in profondità del mezzo *2*.

Se ambedue i mezzi sono trasparenti, dalle uguaglianze (86,1) derivano le note leggi di riflessione e di rifrazione

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{86,3}$$

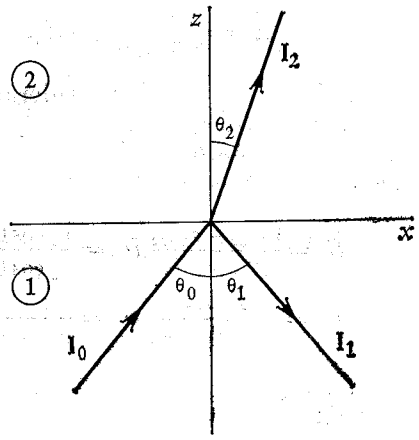


Fig. 46

Per la determinazione delle ampiezze delle onde riflessa e rifratta si devono considerare le condizioni di frontiera sulla superficie di separazione ($z = 0$). Per questo dobbiamo studiare separatamente due casi, e cioè: il campo $\mathbf{E}_0$ giace nel campo di incidenza o gli è perpendicolare; con ciò si studia anche il caso generale allorché $\mathbf{E}_0$ si può decomporre in due componenti.

Supponiamo dapprima che $\mathbf{E}_0$ sia perpendicolare al piano di incidenza. Per simmetria è evidente che la stessa ipotesi vale per i campi $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ nelle onde riflessa e rifratta. Quanto al vettore $\mathbf{H}$,

esso giace nel piano xz. Le condizioni di frontiera richiedono che siano continue le grandezze $E_y = E$ e H_x [1]); secondo l'(83,3) $H_x = -ck_zE_y/\omega$.

Il campo nel mezzo *1* rappresenta la somma delle onde incidente e riflessa in modo che abbiamo due equazioni:

$$E_0 + E_1 = E_2, \quad k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2.$$

I fattori esponenziali in E si annullano in ambedue i membri dell'uguaglianza in quanto sono identiche le grandezze k_x (così come le frequenze ω) in tutte e tre le onde; in seguito con **E** si intendono ovunque le ampiezze complesse delle onde. La soluzione delle equazioni scritte conduce alle *formule di Fresnel*

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0}}E_0, \\ E_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0}}E_0. \end{aligned} \tag{86,4}$$

Se sono trasparenti ambedue i mezzi, mediante le relazioni (86,3) si possono riscrivere queste formule come segue:

$$E_1 = \frac{\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_0)}{\operatorname{sen}(\theta_2+\theta_0)}E_0, \quad E_2 = \frac{2\cos\theta_0\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_2+\theta_0)}E_0. \tag{86,5}$$

Analogamente si può considerare il caso in cui **E** giace nel piano di incidenza; allora è più comodo fare calcoli per un campo magnetico perpendicolare al piano di incidenza. Come risultato si ottengono altre due formule di Fresnel:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\varepsilon_2k_{0z}-\varepsilon_1k_{2z}}{\varepsilon_2k_{0z}+\varepsilon_1k_{2z}}H_0 = \frac{\varepsilon_2\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0)}}H_0, \\ H_2 &= \frac{2\varepsilon_2k_{0z}}{\varepsilon_1k_{2z}+\varepsilon_2k_{0z}}H_0 = \frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\operatorname{sen}^2\theta_0)}}H_0. \end{aligned} \tag{86,6}$$

Se sono trasparenti entrambi i mezzi, queste formule si possono riscrivere così:

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0-\theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)}H_0, \quad H_2 = \frac{\operatorname{sen}2\theta_0}{\operatorname{sen}(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}H_0. \tag{86,7}$$

Il *coefficiente di riflessione* R va definito come rapporto fra il flusso medio (secondo il tempo) dell'energia riflesso dalla superficie e il flusso incidente. Ciascuno di questi flussi è dato dal valore medio

[1]) Le condizioni di frontiera per le componenti normali di **B** e **D** in questo caso non forniscono niente di nuovo in quanto le equazioni div **B** = 0 e div **D** = = 0 sono conseguenze delle equazioni (83,1).

della componente z del vettore di Poynting (83,11) dell'onda corrispondente

$$R=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1\,|\,\mathbf{E}_1\,|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0\,|\,\mathbf{E}_0\,|^2}=\frac{|\,\mathbf{E}_1\,|^2}{|\,\mathbf{E}_0\,|^2}.$$

Per l'incidenza normale ($\theta_0 = 0$) entrambi i casi di polarizzazione sono equivalenti e il coefficiente di riflessione è dato dalla formula

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2. \tag{86,8}$$

Questa formula è vera sia per il mezzo trasparente che per quello assorbente e riflessivo. Se introduciamo n_2 e $\varkappa_2$ in base a $\sqrt{\varepsilon_2} = n_2 + i\varkappa_2$, allora per incidenza dal vuoto ($\varepsilon_1 = 1$), ad esempio, otteniamo

$$R=\frac{(n_2-1)^2+\varkappa_2^2}{(n_2+1)^2+\varkappa_2^2}. \tag{86,9}$$

Lo studio ulteriore delle formule ottenute realizziamo supponendo che ambedue i mezzi siano trasparenti. Preliminarmente facciamo la seguente osservazione. La frontiera di separazione fra due mezzi distinti rappresenta in realtà non superficie geometrica ma uno strato sottile di transizione. Le formule (86,1) si verificano a prescindere dal carattere di ipotesi circa questo strato. Quanto alle formule di Fresnel, la loro deduzione basata sulle condizioni di frontiera di separazione suppone che lo spessore dello strato di transizione δ sia piccolo rispetto alla lunghezza d'onda λ. Di solito lo spessore δ è commensurabile con le distanze interatomiche piccole in ogni caso rispetto a λ (in caso contrario sarebbe impossibile in generale studio macroscopico del campo); perciò anche la condizione $\lambda \gg \delta$, come regola, è soddisfatta. Nel caso limite opposto il fenomeno di rifrazione avrebbe carattere assolutamente diverso. Per $\delta \gg \lambda$ sono soddisfatte le condizioni di applicabilità dell'ottica geometrica (la grandezza λ è piccola rispetto alle dimensioni del mezzo non omogeneo). Perciò in questo caso si potrebbe considerare la propagazione dell'onda come propagazione di raggi soggetti a rifrazione nello strato di transizione ma attraversanti questo strato senza nessuna riflessione. In altre parole, il coefficiente di riflessione sarebbe nullo.

Torniamo alle formule di Fresnel. Per riflessione da un mezzo trasparente i coefficienti di proporzionalità fra $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{E}_0$ in queste formule sono reali [1]). Ciò vuol dire che la fase dell'onda ora resta immutata ora fa un salto di π a seconda del segno dei coefficienti stessi. In particolare, la fase di un'onda rifratta coincide

[1]) Per il momento trascuriamo il caso della cosiddetta riflessione totale (si veda più avanti).

sempre con la fase di un'onda incidente. La riflessione, invece, può essere accompagnata da cambiamento della fase [1]). Così, per incidenza normale la fase di un'onda non cambia se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Se invece $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, i vettori $\mathbf{E}_1$ o $\mathbf{E}_0$ sono di segno opposto, vale a dire che la fase dell'onda cambia di π.

Per incidenza obliqua i coefficienti di riflessione sono dati in accordo con le espressioni (86,5) e (86,7) dalle seguenti formule:

$$R_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{sen}^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2 - \theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_0)}. \tag{86,10}$$

Qui e più avanti i simboli $\perp$ e $\parallel$ indicano i casi in cui il campo $\mathbf{E}$ sia perpendicolare o parallelo, rispettivamente, al piano di incidenza. È da notare la seguente simmetria: le espressioni (86,10) non variano per la sostituzione reciproca di θ_2 e θ_0 (quanto alle fasi delle onde riflesse, esse variano in questo caso secondo le formule (86,5) e (86,7) di π). In altre parole, il coefficiente di riflessione di un'onda che dal mezzo *1* incide sotto un angolo θ_0 è uguale al coefficiente di riflessione di un'onda che incide dal mezzo *2* sotto un angolo θ_2.

Di proprietà notevole gode la riflessione della luce che incide sotto un angolo θ_0 tale per cui $\theta_0 + \theta_2 = \pi/2$ (in questo caso i raggi riflesso e rifratto sono mutuamente perpendicolari). Indichiamo questo valore con θ_p; scrivendo $\operatorname{sen}\theta_p = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta_2) = \cos\theta_2$ e ricorrendo alla legge di rifrazione (86,3), otteniamo

$$\operatorname{tg}\theta_p = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{86,11}$$

Per $\theta_0 = \theta_p$ abbiamo $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2) = \infty$ e $R_{\parallel}$ si annulla. Perciò qualunque sia la direzione della luce polarizzata che incide sotto quest'angolo la luce riflessa sarà polarizzata in modo tale che il campo elettrico in essa sia perpendicolare al piano di incidenza. In questo modo sarà polarizzata la luce riflessa anche per incidenza della luce naturale; tutte le componenti con un'altra polarizzazione in questo caso, in generale, non si riflettono. L'angolo θ_p si chiama *angolo della polarizzazione totale* o *angolo di Brewster*. È da notare che mentre la riflessione può implicare la polarizzazione totale della luce naturale, nella luce rifratta non si ottiene polarizzazione totale qualunque sia l'angolo di incidenza.

La riflessione e la rifrazione della luce insufficientemente polarizzata riconduce sempre alla luce polarizzata in modo piano ma avente la direzione della polarizzazione, in generale, non coincidente con quella della luce incidente. Siano γ_0 l'angolo tra la direzione $\mathbf{E}_0$ e

[1]) In generale, la riflessione da un mezzo assorbente implica la comparsa della polarizzazione ellittica. In questo caso, le espressioni esplicite per ampiezze e relazioni di fase tra le tre onde sono molto ingombranti. Queste formule si possono trovare nel libro *Stratton J. A.* Electromagnetic Theory, ch. IX. — N.Y. McGraw-Hill, 1941.

il piano d'incidenza, γ_1 e γ_2 due angoli analoghi per le onde riflessa e rifratta. Mediante le formule (86,5) e (86,7) è facile ottenere le seguenti relazioni:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\operatorname{tg}\gamma_0, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \cos(\theta_0-\theta_2)\operatorname{tg}\gamma_0. \quad (86,12)$$

Gli angoli γ_0, γ_1, γ_2 coincidono per tutti gli angoli di incidenza soltanto nei casi evidenti $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_0 = \pi/2$; essi coincidono anche per incidenze normale ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) e radente ($\theta_0 = \pi/2$) (nell'ultimo caso l'onda rifratta in generale non esiste). In tutti gli altri casi dalle relazioni (86,12) derivano (tenendo conto che $0 < \theta_0$, $\theta_2 < \pi/2$ e supponendo che $0 < \gamma_0 < \pi/2$; $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$) le seguenti disuguaglianze

$$\gamma_1 > \gamma_0 > \gamma_2.$$

In tal modo, la direzione **E** per riflessione ruota verso l'esterno del piano di incidenza e per rifrazione verso questo piano.

Dal confronto delle due formule (86,10) risulta che per tutti gli angoli di incidenza (tranne soltanto $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi/2$) si ha

$$R_{\parallel} < R_{\perp}.$$

Perciò, ad esempio, per incidenza della luce naturale la luce riflessa è in parte polarizzata con la direzione prevalente del campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza. Quanto alla luce rifratta, essa sarà polarizzata in parte con la direzione prevalente **E** nel piano di incidenza.

Il carattere di dipendenza di $R_{\parallel}$ e $R_{\perp}$ dall'angolo di incidenza è sostanzialmente distinto. Il coefficiente $R_{\perp}$ cresce monotonamente all'aumentare di θ_0 a partire dal valore (86,8) per $\theta_0 = 0$. Il coefficiente $R_{\parallel}$, invece, uguale allo stesso valore (86,8) per $\theta_0 = 0$, all'aumentare di θ_0 dapprima decresce e si annulla per $\theta_0 = \theta_p$ e in seguito comincia a crescere monotonamente.

In questa situazione si devono distinguere due casi. Se la riflessione si produce, come si suole dire, da un mezzo *otticamente più denso*, cioè se $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, l'aumento di $R_{\parallel}$ e $R_{\perp}$ continua fino a $\theta_0 = \pi/2$ (*incidenza radente*) quando tutti e due raggiungono il valore 1. Se il mezzo riflettente *otticamente è meno denso*, cioè se $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, entrambi i coefficienti si riducono a 1 già per l'angolo di incidenza $\theta_0 = \theta_r$, ove θ_r è dato dall'uguaglianza

$$\operatorname{sen}\theta_r = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = n_2/n_1 \quad (86,13)$$

e si chiama *angolo limite di riflessione totale*. Per $\theta_0 = \theta_r$ l'angolo di rifrazione $\theta_2 = \pi/2$, cioè l'onda rifratta si propaga parallelamente alla superficie di separazione.

La riflessione sotto angoli $\theta_0 > \theta_r$ su mezzo otticamente meno denso richiede uno studio particolare. In questo caso k_{2z} (cfr. l'(86,2)) è

meramente immaginaria, vale a dire che il campo indebolisce nel mezzo rifrangente. Lo smorzamento dell'onda in profondità del mezzo se in esso non esiste assorbimento vero e proprio (dissipazione dell'energia) significa che il flusso dell'energia dal primo al secondo mezzo in media non si verifica (tramite un semplice calcolo è facile provare direttamente che il vettore $\bar{\mathbf{S}}$ del flusso medio di energia ha nel secondo mezzo la sola componente x). In altre parole, tutta l'energia che incide sulla frontiera di separazione si riflette di nuovo nel primo mezzo, vale a dire che i coefficienti di riflessione

$$R_\perp = R_\parallel = 1.$$

Questo fenomeno porta il nome di *riflessione totale* [1]. L'ultima uguaglianza per $R_\perp$ e $R_\parallel$ si può provare direttamente mediante le formule di Fresnel (86,4) e (86,6).

Per $\theta_0 > \theta_r$ i coefficienti di proporzionalità fra $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_0$ si trasformano in grandezze complesse della forma $(a - ib)/(a + ib)$. Quanto alle grandezze $R_\perp$ e $R_\parallel$, essi sono dati dai quadrati dei moduli di questi coefficienti uguali a 1. Tuttavia queste formule consentono di determinare non il solo rapporto tra valori assoluti del campo nelle onde riflessa e incidente, ma anche la differenza fra le loro fasi. A tale scopo bisogna rappresentare queste grandezze nella forma

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_\perp} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_\parallel} E_{0\parallel}.$$

Abbiamo [2]

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0 - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0}. \tag{86,14}$$

In tal modo, la riflessione totale è accompagnata dal cambiamento della fase dell'onda che, in generale, è diverso per le componenti del campo parallela o perpendicolare al piano d'incidenza. Perciò per riflessione di un'onda polarizzata nel piano obliquo rispetto al piano d'incidenza l'onda riflessa sarà polarizzata ellitticamente. Per la differenza di fasi $\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$ si ottiene facilmente l'espressione

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\varepsilon_1 \operatorname{sen}^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\operatorname{sen}^2\theta_0}. \tag{86,15}$$

Questa differenza si annulla esclusivamente per $\theta_0 = \theta_r$ e $\theta_0 = \pi/2$.

---

[1]) Il coefficiente di riflessione è sempre uguale a uno per riflessione da un mezzo con ε reale ma negativo. In questo mezzo non esiste anche assorbimento vero e proprio, ma l'onda può penetrare nella sua profondità.

[2]) Se $\dfrac{a-ib}{a+ib} = e^{-i\delta}$, allora $\operatorname{tg}\dfrac{\delta}{2} = \dfrac{b}{a}$.

Problemi

1. Trovare la legge di riduzione a 1 del coefficiente di riflessione in prossimità dell'angolo di riflessione totale.

Soluzione. Poniamo $\theta_0 = \theta_r - \delta$, ove δ è una piccola grandezza, e nelle formule (86,10) sviluppiamo sen θ_0 e cos θ_0 in potenze di δ. Come risultato otteniamo

$$R_\perp = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,(n^2-1)^{-1/4}, \qquad R_{||} = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,n^2\,(n^2-1)^{-1/4},$$

dove $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. Le derivate $dR/d\delta$ per $\delta \to 0$ diventano infinite come $\delta^{-1/2}$.

2. Trovare il coefficiente di riflessione per incidenza quasi radente della luce dal vuoto sulla superficie di un corpo con il valore ε vicino a 1.

Soluzione. Le formule (86,10) forniscono il coefficiente di riflessione identico

$$R_\perp \approx R_{||} \approx \frac{(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon - 1})^4}{(\varepsilon - 1)^2},$$

ove $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0$.

3. Determinare il coefficiente di riflessione per incidenza di un'onda dal vuoto sulla frontiera di un mezzo con ε e μ diversi da 1.

Soluzione. I calcoli assolutamente analoghi a quelli fatti nel testo conducono al seguente risultato:

$$R_\perp = \left| \frac{\mu\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \operatorname{sen}^2\theta_0}}{\mu\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \operatorname{sen}^2\theta_0}} \right|^2,$$

$$R_{||} = \left| \frac{\varepsilon\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \operatorname{sen}^2\theta_0}}{\varepsilon\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \operatorname{sen}^2\theta_0}} \right|^2.$$

4. Lo strato pianoparallelo della sostanza *2* si trova tra il vuoto (mezzo *1*) e un mezzo qualsiasi *3*. Lo strato è inciso da una luce proveniente dal vuoto, polarizzata nel piano di incidenza (o perpendicolarmente a quest'ultimo). Esprimere il coefficiente di riflessione R dallo strato in funzione dei coefficienti di riflessione quando la luce incide sul mezzo semiinfinito *2* o *3*.

Soluzione. Indichiamo con A_0 e A_1 le ampiezze del campo (E o H a seconda del fatto quale di questi vettori sia parallelo al piano dello strato) nelle onde incidente e riflessa. Il campo nello strato è composto dell'onda rifratta (ampiezza A_2) e di quella riflessa dalla frontiera *2-3* (ampiezza A_2'). La condizion di frontiera sulla superficie *1-2* dà un'uguaglianza della forma

$$A_2' = a\,(A_1 - r_{12}A_0), \tag{1}$$

dove a e r_{12} sono costanti. P r riflessione dal mezzo semiinfinito *2* l'onda A_2' non esiste in modo che la formula (1) dà $r_{12} = A_1/A_0$, vale a dire che r_{12} è l'ampiezza della riflessione per questo caso. Dall'(1) si ottiene un'altra equazione permutando A_1 con A_0 e sostituendo A_2' con A_2, ciò che corrisponde semplicemente al cambiamento di segno della componene z del vettore d'onda:

$$A_2 = a\,(A_0 - r_{12}A_1). \tag{2}$$

Nel mezzo *3* esiste una sola onda (quella che è passata). Per la sua ampiezza A_3 abbiamo le seguenti condizioni:

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \qquad A_2' e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \tag{3}$$

(simili alle condizioni (1), (2) con $A_1 = 0$); i fattori esponenziali tengono conto del cambiamento di fase dell'onda nello spessore h dello strato e, in questo caso,

$$\psi = \frac{\omega}{c} h \sqrt{\varepsilon_2 - \operatorname{sen}^2 \theta_0}. \tag{4}$$

Eliminando A_3 dalle equazioni (3) abbiamo

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23} A_2 e^{i\psi} \tag{5}$$

($r_{23} = -r_{32}$).

Dalle equazioni (1), (2), (5) ricaviamo l'ampiezza di riflessione dallo strato:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12} e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12} r_{23}} \tag{6}$$

(il coefficiente di riflessione è $R = |r|^2$). Il significato della costante r_{23} è dato dal fatto che per $h = 0$ la grandezza r deve coincidere con l'ampiezza della riflessione r_{13} dal mezzo semiinfinito *3*; di qui troviamo

$$r_{23} = \frac{r_{12} - r_{13}}{r_{12} r_{13} - 1}. \tag{7}$$

Sono le formule (6) e (7) a risolvere il problema posto. Sottolineiamo che la loro deduzione non è legata a nessuna ipotesi circa le proprietà dei mezzi *2* e *3* che possono essere sia trasparenti che assorbenti.

Se i mezzi *2* e *3* sono trasparenti, le grandezze ψ, r_{12}, r_{13} sono reali, mentre r_{23} rappresenta l'ampiezza della riflessione sulla frontiera di separazione tra due mezzi semiinfiniti *2* e *3*. Dalla formula (6) in questo caso abbiamo

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4 r_{12} r_{23} \operatorname{sen}^2 \psi}{(r_{12} r_{23} + 1)^2 - 4 r_{12} r_{23} \operatorname{sen}^2 \psi}. \tag{8}$$

Per cambiamento di ψ questa grandezza varia nei limiti fra

$$\left(\frac{r_{12} + r_{23}}{r_{12} r_{23} + 1} \right)^2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{r_{12} - r_{23}}{r_{12} r_{23} - 1} \right)^2.$$

Per incidenza normale della luce $r_{12} = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, e relazioni analoghe sono vere per r_{13} e r_{23}. Se $n_2^2 = n_1 n_3$, allora $r_{12} = r_{23}$ e per spessore appropriato dello strato R può annullarsi.

Se il mezzo *3* è vuoto, allora $r_3 = 0$, $r_{23} = -r_{12}$ e dalla (6) abbiamo

$$r = \frac{r_{12}(e^{-2i\psi} - 1)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = -\frac{\operatorname{sh} i\psi}{\operatorname{sh}[i\psi + \ln(-r_{12})]}. \tag{9}$$

Se in questo caso il mezzo *2* è trasparente, allora

$$R = \frac{4 R_{12} \operatorname{sen}^2 \psi}{(1 - R_{12})^2 + 4 R_{12} \operatorname{sen}^2 \psi}.$$

Il coefficiente di attraversamento D per lo strato (dal vuoto al vuoto) coincide con $1 - R$ a sola condizione che il mezzo *2* sia trasparente. In caso contrario, per il calcolo di D si deve partire dalle equazioni (1)-(3) ponendovi $r_{32} = r_{12}$. L'« ampiezza di attraversamento » d vale

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-i\psi} - r_{12}^2 e^{i\psi}}, \tag{10}$$

e il coefficiente di attraversamento $D = |d|^2$.

5. Determinare i coefficienti di riflessione e di attraversamento per incidenza normale della luce su una lamina con permettività dielettrica complessa ε molto grande.

Soluzione. In questo caso abbiamo

$$r_{12}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\approx-\left(1-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

e, secondo la formula (9) del problema 4,

$$r=-\frac{1}{1-(2/\sqrt{\varepsilon})\operatorname{cth} i\psi}, \qquad \psi=\frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon}.$$

Se la lamina è così sottile che $h\omega/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}$, allora si può scrivere

$$r=-\frac{1}{1+(2ic/\varepsilon\omega h)}.$$

In questa situazione si possono distinguere due casi:

$$\text{per } \frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \; R=1-\frac{4c}{\omega h}\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2},$$

$$\text{per } \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|}: \; R=\frac{\omega^2h^2}{4c^2}|\varepsilon|^2.$$

Per il coefficiente di attraversamento secondo la formula (10) abbiamo

$$\text{per } \frac{\omega}{c}h\sim\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \; d=-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\operatorname{sh} i\psi},$$

$$\text{per } \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \; d=\frac{1}{1-i\varepsilon\omega h/2c}.$$

Nell'ultimo caso si può anche avere:

$$\text{per } \frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \; D=\frac{4c^2}{\omega^2h^2|\varepsilon|^2},$$

$$\text{per } \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|}: \; D=1-\frac{\varepsilon''\omega h}{c}.$$

§ 87. *Impedenza superficiale dei metalli*

La permettività dielettrica dei metalli in suo valore assoluto per frequenze non troppo elevate è grande rispetto a 1 (per $\omega\to 0$ essa tende all'infinito come $1/\omega$). In queste condizioni la lunghezza d'onda $\delta\sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|}$ nei metalli è piccola rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda\sim c/\omega$ nel vuoto [1]). In questo caso δ (ma non necessariamente λ) è

[1]) Grandi valori di $\sqrt{\varepsilon}(\omega)$ sono praticamente sempre complessi. In questo caso il campo elettromagnetico indebolisce nella profondità del corpo in modo che la lunghezza d'onda in esso è al tempo stesso la profondità di penetrazione del campo. Se $\varepsilon(\omega)$ è espressa in funzione della conduzione σ (in accordo con la formula (77,9)) questa grandezza coincide con la profondità di penetrazione introdotta nel § 59.

piccola anch'essa rispetto al raggio di curvatura della superficie metallica, questa circostanza può servire per rendere molto più semplice il problema della riflessione di onde elettromagnetiche qualsiasi dal metallo.

La piccolezza di δ significa che le derivate delle componenti del campo all'interno del metallo nella direzione della normale alla sua superficie sono grandi rispetto alle derivate nelle direzioni tangenziali. Perciò il campo all'interno del metallo in prossimità della superficie si può considerare come campo dell'onda piana e, rispettivamente, i campi $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{H}_t$ risultano essere legati reciprocamente dalla relazione

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \tag{87,1}$$

ove $\mathbf{n}$ è la normale alla superficie diretta verso l'interno del metallo. Poiché, d'altra parte, $\mathbf{E}_t$ e $\mathbf{H}_t$ sono continui, la stessa relazione esprime il legame tra loro valori per un campo esterno in prossimità della superficie del metallo. L'uguaglianza (87,1) può servire (come è stato indicato da *M.A. Leontovič*, 1948) come condizione di frontiera per trovare il campo all'esterno del conduttore. In tal modo, si può risolvere il problema elettromagnetico esterno senza studiare il campo all'interno del metallo.

La grandezza $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ si chiama *impedenza superficiale* dei metalli. Indichiamola con $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ [1])

$$\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}. \tag{87,2}$$

Nel dominio delle frequenze per le quali ε va espressa in funzione della conduzione ordinaria dei metalli abbiamo

$$\zeta = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}} \tag{87,3}$$

(questa formula con $\mu = 1$ è stata già data nel § 59).

La media (rispetto al tempo) del flusso di energia attraverso la superficie metallica è

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}_t\mathbf{H}_t^*] = \frac{c\zeta'}{8\pi}\,|\,\mathbf{H}_t\,|^2\,\mathbf{n}. \tag{87,4}$$

Questo flusso rappresenta l'energia che affluisce dall'esterno nel metallo e va dissipata nel suo interno. Si vede di qui che deve essere

$$\zeta' > 0. \tag{87,5}$$

Questa disuguaglianza determina il segno della radice (87,2).

[1]) Nella letteratura si usa anche una definizione che differisce da quella (87,2) per il fattore $4\pi/c$.

All'aumentare della frequenza la profondità di penetrazione δ va paragonata per ordine di grandezza con la lunghezza del cammino libero l degli elettroni di conduzione [1]). In questo caso la non uniformità spaziale del campo rende impossibile la sua descrizione macroscopica mediante la permettività dielettrica ε. Ma la condizione di frontiera della forma

$$\mathbf{E}_t = \zeta\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}] \tag{87,6}$$

è valida per queste frequenze. In questo caso il campo all'interno del metallo vicino alla sua superficie può essere, come prima, considerato come onda piana anche se non descritta dalle equazioni di Maxwell ordinarie macroscopiche. In quest'onda i campi **E** ed **H** devono essere legati dalla relazione lineare e la (87,6) è l'unica forma possibile della relazione lineare tra il vettore assiale **H** ed il vettore polare **E**. Il coefficiente ζ in questa relazione è l'unica grandezza che caratterizza le proprietà del metallo e la si deve conoscere per poter risolvere il problema elettromagnetico esterno. I calcoli tuttavia richiedono che sia applicata la teoria cinetica (ciò che è stato esposto in un altro volume del presente Corso; cfr. X § 86).

All'ulteriore aumento della frequenza (di solito nel dominio infrarosso) è possibile di nuovo la descrizione macroscopica del campo e la nozione ε riacquista il significato. La causa di questo fenomeno è che assorbendo un grande quanto $\hbar\omega$ l'elettrone di conduzione acquisisce grande energia per cui la distanza del suo cammino diminuisce da soddisfare di nuovo la disuguaglianza $l \ll \delta$. L'impedenza diviene nuovamente grandezza inversamente proporzionale a $\sqrt{\varepsilon}$ [2]). In questo dominio di frequenze la funzione $\varepsilon(\omega)$ ha grande parte reale negativa e quella piccola immaginaria. La disuguaglianza $l \ll \delta$ è la condizione di quello che ambedue le grandezze ε' e ε'' abbiano significato macroscopico. Affinché abbia significato macroscopico la sola ε' più grande è sufficiente tuttavia che sia soddisfatta la condizione più debole $v/\omega \ll \delta$, ove v è la velocità degli elettroni di conduzione nel metallo (essendo soddisfatta questa condizione, è possibile considerare il moto degli elettroni a prescindere dalla non uniformità spaziale del campo) [3]).

---

[1]) La lunghezza del cammino libero dipende essenzialmente dalla temperatura del metallo. Di fatto, si tratta, come di solito, delle temperature molto basse nella regione di elio ed i fenomeni considerati appaiono nella banda di radiofrequenze ultracorte.

[2]) Tuttavia si deve ricordare che l'uso dell'uguaglianza (87,6) quale condizione di frontiera è possibile finché $|\varepsilon|$ è grande (cioè ζ piccola); comunque questa condizione non si verifica più per frequenze ottiche. Supponiamo che $\mu \sim 1$; allora a $|\varepsilon|$ grandi corrispondono ζ piccole. Sottolineiamo che se $\mu \gg 1$, la disuguaglianza $\delta \ll \lambda$ indispensabile per l'applicabilità della condizione di frontiera (87,6) significa che deve essere $\sqrt{\mu\varepsilon} \gg 1$; in questo caso $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ può essere anche non piccola.

[3]) Per dettagli si veda X § 87.

La disuguaglianza $\zeta' > 0$ si verifica in ogni caso per la parte reale dell'impedenza. Se invece si verifica la formula (87,2), si può avere un'idea anche del segno che precede la parte immaginaria di ζ. Così, se la dispersione di ε è più notevole della dispersione di μ (cioè se μ si può supporre grandezza reale), allora da $\varepsilon'' > 0$ segue $\zeta'\zeta'' < 0$; poiché si ha sempre $\zeta' > 0$, allora

$$\zeta'' < 0.$$

Questo è il caso più ordinario. Se la dispersione di ζ è determinata dalla dispersione di μ, allora si trova analogamente che $\zeta'' > 0$.

La nozione di impedenza può essere applicata ugualmente ai superconduttori. Quest'ultimi sono caratterizzati in modo particolare dall'esistenza in essi di piccola profondità di penetrazione δ anche nel caso statico ($\omega = 0$). Per frequenze troppo grandi si può supporre che la distribuzione del campo magnetico coincida con quella statica. Per determinare il campo elettrico scriviamo

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}.$$

Facciamo coincidere con l'asse z la normale esterna diretta alla superficie del superconduttore. Trascurando le derivate nelle direzioni tangenziali rispetto alle grandi derivate rispetto a z, abbiamo

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} H_y$$

(e analogamente per E_y). Integriamo questa uguaglianza rispetto alla profondità z nell'interno del corpo:

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} \int_{-\infty}^{0} H_y \, dz;$$

$E_x(0)$ è il valore di E_x per $z = 0$, cioè sulla superficie del corpo. Determiniamo quantitativamente la profondità di penetrazione nel seguente modo:

$$\int_{-\infty}^{0} H_y \, dz = H_y(0)\, \delta. \tag{87,7}$$

Allora

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c} H_y(0)\, \delta.$$

Confrontando con una condizione di frontiera della forma (87,6) troviamo che l'impedenza del superconduttore (nel dominio considerato di frequenze non troppo grandi) [1]) è data dalla formula

$$\zeta = -i\,\frac{\omega}{c}\,\delta. \tag{87,8}$$

Questa espressione rappresenta il primo termine dello sviluppo di $\zeta(\omega)$ in potenze della frequenza, il quale quindi comincia nei superconduttori da un termine proporzionale a ω. Il termine dello sviluppo successivo è proporzionale a ω^2 e reale; questo è il primo termine dello sviluppo di ζ' [2]).

L'impedenza $\zeta(\omega)$ considerata quale funzione della variabile complessa ω gode di proprietà sotto molti aspetti analoghe alle proprietà della funzione $\varepsilon(\omega)$ (*V.L. Ginsburg*, 1954). La condizione di frontiera avente per l'onda monocromatica la forma (87,6) si deve intendere nel caso generale come relazione operatoriale

$$\mathbf{E}_t = \hat{\zeta}\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \tag{87,9}$$

esprimente $\mathbf{E}_t$ in un dato istante in funzione di $\mathbf{H}_t$ in tutti gli istanti precedenti (cfr. § 77). Così come nel § 82, di qui risulta che la funzione $\zeta(\omega)$ non ha punti singolari nel semipiano superiore ω compreso l'asse reale (ad eccezione del punto $\omega = 0$). In seguito, in accordo con la condizione secondo la quale $\mathbf{E}_t$ è reale per $\mathbf{H}_t$ reale otteniamo la relazione

$$\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega).$$

Infine, poiché la dissipazione dell'energia è determinata dalla parte reale (e non immaginaria come nel caso della funzione $\varepsilon(\omega)$) della funzione $\zeta(\omega)$, quindi $\zeta'(\omega)$ è positiva e non si annulla qualunque sia il valore ω reale, tranne il solo valore $\omega = 0$. In seguito le considerazioni analoghe a quelle citate nel § 82 consentono di concludere che

$$\operatorname{Re}\zeta(\omega) > 0$$

ugualmente in tutto il semipiano superiore. Ne segue in particolare che la funzione $\zeta(\omega)$ non ha zeri nel semipiano superiore.

Il fatto che la funzione $\zeta(\omega)$ è priva di punti singolari nel semipiano superiore ci riconduce alle formule di Kramers-Kronig. In questo caso è di importanza notevole la formula

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}\,dx.$$

[1]) Si tratta infatti di frequenze pressappoco fino al dominio centimetrico delle onde radio.

[2]) La teoria microscopica mostra che un termine dell'impedenza proporzionale a ω^2 contiene inoltre un fattore logaritmico rispetto a ω; cfr. X §§ 96, 97.

La si può riscrivere, tenendo conto che la funzione $\zeta'(x)$ è pari, nel seguente modo:

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta'(x)-1}{x+\omega}\,dx$$

ossia

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta'(x)}{x^2-\omega^2}\,dx \tag{87,10}$$

(si può omettere 1 a numeratore dell'espressione integranda in quanto il valore principale dell'integrale di $1/(x^2-\omega^2)$ è sempre zero).

Tutto quanto detto della funzione $\zeta(\omega)$ si riferisce in misura uguale alla funzione inversa $1/\zeta(\omega)$; l'operatore $\hat{\zeta}^{-1}$ esprime $[\mathbf{H}_t\mathbf{n}]$ in funzione di $\mathbf{E}_t$. In particolare, al posto dell'(87,10) avremo

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2}\,dx. \tag{87,11}$$

Per ζ piccoli questa formula può essere più comoda nell'uso anziché la formula (87,10). Nella forma scritta, tuttavia, essa è inapplicabile ai superconduttori in cui $\hat{\zeta}^{-1}$ ha polo secondo l'(87,8) per $\omega = 0$. Una semplice modifica della deduzione (si veda il passaggio dall'(82,7) all'(82,9)) conduce quindi alla formula

$$[\zeta^{-1}(\omega)]'' = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{[\zeta^{-1}(x)]'}{x^2-\omega^2}\,dx + \frac{c}{\omega\delta}. \tag{87,12}$$

Per concludere il presente paragrafo usiamo a titolo di esempio la nozione di impedenza e consideriamo a tale scopo la riflessione dell'onda elettromagnetica piana che incide dal vuoto su una superficie metallica piana con impedenza superficiale ζ. Se il vettore $\mathbf{E}$ è polarizzato perpendicolarmente al piano d'incidenza allora la condizione di frontiera (87,6) dà

$$E_0 + E_1 = \zeta(H_0 - H_1)\cos\theta_0 = \zeta(E_0 - E_1)\cos\theta_0$$

(le notazioni sono le stesse del § 86). Di qui ricaviamo tenendo conto della piccolezza di ζ

$$E_1/E_0 = -(1 - 2\zeta\cos\theta_0)$$

e il coefficiente di riflessione

$$R_\perp = 1 - 4\zeta'\cos\theta_0. \tag{87,13}$$

Se, invece, $\mathbf{E}_0$ giace nel piano d'incidenza allora la condizione di frontiera si scrive nella forma $\zeta \mathbf{H}_t = [\mathbf{n}\mathbf{E}_t]$, cioè

$$\zeta (H_0 + H_1) = (E_0 - E_1) \cos \theta_0 = (H_0 - H_1) \cos \theta_0,$$

di qui il coefficiente di riflessione

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\cos \theta_0 - \zeta}{\cos \theta_0 + \zeta} \right|^2. \tag{87,14}$$

Per angoli di incidenza non troppo vicini a $\pi/2$ abbiamo

$$R_{\parallel} = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos \theta_0}. \tag{87,15}$$

Se l'angolo $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0 \ll 1$, allora

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta} \right|^2. \tag{87,16}$$

Per $\varphi_0 = |\zeta|$ questa espressione ha un minimo uguale a

$$R_{\parallel} = (|\zeta| - \zeta')/(|\zeta| + \zeta').$$

Tranne il caso singolare (87,16), il coefficiente di riflessione da una superficie con ζ piccola è vicino a 1. Una superficie con $\zeta \to 0$ (o, come si suole dire, la superficie conduttrice perfetta) è al tempo stesso perfettamente riflettente. La condizione di frontiera per questa superficie si scrive semplicemente $\mathbf{E}_t = 0$ analogamente alla condizione per un campo elettrostatico sulla superficie conduttrice. Ma a differenza del caso di un campo costante, in un campo variabile questa condizione implica automaticamente la verifica di una determinata condizione per il campo magnetico. E precisamente, in virtù dell'equazione $(i\omega/c)\,\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{E}$ dall'uguaglianza $\mathbf{E}_t = 0$ sulla superficie deriva l'uguaglianza $H_n = 0$. In tal modo, su una superficie conduttrice perfetta nel campo elettromagnetico variabile si annulla la componente normale del campo magnetico. In questo senso la superficie in questione è analoga alla superficie superconduttrice nel campo magnetico costante.

Problema

Determinare l'intensità dell'irraggiamento (di frequenza data) da una superficie piana con piccola impedenza.

Soluzione. Secondo la legge di Kirchhoff, l'intensità dI dell'irraggiamento (nell'elemento di angolo solido do) da una superficie qualsiasi è legata all'intensità dell'irraggiamento dalla superficie del corpo nero assoluto dI_0 mediante la relazione $dI = (1 - R)\, dI_0$, ove R è il coefficiente di riflessione dalla superficie in esame per la luce naturale. Calcolando $R = 1/2\,(R_{\perp} + R_{\parallel})$ mediante le

formule (87,13) e (87,14) e tenendo conto dell'isotropia dell'irraggiamento dalla superficie del corpo nero assoluto ($dI_0 = I_0 do/2\pi$), otteniamo

$$I = 2I_0\zeta' \int_0^{\pi/2} \left\{1 + \frac{1}{\cos^2\theta + 2\zeta'\cos\theta + \zeta'^2 + \zeta''^2}\right\} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta.$$

Integrando per parti e omettendo i termini d'ordine superiore rispetto a ζ, troviamo

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left(\ln \frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \operatorname{arctg} \frac{\zeta''}{\zeta'}\right).$$

In particolare, per il metallo con impedenza definita dalla formula (87,3) abbiamo ($\mu = 1$)

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left(\ln \frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 88. *Propagazione di onde in un mezzo non omogeneo*

Consideriamo la propagazione delle onde elettromagnetiche in un mezzo elettricamente non omogeneo (ma isotropo). Nelle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\varepsilon \frac{\omega}{c} \mathbf{E}$$

(poniamo ovunque $\mu = 1$) ε è la funzione delle coordinate di un punto. Portando $\mathbf{H}$ dalla prima equazione nella seconda, otteniamo per $\mathbf{E}$ l'equazione

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \tag{88,1}$$

Se eliminiamo $\mathbf{E}$ otteniamo l'equazione seguente per $\mathbf{H}$:

$$\Delta \mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon} [\nabla\varepsilon \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}] = 0. \tag{8,28}$$

Queste equazioni si rendono molto più semplici nel caso unidimensionale quando ε varia in una sola direzione nello spazio. Consideriamo questa direzione come asse z e studiamo un'onda che si propaga nella direzione giacente nel piano xz. In questa onda tutte le grandezze non dipendono affatto dalla coordinata y e in virtù dell'uniformità dello spazio lungo l'asse x si può considerare la dipendenza da x data dal fattore $e^{i\varkappa x}$ con $\varkappa$ costante. Per $\varkappa = 0$ il campo dipende unicamente da z, vale a dire che l'onda passa *normalmente* attraverso lo strato della sostanza con $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Se invece $\varkappa \neq 0$ si dice che l'onda passa *obliquamente*.

In questa situazione si devono distinguere (per $\varkappa \neq 0$) due casi di polarizzazione indipendenti. In uno di essi il vettore $\mathbf{E}$ è perpendicolare al piano di propagazione dell'onda (cioè diretto lungo l'asse y)

e il campo magnetico **H** giace rispettivamente in questo piano. L'equazione (88,1) assume la forma

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2\right) E = 0. \tag{88,3}$$

Nell'altro caso lungo l'asse y è diretto il campo **H** mentre **E** giace nel piano di propagazione. In questo caso è più comodo partire dall'equazione (88,2) che dà

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\right) H = 0. \tag{88,4}$$

Chiameremo convenzionalmente questi due tipi di onde *onde E* ed *H*, rispettivamente.

Le equazioni si possono risolvere nella forma generale in un caso importante in cui le condizioni di propagazione siano vicine a quelle dell'ottica geometrica; supponiamo più avanti reale la funzione $\varepsilon(z)$ [1]. Nell'equazione (88,3) la grandezza $2\pi/\sqrt{f}$, ove

$$f(z) = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2,$$

funge da lunghezza d'onda nella direzione dell'asse z. All'approssimazione dell'ottica geometrica corrisponde la disuguaglianza

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1, \tag{88,5}$$

e le due equazioni indipendenti (88,3) assumono la forma

$$\frac{\text{cost}}{f^{1/4}} \exp\left(\pm i \int \sqrt{f}\, dz\right). \tag{88,6}$$

La condizione (88,5) è violata a priori in prossimità del *punto di riflessione* (qualora tale esista) in cui $f = 0$. Sia questo il punto $z = 0$ e siano $f > 0$ per $z < 0$ e $f < 0$ per $z > 0$. A distanze sufficientemente grandi da ambo i lati del punto $z = 0$ la soluzione dell'equazione (88,3) ha la forma (88,6), ma per stabilire una relazione tra coefficienti in questa soluzione nei domini $z > 0$ e $z < 0$ è necessario trovare una soluzione esatta dell'equazione (88,3) nell'intorno di $z = 0$. Nell'intorno di questo punto la funzione $f(z)$ si

[1]) L'equazione (88,3) ha una somiglianza formale con l'equazione di Schrödinger descrivente il moto unidimensionale della particella nella meccanica quantistica, mentre all'approssimazione dell'ottica geometrica corrisponde il caso quasi-classico. Diamo più avanti i risultati definitivi, ma per loro deduzione rimandiamo il lettore all'altro volume del presente Corso: si veda III, cap. VII.

può sviluppare in potenze di z e rappresentare nella forma $f = -\alpha z$. La soluzione dell'equazione

$$\frac{d^2E}{dz^2} - \alpha z E = 0,$$

finita per tutti gli z è

$$E = \frac{A}{\alpha^{1/6}} \Phi(\alpha^{1/3} z), \tag{88,7}$$

ove

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{u^3}{3} + u\xi\right) du$$

è una funzione di Airy (il fattore $\exp(-i\omega t + i\varkappa x)$ in E omettiamo ovunque) [1]). La forma asintotica della soluzione dell'equazione (88,3) per grandi $|z|$ è

$$\begin{aligned} E &= \frac{A}{f^{1/4}} \cos\left(\int_0^z \sqrt{f}\, dz + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{per } z < 0, \\ E &= \frac{A}{2|f|^{1/4}} \exp\left(-\int_0^z \sqrt{|f|}\, dz\right) \quad \text{per } z > 0, \end{aligned} \tag{88,8}$$

con lo stesso coefficiente A che figura nella formula (88,7). La prima di queste espressioni rappresenta un'onda stazionaria che si ottiene per sovrapposizione dell'onda incidente (nella direzione positiva dell'asse z) e dell'onda riflessa dal piano $z = 0$. Le ampiezze di queste onde sono uguali (e valgono $A/2f^{1/4}$), vale a dire che il coefficiente di riflessione è uguale a 1. Nel dominio $z > 0$ penetra il solo campo che indebolisce esponenzialmente.

All'avvicinarsi al punto di riflessione l'ampiezza dell'onda aumenta, come ciò si vede già dall'esistenza di $f^{1/4}$ a denominatore dell'espressione (88,8). Per determinare la grandezza del campo in prossimità immediata di questo punto bisogna, tuttavia, ricorrere all'espressione (88,7). Questa funzione decresce monotonamente in profondità del dominio $z > 0$ e ha carattere oscillante nel dominio $z < 0$, inoltre, la grandezza dei massimi $|E|$ gradualmente decresce. Il primo e più grande massimo si ottiene per $\alpha^{1/3} z = -1{,}02$ e vale

$$E = 0{,}949 \cdot A\alpha^{-1/6}.$$

Finora abbiamo scritto soluzioni per le onde E. È facile vedere che nell'approssimazione dell'ottica geometrica formule analoghe si

[1]) Usiamo qui la stessa definizione della funzione di Airy come negli altri volumi del presente Corso. Tuttavia, oggi è più diffusa la definizione seguente:

$$\mathrm{Ai}\,\xi = \Phi(\xi)/\sqrt{\pi}.$$

possono scrivere anche per le onde H. Se nell'equazione (88,4) facciamo la sostituzione $H = u\sqrt{\varepsilon}$, le derivate di ε figureranno moltiplicate per solo u (e non per u'); trascurando in seguito i termini contenenti queste derivate (piccoli in virtù della condizione (88,5)), otteniamo per la funzione $u(z)$ l'equazione

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \varkappa^2\right) u = 0$$

coincidente con l'equazione (88,3). Perciò tutte le formule per H differiscono dalle formule (88,6-8) per il solo fattore $\sqrt{\varepsilon}$.

Nel comportamento di ambedue i tipi delle onde compare una differenza particolare per riflessione obliqua ($\varkappa \neq 0$) dell'onda incidente dallo strato della sostanza in cui la funzione $\varepsilon(z)$ passa per zero. In questo caso la riflessione si produce nel piano in cui $f(z) = \varepsilon\omega^2/c^2 - \varkappa^2 = 0$, cioè « non arrivando » al punto $\varepsilon = 0$. L'onda E penetra in questo piano soltanto sotto forma di un campo che indebolisce esponenzialmente. Per riflessione dell'onda H, invece, sullo sfondo generale di questo campo che indebolisce in prossimità del punto $\varepsilon = 0$ si produce un brusco rafforzamento del campo (*K. Försterling*, 1949) [1]. Studiamo questo fenomeno.

Supponiamo che nel punto $z = 0$ sia $\varepsilon = 0$. In prossimità di questo punto scriviamo

$$\varepsilon = -az, \quad a > 0, \tag{88,9}$$

e l'equazione (88,4) assume la forma

$$\frac{d^2H}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dH}{dz} - \left(\frac{a\omega^2}{c^2} z + \varkappa^2\right) H = 0. \tag{88,10}$$

Secondo la teoria generale delle equazioni differenziali, una delle soluzioni di questa equazione (chiamiamola H_1) non ha singolarità per $z = 0$ e il suo sviluppo per z piccoli comincia da z^2:

$$H_1(z) = z^2 + \ldots$$

La seconda soluzione indipendente gode della singolarità logaritmica e il suo sviluppo ha la forma

$$H_2(z) + H_1(z) \ln \varkappa z + \frac{2}{\varkappa^2} + \ldots$$

(il parametro a compare unicamente nei termini di ordine superiore). Per determinare il campo in prossimità del punto $z = 0$ non è necessario ipotizzare circa la combinazione lineare di H_1 e H_2 soddisfacente alle condizioni all'infinito. È sufficiente osservare che essa

[1] È da notare che questo punto è singolare per l'equazione (88,4) e perciò in sua prossimità l'approssimazione dell'ottica geometrica diviene inapplicabile, sebbene $f(z)$ non si annulli e la condizione (88,5) possa essere non violata.

per $z \to 0$ tende a una costante (indichiamola con H_0) e gode della singolarità logaritmica:

$$H \approx H_0 \left(1 + \frac{\varkappa^2}{2} z^2 \ln \varkappa z\right);$$

qui, oltre alla costante, è scritto anche il termine principale con la singolarità. Il campo elettrico va determinato secondo il campo $H_y = H$ mediante le equazioni di Maxwell

$$E_x = -\frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial z}, \quad E_z = \frac{ic}{\varepsilon\omega}\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Ricordando che la dipendenza di H da x è data dal fattore $e^{i\varkappa x}$, troviamo i termini principali in E_x e E_z:

$$E_x \approx H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega} \ln \varkappa z, \quad E_z \approx H_0 \frac{\varkappa c}{a\omega}\frac{1}{z} \tag{88,11}$$

Essi diventano infiniti per $z \to 0$.

In realtà, s'intende, grazie all'esistenza necessaria nel mezzo almeno di piccolo assorbimento, il campo raggiunge valori relativamente grandi (rispetto allo sfondo circostante debole) ma finiti. Tuttavia, è da notare che la parte immaginaria in ε, piccola a piacere, implica dissipazione finita dell'energia. Poniamo $\varepsilon = -az + i\delta$, $\delta \to +0$. Allora il prolungamento analitico del logaritmo nell'(88,11) dal semiasse z destro a quello sinistro deve essere realizzato da basso nel piano complesso z, e per $z < 0$ sarà

$$E_x = H_0 \frac{i\varkappa^2 c}{a\omega} (\ln |\varkappa z| - i\pi).$$

La media (rispetto al tempo) del flusso di energia lungo l'asse z, ossia

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_x H_y^*)$$

(cfr. (59,9a)), è nulla per $z > 0$, e per $z < 0$ la comparsa in E_x della parte reale conduce a un flusso non nullo di energia diretto verso il piano $z = 0$ ove questa energia va dissipata [1]):

$$\overline{S}_z = \frac{\varkappa^2 c^2}{8\omega a} H_0^2 \tag{88,12}$$

(*V.B. Gildenburg*, 1963).

[1]) Questo risultato si può ottenere partendo dall'espressione (80,4) per l'energia dissipata nell'unità di volume:

$$Q = \frac{\omega\varepsilon'' |\mathbf{E}|^2}{8\pi} \approx \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8\pi\omega} \lim_{\delta \to 0} \frac{\delta}{a^2 z^2 + \delta^2} = \frac{\varkappa^2 c^2 H_0^2}{8a\omega} \delta(z),$$

l'integrazione rispetto a z conduce alla formula (88,12).

Problema

Sulla frontiera di separazione tra due mezzi con permettività dielettriche positiva e negativa (ε_1 e $-|\varepsilon_2|$), rispettivamente, può propagarsi un'onda H che si smorza in profondità di ambedue i mezzi. Trovare il legame tra la sua frequenza e il vettore d'onda.

Soluzione. Consideriamo il piano xy come frontiera di separazione allorché l'onda si propaga lungo l'asse x e il campo $\mathbf{H}$ è parallelo all'asse y. Supponiamo che il semispazio $z > 0$ sia riempito da un mezzo con permettività (ε_1) positiva e il semispazio $z < 0$ da un mezzo con permettività (ε_2) negativa. Cerchiamo il campo nell'onda smorzantesi per $z \to \pm\infty$ nella forma

$$H_1 = H_0 e^{ikx - \varkappa_1 z}, \quad \varkappa_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1} \text{ per } z > 0,$$

$$H_2 = H_0 e^{ikx + \varkappa_2 z}, \quad \varkappa_2 = \sqrt{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}|\varepsilon_2|} \text{ per } z < 0,$$

ove k, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ sono reali. La condizione di continuità $H_y = H$ sulla frontiera è già soddisfatta e la condizione di continuità di E_x dà

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H_1}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial H_2}{\partial z} \text{ per } z = 0,$$

ossia $\varkappa_1/\varepsilon_1 = \varkappa_2/|\varepsilon_2|$. Questa uguaglianza si verifica alla sola condizione

$$\varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$$

(e alla condizione supposta $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$). In questo caso il legame tra k e ω è dato dall'equazione

$$k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon_1|\varepsilon_2|}{c^2(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)}.$$

La propagazione delle onde E superficiali, come è facile provare, in generale è impossibile.

§ 89. *Principio di reciprocità*

La radiazione delle onde elettromagnetiche monocromatiche da una sorgente che rappresenta un filo sottile collocato in un mezzo qualsiasi è descritta dalle equazioni

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{est}}, \tag{89,1}$$

ove $\mathbf{j}_{\text{est}}$ è la densità di correnti periodiche « estranee » (rispetto al mezzo) che passano per il conduttore.

Supponiamo che nel mezzo considerato siano collocate due sorgenti diverse (di frequenza uguale); denotiamo con gli indici 1 e 2 i campi creati separatamente da queste sorgenti. Quanto al mezzo, esso può essere arbitrariamente non omogeneo e anisotropo. L'unica ipotesi concernente le sue proprietà è la linearità delle relazioni $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, $B_i = \mu_{ik}H_k$ con i tensori simmetrici ε_{ik} e μ_{ik}. Sotto queste condizioni è possibile ottenere una relazione che sta-

bilisca legame reciproco tra i campi delle due sorgenti e tra le correnti estranee in essi.

Moltiplichiamo rispettivamente per $\mathbf{H}_2$ e $\mathbf{E}_2$ le equazioni

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = ik\mathbf{B}_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = -ik\mathbf{D}_1 + \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}$$

e le stesse equazioni esprimenti il campo $\mathbf{E}_2$ e $\mathbf{H}_2$ per $-\mathbf{H}_1$ e $-\mathbf{E}_1$. Sommando termine a termine tutte queste equazioni otteniamo

$$(\mathbf{H}_2 \operatorname{rot}\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \operatorname{rot}\mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2 \operatorname{rot}\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \operatorname{rot}\mathbf{E}_2) =$$
$$= i\frac{\omega}{c}(\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\mathbf{B}_2) + i\frac{\omega}{c}(\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\mathbf{E}_2) + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{est}}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

Ma $\mathbf{B}_1\mathbf{H}_2 = \mu_{ik}H_{1k}H_{2i} = \mathbf{H}_1\mathbf{B}_2$ e $\mathbf{E}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1\mathbf{E}_2$ in modo che i due primi termini a secondo membro dell'uguaglianza si annullano. Il primo membro, invece, si trasforma in base a una nota formula dell'analisi vettoriale e come risultato troviamo

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}_2] - [\mathbf{E}_2\mathbf{H}_1]\} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{est}}^{(2)}\mathbf{E}_1).$$

Integriamo questa uguaglianza rispetto a tutto lo spazio; l'integrale a primo membro dell'uguaglianza si trasforma in integrale di superficie infinitamente lontana e scompare. Perciò otteniamo

$$\int \mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}\mathbf{E}_2\, dV_1 = \int \mathbf{j}_{\text{est}}^{(2)}\mathbf{E}_1\, dV_2. \tag{89,2}$$

Gli integrali a primo e a secondo membro si calcolano rispetto ai volumi della prima e della seconda sorgente, rispettivamente, poiché soltanto in esse sono non nulle le correnti $\mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}$ e $\mathbf{j}_{\text{est}}^{(2)}$. Essendo sottili i fili, si può trascurare l'influenza di ciascuno di essi sul campo dell'altro filo e, quindi, $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ nella formula (89,2) rappresentano campi di radiazione della prima e della seconda sorgente, creati da ciascuna di esse nel punto in cui si trova l'altra sorgente come se quest'ultima non esistesse. La formula (89,2) è la relazione cercata nota sotto il nome di *teorema di reciprocità*.

Se le dimensioni delle sorgenti sono piccole rispetto alla lunghezza d'onda e rispetto alla loro distanza reciproca, si può semplificare l'espressione per il teorema di reciprocità. Il campo di ciascuna sorgente varia debolmente lungo le dimensioni dell'altra sorgente, e nella formula (89,2) si possono portare $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ fuori dal segno di integrale scrivendo semplicemente $\mathbf{E}_1(2)$ e $\mathbf{E}_2(1)$, ove 1 e 2 indicano i punti dove si trovano ambedue le sorgenti:

$$\mathbf{E}_2(1)\int \mathbf{j}_{\text{est}}^{(1)}\, dV_1 = \mathbf{E}_1(2)\int \mathbf{j}_{\text{est}}^{(2)}\, dV_2.$$

L'integrale $\int \mathbf{j}_{\text{est}}\, dV$ non rappresenta altro che la derivata rispetto al tempo del momento di dipolo totale $\mathcal{P}$ della sorgente. Poiché $\dot{\mathcal{P}} = -i\omega\mathcal{P}$, abbiamo infine

$$\mathbf{E}_2(1)\,\mathcal{P}_1 = \mathbf{E}_1(2)\,\mathcal{P}_2. \tag{89,3}$$

Questa forma del teorema di reciprocità è applicabile, ovviamente, soltanto alla radiazione di dipolo. Se il momento di dipolo della sorgente è nullo (o piccolo anomalmente), l'approssimazione fatta per il passaggio dalla formula generale (89,2) all'(89,3) sarà insufficiente (si veda il problema 1 di questo paragrafo).

Problemi

1. Dedurre il teorema della reciprocità per i radiatori di quadrupolo e magnetico di dipolo.

Soluzione. Se $\int \mathbf{j}_{\text{est}} dV = 0$, allora negli integrali (89,2) si devono considerare i seguenti termini dello sviluppo:

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}_2\, dV_1 \approx \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}\int x_k j_{1i}\, dV_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i}+x_i j_{1k})\, dV_1 +$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}-\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i}-x_i j_{1k})\, dV_1$$

(per brevità omettiamo l'indice « est » in $\mathbf{j}$). Introduciamo il tensore del momento di quadrupolo e il vettore del momento magnetico in base alle formule

$$\dot{D}_{ik} = -i\omega D_{ik} = \int \{3(x_i j_k + x_k j_i) - 2\delta_{ik}\mathbf{rj}\}\, dV,$$

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{rj}]\, dV.$$

Usando l'equazione rot $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$ e supponendo che in prossimità delle sorgenti sia ε = costante (per cui div $\mathbf{E} = 0$), otteniamo

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}_2\, dV = -\frac{i\omega}{12}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(1)} + i\omega\mathbf{B}_2(1)\,\mathcal{M}_1.$$

Di qui si vede che per i radiatori di quadrupolo il teorema della reciprocità enuncia

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(1)} = \left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_i}\right) D_{ik}^{(2)},$$

e per i radiatori magnetici di dipolo:

$$\mathbf{B}_2(1)\,\mathcal{M}_1 = \mathbf{B}_1(2)\,\mathcal{M}_2.$$

2. Determinare la dipendenza dell'intensità della radiazione di una sorgente di dipolo collocata in un mezzo omogeneo isotropo dalle permettività ε e μ del mezzo.

Soluzione. In seguito alle sostituzioni

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}', \quad \omega = \frac{\omega'}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

le equazioni (89,1) assumono la forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = \frac{i\omega'}{c} \mathbf{H}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = -\frac{i\omega'}{c} \mathbf{E}' + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{est}},$$

non contenente ε e μ. La soluzione di queste equazioni per la radiazione di dipolo conduce al potenziale vettoriale del campo nella zona ondosa (cfr. II § 67):

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{\text{est}}\, dV;$$

R_0 è la distanza dalla sorgente; qui e più avanti omettiamo i fattori di fase inessenziali per il calcolo dell'intensità. Di qui si vede che per $\mathbf{j}_{\text{est}}$ dato si può scrivere $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, ove l'indice 0 indica il campo della sorgente nel vuoto. Per le grandezze $\mathbf{H}'$ e $\mathbf{E}'$ abbiamo

$$\mathbf{H}' = i\,[\mathbf{k}'\mathbf{A}'] = i\sqrt{\varepsilon\mu}\,[\mathbf{k}\mathbf{A}_0] = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{H}'.$$

Di qui ricaviamo

$$\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E} = \mu\mathbf{E}_0$$

e l'intensità

$$I = I_0 \mu^{3/2} \varepsilon^{1/2},$$

ciò che risolve il problema posto.

§ 90. *Oscillazioni elettromagnetiche nelle cavità risonanti*

Consideriamo un campo elettrico nello spazio vuoto delimitato dalle pareti perfettamente conduttrici. Le equazioni descriventi il campo monocromatico nel vuoto sono

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}. \tag{90,1}$$

Le condizioni di frontiera sulla superficie di un corpo perfettamente conduttore (corpo con impedenza $\zeta = 0$) si scrivono

$$\mathbf{E}_t = 0, \; H_n = 0. \tag{90,2}$$

Per risolvere il problema in esame è sufficiente considerare una delle grandezze $\mathbf{E}$ o $\mathbf{H}$. Escludendo $\mathbf{H}$, per esempio, dalle equazioni (90,1) otteniamo per $\mathbf{E}$ l'equazione

$$\Delta\mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0, \tag{90,3}$$

alla quale si deve aggiungere anche l'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \tag{90,4}$$

che non deriva automaticamente dalla (90,1). Risolvendo queste equazioni con la condizione di frontiera $\mathbf{E}_t = 0$, determiniamo il campo $\mathbf{E}$ e in seguito calcoliamo $\mathbf{H}$ direttamente mediante la prima delle equazioni (90,1) quando la condizione di frontiera $H_n = 0$ si verifica automaticamente.

Per dimensioni e forma date della cavità le equazioni (90,3) e (90,4) hanno soluzioni soltanto per insieme determinato di valori ω. Questi valori si chiamano *autofrequenze* delle oscillazioni elettromagnetiche della cavità data. Per $\zeta = 0$ il campo elettromagnetico non penetra in profondità del metallo e in esso non esistono perdite. Perciò tutte le autooscillazioni non si smorzano, vale a dire che tutte le autofrequenze sono reali. Il numero di autofrequenze distinte della cavità è infinito. L'ordine di grandezza della più piccola di esse è $\omega_1 \sim c/l$, ove l sono le dimensioni lineari della cavità. Ciò è evidente già dalle considerazioni dimensionali poiché l è l'unico parametro dimensionale che caratterizza le condizioni del problema (per data forma della cavità). Quanto alle frequenze grandi ($\omega \gg c/l$), esse sono disposte vicine l'una all'altra e il loro numero per un intervallo unitario dei valori di ω è uguale a $V\omega^2/2\pi^2c^3$; esso dipende unicamente dal volume V della cavità e non dalla sua forma (cfr. II § 52).

Le energie elettrica e magnetica medie (rispetto al tempo) del campo nella cavità sono date, rispettivamente, dagli integrali

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{E}|^2}{8\pi}\,dV \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\int \frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi}\,dV.$$

Mostriamo che queste due grandezze sono uguali. Mediante la prima delle equazioni (90,1) scriviamo

$$\int \mathbf{H}\mathbf{H}^*\,dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \operatorname{rot}\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV.$$

Trasformiamo per parti il secondo integrale:

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV = \oint \operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,[d\mathbf{f}\,\mathbf{E}] + \int \mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV.$$

Poiché sulla frontiera del volume $\mathbf{E}_t = 0$, l'integrale di superficie si annulla e rimane

$$\int |\mathbf{H}|^2 dV = \frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}^*\,dV = -\frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\,\Delta\mathbf{E}^*\,dV,$$

ossia, in virtù della (90,3),

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV = \int |\mathbf{E}|^2\,dV, \tag{90,5}$$

come dovevasi dimostrare [1]).

[1]) Con $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ intendiamo ovunque le intensità del campo corrispondente a una autofrequenza determinata. È altrettanto facile mostrare che i campi corrispondenti a due autofrequenze distinte ω_a e ω_b verificano le relazioni di ortogonalità seguenti:

$$\int \mathbf{E}_a\mathbf{E}_b^*\,dV = \int \mathbf{H}_a\mathbf{H}_b^*\,dV = 0.$$

Le oscillazioni non smorzantisi nella cavità si ottengono sotto ipotesi che l'impedenza delle sue pareti sia nulla. Precisiamo ora come influisce piccola ma finita impedenza delle pareti sulle autofrequenze.

L'energia media (rispetto al tempo) dissipata in un secondo nelle pareti della cavità si può calcolare come flusso di energia che penetra nelle pareti dal campo elettromagnetico della cavità. Tenendo conto della condizione di frontiera (87,6) sulla superficie del corpo con impedenza ζ, scriviamo la componente normale della densità del flusso d'energia

$$\overline{S}_n = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \{[\mathbf{E}_t \mathbf{H}_t^*]\} = \frac{c\zeta'}{8\pi} \mid \mathbf{H}_t \mid^2$$

(ζ' è la parte reale dell'impedenza ζ). In questa espressione contenente già un piccolo fattore ζ' si può intendere con $\mathbf{H}$ nella prima approssimazione un campo che si ottiene risolvendo il problema con $\zeta = 0$. L'energia dissipata totale è data dall'integrale

$$\frac{c}{8\pi} \oint \zeta' \mid \mathbf{H} \mid^2 df, \tag{90,6}$$

esteso alla superficie interna della cavità. Il decremento di smorzamento dell'ampiezza del campo con il tempo si ottiene dividendo questa grandezza per energia totale raddoppiata del campo uguale a

$$\frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \int (\mid \mathbf{E} \mid^2 + \mid \mathbf{H} \mid^2) \, dV = \frac{1}{8\pi} \int \mid \mathbf{H} \mid^2 dV.$$

Il decremento di smorzamento coincide con la parte immaginaria $\mid \omega'' \mid$ della frequenza complessa $\omega = \omega' + i\omega''$ [1]). Scrivendo l'espressione nella forma complessa

$$\omega - \omega_0 = -\frac{ic}{2} \frac{\oint \zeta \mid \mathbf{H} \mid^2 df}{\int \mid \mathbf{H} \mid^2 dV} \tag{90,7}$$

(ω e ω_0 sono valori della frequenza tenendo conto o meno di ζ), possiamo mediante questa formula determinare non il solo decremento di smorzamento ma anche spostamento delle autofrequenze stesse. Quest'ultimo, come si vede, è determinato dalla parte immaginaria di ζ. Nel § 87 è stato indicato che di solito $\zeta'' < 0$; in questo caso lo spostamento delle autofrequenze si verifica verso la loro diminuzione.

---

[1]) In radiotecnica si suole introdurre al posto del decremento di smorzamento $\mid \omega'' \mid$ il cosiddetto *fattore di qualità* della cavità definito come relazione $\omega'/2 \mid \omega'' \mid$.

Per calcolo effettivo può risultare più comodo trasformare l'integrale di volume che figura a denominatore della (90,7) in quello di superficie.

Poiché il vettore **H** è tangenziale rispetto alla superficie, scriviamo identicamente

$$\oint (\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = \oint (\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{Hr})(\mathbf{H}^*\,d\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H}^*\mathbf{r})(\mathbf{H}\,d\mathbf{f}).$$

Gli integrali a secondo membro trasformiamo in integrale di volume mediante la sostituzione $d\mathbf{f} \to dV \cdot \nabla$ e usando inoltre le equazioni (90,1) otteniamo

$$\oint (\mathbf{HH}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = ik \int \mathbf{r}([\mathbf{HE}^*] - [\mathbf{H}^*\mathbf{E}])\,dV + \int \mathbf{HH}^*\,dV.$$

Analogamente, tenendo conto dell'identità $[\mathbf{r}\,[\mathbf{E}\,d\mathbf{f}]] = \mathbf{E}\,(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) - (\mathbf{rE})\,d\mathbf{f} = 0$ (che è conseguenza della condizione di frontiera $\mathbf{E}_t = 0$), otteniamo

$$\oint [\mathbf{EE}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) = -\oint (\mathbf{EE}^*)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{Er})(\mathbf{E}^*\,d\mathbf{f}) + \oint (\mathbf{E}^*\mathbf{r})(\mathbf{E}\,d\mathbf{f}) =$$
$$= ik \int \mathbf{r}([\mathbf{HE}^*] - [\mathbf{H}^*\mathbf{E}])\,dV - \int \mathbf{EE}^*\,dV.$$

Sottraendo termine a termine le due uguaglianze ottenute e tenendo conto della (90,5), otteniamo la formula

$$\int |\mathbf{H}|^2\,dV = \frac{1}{2} \oint (|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2)(\mathbf{r}\,d\mathbf{f}). \qquad (90,8)$$

Tutte le formule per una cavità risonante riempita da un mezzo dielettrico non assorbente con ε e μ diversi da 1 si ricavano dalle formule per la cavità vuota mediante la sostituzione in esse

$$\omega,\ \mathbf{E},\ \mathbf{H} \to \omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E},\ \sqrt{\mu}\mathbf{H}. \qquad (90,9)$$

È evidente che per questa trasformazione le equazioni (90,1) si riducono alle equazioni di Maxwell esatte nel mezzo

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}.$$

In particolare, l'esistenza di un mezzo diminuisce tutte le autofrequenze di $\sqrt{\varepsilon\mu}$ volte.

Problemi

1. Determinare le frequenze delle autooscillazioni nella cavità a pareti perfettamente conduttrici avente forma di un parallelepipedo rettangolare.

Soluzione. Intendiamo con assi x, y, z i tre spigoli del parallelepipedo di lunghezze a_1, a_2, a_3. Le soluzioni delle equazioni (90,3) e (90,4) soddisfacenti alla condizione di frontiera $\mathbf{E}_t = 0$ sono

$$E_x = A_1 \cos k_x x \operatorname{sen} k_y y \operatorname{sen} k_z z \cdot e^{-i\omega t} \tag{1}$$

e analogamente per E_y e E_z, ove

$$k_x = \frac{n_1 \pi}{a_1}, \quad k_y = \frac{n_2 \pi}{a_2}, \quad k_z = \frac{n_3 \pi}{a_3} \tag{2}$$

(n_1, n_2, n_3 sono degli interi positivi); le costanti A_1, A_2, A_3 sono legate dalla relazione

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0, \tag{3}$$

e le autofrequenze

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2).$$

Il campo magnetico si calcola mediante la formula (1):

$$H_x = -i \frac{c}{\omega} (A_3 k_y - A_2 k_z) \operatorname{sen} k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t}$$

e analogamente per H_y e H_z.

Se tutti e tre o due dei numeri n_1, n_2, n_3 sono nulli, allora $\mathbf{E} \equiv 0$. Perciò alla prima frequenza (la più piccola) corrisponde oscillazione in cui uno di questi numeri è nullo e altri due sono uguali a 1.

In virtù del legame (3) la soluzione (1) (con n_1, n_2, n_3 non-nulli dati) contiene soltanto due costanti indipendenti, vale a dire che ciascuna autofrequenza è doppiamente degenere. Le frequenze per le quali uno dei numeri n_1, n_2, n_3 è nullo sono non degeneri.

2. Determinare le frequenze delle oscillazioni elettriche di dipolo e magnetiche di dipolo in un risonatore sferico (di raggio a).

Soluzione. Nell'onda sferica stazionaria di tipo dipolo elettrico i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ hanno la forma

$$\mathbf{E} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{H} = -ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right),$$

ove $\mathbf{b}$ è un vettore costante e $k = \omega/c$ (cfr. II § 72). La condizione di frontiera $]\mathbf{nE}] = 0$ per $r = a$ conduce all'equazione

$$\operatorname{cotg} ka = \frac{1}{ka} - ka.$$

La sua radice più piccola è $ka = 2{,}74$. La frequenza $\omega = 2{,}74\, c/a$ è la più piccola fra tutte le autofrequenze della cavità sferica.

Nell'onda sferica stazionaria di tipo dipolo magnetico i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono

$$\mathbf{E} = ike^{-i\omega t} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right), \quad \mathbf{H} = e^{-i\omega t} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{sen} kr}{r} \mathbf{b} \right).$$

La condizione di frontiera per $\mathbf{E}$ conduce all'equazione

$$\operatorname{tg} ka = ka.$$

La sua prima radice è $ka = 4{,}49$.

3. Nella cavita è collocata una sferetta con polarizzabilità elettrica e magnetica α_e e α_m. Determinare lo spostamento creato dell'autofrequenza della cavità.

Soluzione. Siano **E**, **H** le intensità del campo della cavità senza la sferetta e $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ le sue intensità con la sferetta. I campi **E** e **H** verificano le equazioni (90,1), e i campi $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{H}_1$ le equazioni

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = \frac{i\omega_1}{c} \mathbf{H}_1, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1 - \frac{i\omega_1}{c} \mathbf{E}_1, \tag{1}$$

ove $\mathbf{j}_1$ è la densità di corrente nella sferetta. Moltiplicando la prima equazione (1) per $\mathbf{H}^*$ e la seconda per $-\mathbf{E}^*$, applichiamo alle equazioni (90,1) l'operazione di coniugazione complessa e, in seguito, moltiplichiamo la prima di esse per $\mathbf{H}_1$ e la seconda per $-\mathbf{E}_1$. Sommando in seguito tutte e quattro le equazioni, otteniamo

$$\operatorname{div} \{[\mathbf{E}_1\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}_1]\} = i \frac{\delta\omega}{c} (\mathbf{H}_1\mathbf{H}^* + \mathbf{E}_1\mathbf{E}^*) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_1\mathbf{E}^*,$$

ove $\delta\omega = \omega_1 - \omega$ è lo spostamento cercato della frequenza. Integriamo questa uguaglianza rispetto al volume della cavità. Il primo membro si trasforma secondo il teorema di Gauss e si elide in modo che sulla parete abbiamo $\mathbf{E}_t = 0$, $\mathbf{E}_{1t} = 0$. Poiché le dimensioni della sferetta sono piccole, il contributo principale nell'integrale dal primo termine a secondo membro compare a grandi distanze da esso; d'altra parte, a queste distanze la perturbazione del campo prodotta dalla sferetta è piccola in modo che si può porre $\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{E}$, $\mathbf{H}_1 \approx \mathbf{H}$. Quanto all'integrale del secondo termine, esso si trasforma come nel § 89 (e nel problema 1 del § 89) e dà

$$\int \mathbf{j}_1\mathbf{E}^* \, dV = -i\omega (\mathcal{P}\mathbf{E}_0^* + \mathcal{M}\mathbf{H}_0^*) = -i\omega V_0 (\alpha_e \, |\, \mathbf{E}_0 \,|^2 + \alpha_m \, |\, \mathbf{H}_0 \,|^2),$$

ove $\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$, $\mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}(\mathbf{r}_0)$; $\mathbf{r}_0$ sono le coordinate della sferetta, V_0 il suo volume; le dimensioni della sferetta sono supposte così piccole da poter trascurare la variazione dei campi **E** e **H** nella sferetta.

In tal modo, tenendo conto della (90,5), troviamo il seguente spostamento della frequenza:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha_e \, |\, \mathbf{E}_0 \,|^2 + \alpha_m \, |\, \mathbf{H}_0 \,|^2}{\frac{1}{2\pi} \int |\, \mathbf{H} \,|^2 \, dV} V_0.$$

Se le polarizzabilità sono complesse questa formula dà lo spostamento della frequenza di autooscillazioni ed il loro smorzamento.

4. La cavità è riempita di dielettrico trasparente di permettività ε_0. Determinare la variazione dell'autofrequenza per piccolo cambiamento $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ della permettività dielettrica.

Soluzione. Il campo imperturbato $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ nel risonatore verifica le equazioni

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \frac{i\omega_0}{c} \mathbf{H}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -\frac{i\omega_0\varepsilon_0}{c} \mathbf{E}_0,$$

e il campo perturbato **E**, **H** le equazioni

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i(\omega_0 + \delta\omega)}{c} \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{i}{c} (\omega_0\varepsilon_0 + \omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega) \mathbf{E}$$

(trascuriamo il termine con $\delta\omega\ \delta\varepsilon$). Operando con queste quattro equazioni come nel problema 3, otteniamo

$$\operatorname{div}\{[\mathbf{E}\mathbf{H}_0^*]+[\mathbf{E}_0^*\mathbf{H}]\}=\frac{i}{c}(\omega_0\delta\varepsilon+\varepsilon_0\delta\omega)\,\mathbf{E}\mathbf{E}_0^*+\frac{i}{c}\,\delta\omega\mathbf{H}\mathbf{H}_0^*\approx$$

$$\approx\frac{i}{c}(\omega_0\delta\varepsilon+\varepsilon_0\delta\omega)\,\mathbf{E}_0\mathbf{E}_0^*+\frac{i}{c}\,\delta\omega\mathbf{H}_0\mathbf{H}_0^*,$$

e in seguito

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0}=-\frac{\int|\mathbf{E}_0|^2\,\delta\varepsilon\,dV}{2\varepsilon_0\int|\mathbf{E}_0|^2\,dV}.$$

Nel passare all'ultima formula abbiamo tenuto conto che per la cavità riempita di dielettrico la relazione (90,5) assume la forma

$$\int|\mathbf{H}_0|^2\,dV=\varepsilon_0\int|\mathbf{E}_0|^2\,dV,$$

come ciò risulta chiaro dalla (90,9).

§ 91. *Propagazione delle onde elettromagnetiche nelle guide d'onda*

A differenza delle cavità considerate nel paragrafo precedente, che hanno volume finito, una guida d'onda rappresenta cavità di lunghezza illimitata, ossia un tubo vuoto infinitamente lungo [1]. Mentre le autooscillazioni nella cavità rappresentano onde stazionarie, nella guida d'onda le onde sono stazionarie soltanto nelle direzioni trasversali, e nella direzione longitudinale è possibile la propagazione delle onde correnti.

Consideriamo una guida d'onda rettangolare con sezione trasversale di forma qualsiasi (a connessione semplice) e invariabile lungo tutta la guida. Supponiamo dapprima che le pareti della guida d'onda siano perfettamente conduttrici. La direzione della guida d'onda consideriamo come asse z. Nell'onda che corre lungo l'asse z la dipendenza di tutte le grandezze da z è data da un fattore della forma $\exp(ik_z z)$ con k_z costante.

Tutte le onde elettromagnetiche possibili in questa guida d'onda si possono dividere in due tipi: in uno di essi $H_z=0$ e nell'altro $E_z=0$ (*Rayleigh*, 1897). Le onde del primo tipo a campo magnetico meramente trasversale si chiamano *onde del tipo elettrico* o *onde E*. Le onde a campo elettrico meramente trasversale si chiamano *onde del tipo magnetico* o *onde H* [2].

---

[1]) Più avanti le formule sono scritte per una guida d'onda vuota. Il passaggio alle formule per la guida d'onda riempita da dielettrico non assorbente si realizza mediante la trasformazione (90,9).

[2]) Le onde E e onde H si chiamano onde TM e TE (trasversali magnetiche e trasversali elettriche), rispettivamente.

Consideriamo dapprima le onde E; le componenti x e y delle equazioni (90,1) danno

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = \frac{i\omega}{c} H_x, \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = \frac{i\omega}{c} H_y,$$

$$ik_z H_y = \frac{i\omega}{c} E_x, \quad ik_z H_x = -\frac{i\omega}{c} E_y.$$

Di qui

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik_z}{\varkappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_y = \frac{ik_z}{\varkappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = \frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \tag{91,1}$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2.$$

In tal modo, in un'onda E tutte le componenti trasversali di **E** e **H** possono essere espresse in funzione della componente longitudinale del campo elettrico. Quest'ultima deve essere determinata mediante la soluzione di un'equazione d'onda che si riduce a un'equazione bidimensionale

$$\Delta_2 E_z + \varkappa^2 E_z = 0 \tag{91,2}$$

con Δ_2 operatore di Laplace bidimensionale. Le condizioni di frontiera per questa equazione consistono nell'annullamento delle componenti tangenti di **E** sulla parete della guida d'onda. A tale scopo è sufficiente richiedere che

$$E_z = 0 \text{ sul contorno della sezione.} \tag{91,3}$$

Secondo le formule (91,1) il vettore bidimensionale con componenti E_x, E_y è proporzionale al gradiente bidimensionale della grandezza E_z. Perciò se la condizione (91,3) è soddisfatta si annulla automaticamente anche la componente tangenziale di **E** nel piano xy.

Analogamente in un'onda H le componenti trasversali di **E** e **H** possono essere espresse in funzione della componente longitudinale del campo magnetico secondo le formule

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{ik_z}{\varkappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{ik_z}{\varkappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_x &= \frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{aligned} \tag{91,4}$$

Quanto al campo longitudinale H_z, esso è dato dalle soluzioni dell'equazione

$$\Delta_2 H_z + \varkappa^2 H_z = 0 \tag{91,5}$$

con la condizione di frontiera

$$\frac{\partial H_z}{\partial n}=0 \text{ sul contorno della sezione.} \tag{91,6}$$

Questa condizione secondo le formule (91,4) garantisce che si annulli la componente normale di **H**.

In tal modo, il compito della determinazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda si riduce alla ricerca di soluzioni di un'equazione d'onda bidimensionale della forma $\Delta_2 f + \varkappa^2 f = 0$ con la condizione di frontiera $f = 0$ o $\partial f/\partial n = 0$ sul contorno della sezione. Per un contorno dato queste soluzioni esistono soltanto per autovalori ben determinati del parametro $\varkappa^2$.

A ciascuno autovalore di $\varkappa^2$ corrisponde una sua dipendenza

$$\omega^2 = c^2(k_z^2 + \varkappa^2) \tag{91,7}$$

tra la frequenza ω e il vettore d'onda k_z. La velocità di propagazione dell'onda lungo la guida d'onda è data dalla derivata

$$u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{k_z^2+\varkappa^2}} = \frac{c^2 k_z}{\omega}. \tag{91,8}$$

Per $\varkappa$ dato essa descrive i valori da 0 a c allorché k_z varia da 0 a ∞.

La densità media (rispetto al tempo) del flusso di energia lungo la guida d'onda è data dalla componente z del vettore di Poynting. Un semplice calcolo mediante le formule (91,1) dà per l'onda E

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\{[\mathbf{EH}^*]_z\} = \frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^4}\,|\,\nabla_2 E_z\,|^2.$$

Il flusso di energia totale q si ottiene integrando $\overline{S}_z$ rispetto all'area della sezione trasversale della guida d'onda. Abbiamo

$$\int |\,\nabla_2 E_z\,|^2\,df = \oint E_z^*\,\frac{\partial E_z}{\partial n}\,dl - \int E_z^*\,\Delta_2 E_z\,df.$$

Il primo integrale va calcolato rispetto al contorno della sezione e si annulla in virtù della condizione di frontiera $E_z = 0$. Nel secondo integrale sostituiamo $\Delta_2 E_z$ con $-\varkappa^2 E_z$ e otteniamo infine

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\varkappa^2}\int |\,E_z\,|^2\,df. \tag{91,9}$$

Per l'onda H si ottiene la stessa espressione con H_z al posto di E_z.

Analogamente si può calcolare la densità dell'energia elettromagnetica W (riferita all'unità di lunghezza della guida d'onda). Tuttavia è più semplice ottenere W direttamente da q poiché deve essere $q = Wu_z$. Così, dalle (91,8) e (91,9) ricaviamo

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\varkappa^2 c^2}\int |\,E_z\,|^2\,df. \tag{91,10}$$

Dalla formula (91,7) risulta che per ogni tipo di onde (corrispondenti a un determinato valore di $\varkappa^2$) esiste un valore minimo possibile della frequenza uguale a $c\varkappa$. Per frequenze più piccole ancora la propagazione di un dato tipo di onde diventa impossibile. Ma fra tutti gli autovalori $\varkappa$ esiste un minimo $\varkappa_{\min}$ diverso da zero anch'esso (si veda più avanti). Perciò possiamo concludere che esiste estremo inferiore di frequenze: $\omega_{\min} = c\varkappa_{\min}$, oltre il quale in generale è impossibile la propagazione di qualsiasi onda nella guida d'onda. Per ordine di grandezza $\omega_{\min} \sim c/a$, ove a sono le dimensioni trasversali del tubo.

Questa affermazione, tuttavia, è vera per le sole guide d'onda con la forma di sezione a connessione semplice con le quali finora abbiamo avuto a che fare. La situazione cambia assolutamente per forma a connessione multipla della sezione [1]). In queste guide d'onda, accanto alle onde E e H descritte precedentemente, è possibile la propagazione di un altro tipo di onde la frequenza delle quali non è limitata da nessuna condizione.

Questo tipo di onde, ossia la cosiddetta *onda principale*, è caratterizzato dal fatto che $k_z = \pm k$ (cioè $\varkappa = 0$); la velocità di sua propagazione coincide con la velocità della luce c. Vediamo quali sono le proprietà fondamentali di questa onda e precisiamo al tempo stesso la ragione per cui questo tipo di onde è impossibile per forma a connessione semplice a della sezione della guida d'onda.

Tutte le componenti del campo nell'onda principale verificano l'equazione di Laplace bidimensionale $\Delta_2 f = 0$. Per la condizione di frontiera $f = 0$ l'unica soluzione di questa equazione, regolare in tutto il dominio (a connessione semplice o multipla) è $f \equiv 0$. Perciò nell'onda principale $E_z = 0$.

Per la condizione di frontiera $\partial f/\partial n = 0$ la soluzione regolare è $f =$ costante. Si vede facilmente, tuttavia, che per $f = H_z$ questa costante non può essere che zero (ricordiamo che costante significa grandezza indipendente da x e y). Integrando infatti l'equazione

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} H_z = 0$$

rispetto all'area della sezione, otteniamo

$$\oint H_n \, dl + \frac{i\omega}{c} \int H_z \, df = 0;$$

in virtù dell'eguaglianza $H_n = 0$ sul contorno della sezione e della costanza di H_z in tutta questa area ne segue che $H_z = 0$.

In tal modo, l'onda principale è meramente trasversale. Per $E_z = H_z = 0$ le componenti x e y delle equazioni (90,1) danno

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \tag{91,11}$$

[1]) Si può trattare in questo proposito sia lo spazio tra due tubi inclusi l'uno nell'altro che lo spazio all'esterno di due fili paralleli.

vale a dire che i campi **E** e **H** sono perpendicolari mutuamente e di grandezza uguali. Per la determinazione di questi campi abbiamo due equazioni

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{E})_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0$$

con la condizione di frontiera $\mathbf{E}_t = 0$.

Si vede che la dipendenza di **E** (e con esso anche di **H**) da x, y è data dalla soluzione del problema elettrostatico bidimensionale: $\mathbf{E} = -\nabla_2\varphi$, ove il potenziale φ verifica l'equazione $\Delta_2\varphi = 0$ con la condizione di frontiera $\varphi =$ costante. Nel dominio a connessione semplice questa condizione di frontiera conduce a $\varphi =$ costante (e perciò $\mathbf{E} = 0$) come unica soluzione, regolare in tutto il dominio. Con ciò si dimostra l'impossibilità di propagazione di questo tipo delle onde lungo le guide d'onda con sezione a connessione semplice. Nel dominio a connessione multipla il valore costante nella condizione di frontiera non è necessariamente lo stesso su vari contorni di frontiera e, quindi, l'equazione di Laplace ha soluzione non banale. In questo caso la distribuzione del campo elettrico nella sezione trasversale della guida d'onda corrisponde al campo elettrostatico piano tra le armature del condensatore sotto data differenza di potenziale.

Finora abbiamo supposto perfettamente conduttrici le pareti della guida d'onda [1]). Se la parete ha piccola ma finita impedenza, ciò implica la comparsa di perdite e quindi lo smorzamento dell'onda che si propaga lungo la guida d'onda. Il coefficiente di smorzamento può essere calcolato così come è stato calcolato nel paragrafo precedente lo smorzamento con il tempo delle oscillazioni elettromagnetiche in una cavità risonante.

La quantità di energia dissipata in un secondo nelle pareti della guida d'onda (riferita all'unità di sua lunghezza) è data dall'integrale

$$\frac{c}{8\pi}\zeta'\oint|\mathbf{H}|^2\,dl,$$

esteso al contorno della sezione; **H** è il campo magnetico calcolato sotto ipotesi che $\zeta = 0$. Dividendo questa grandezza per il flusso raddoppiato di energia lungo la guida d'onda otteniamo il coefficiente di smorzamento cercato. Per questa definizione α dà la velocità di smorzamento dell'ampiezza dell'onda decrescente lungo la guida d'onda come $e^{-\alpha z}$.

---

[1]) In particolare, soltanto sotto questa condizione è possibile una divisione rigorosa in onde con $E_z = 0$ e in onde con $H_z = 0$.

Esprimendo queste grandezze in funzione di E_z e H_z secondo le formule (91,1) o (91,4) otteniamo le seguenti formule esprimenti il coefficiente di assorbimento per le onde E:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\varkappa^2 k_z c} \frac{\oint |\nabla_2 E_z|^2 dl}{\int |E_z|^2 df}, \tag{91,12}$$

e per le onde H:

$$\alpha = \frac{c\varkappa^2\zeta'}{2k_z\omega} \frac{\oint \{|H_z|^2 + (k_z^2/\varkappa^4)|\nabla_2 H_z|^2\} dl}{\int |H_z|^2 df}. \tag{91,13}$$

Per calcoli efficaci è più comodo trasformare gli integrali di superficie a denominatori in integrali estesi al contorno. Scriviamo le formule così ottenute la cui deduzione è analoga a quella della formula (90,8):

$$\int |E_z|^2 df = \frac{1}{2\varkappa^2} \oint (\mathbf{nr}) |\nabla_2 E_z|^2 dl, \tag{91,14}$$

$$\int |H_z|^2 df = \frac{1}{2\varkappa^2} \oint (\mathbf{nr}) \{\varkappa^2 |H_z|^2 - |\nabla_2 H_z|^2\} dl.$$

Quando $k_z \to 0$ (cioè la frequenza $\omega \to c\varkappa$), le espressioni (91,12-13) tendono all'infinito. In questo caso, tuttavia, le formule cessano di essere applicabili in quanto la loro deduzione suppone la piccolezza di $\varkappa$ rispetto a k_z.

Le formule (91,12-13) non si riferiscono all'onda principale (in una guida d'onda con sezione a connessione multipla) nella quale sono nulle tutte le grandezze E_z, H_z, e $\varkappa$. In questo caso si possono esprimere tutte le componenti del campo in funzione del potenziale scalare φ. Tenendo conto della perpendicolarità reciproca e dell'uguaglianza in grandezza dei campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{E} = -\nabla_2\varphi$ nell'onda principale, otteniamo per il suo coefficiente di assorbimento la seguente espressione:

$$\alpha = \frac{\zeta' \oint |\nabla_2\varphi|^2 dl}{2\int |\nabla_2\varphi|^2 df}. \tag{91,15}$$

La propagazione dell'onda principale lungo la guida d'onda può essere considerata con semplicità nei casi in cui il suo coefficiente di assorbimento sia non piccolo (in modo che la formula (91,15) diviene inapplicabile) se, in questo caso, la lunghezza d'onda c/ω è grande rispetto alle dimensioni trasversali della guida d'onda.

Come è stato detto precedentemente, il campo elettrico trasversale nell'onda principale (in ciascun istante) corrisponde al campo

elettrostatico nel condensatore formato dalle pareti della guida d'onda, aventi cariche uguali e opposte. Indichiamo queste cariche riferite all'unità di lunghezza della guida d'onda con $\pm e(z)$. Esse sono legate con le correnti $\pm J(z)$ che passano per le pareti della guida d'onda mediante l'equazione di continuità

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z},$$

ossia, per il campo monocromatico,

$$i\omega e = \frac{\partial J}{\partial z}.$$

In seguito, sia C la capacità dell'unità di lunghezza della guida d'onda. La « differenza di potenziali » tra le sue pareti è $\varphi_2 - \varphi_1 = e/C$; derivandola rispetto a z otteniamo la forza elettromotrice che mantiene il passaggio della corrente per le pareti (ricordiamo che se esiste assorbimento il campo non è più meramente trasversale). Uguagliando a ZJ (Z è l'impedenza dell'unità di lunghezza della guida d'onda), otteniamo

$$-\frac{\partial}{\partial z}\frac{e}{C} = ZJ,$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial J}{\partial z}\right) + i\omega ZJ = 0. \qquad (91,16)$$

Sostituendovi $Z = R - i\omega L/c^2$ (ove R e L sono resistenza e autoinduzione dell'unità di lunghezza della guida d'onda), possiamo tornare dalle componenti monocromatiche della corrente alla funzione temporale qualsiasi. Supponendo che la capacità C sia anch'essa costante lungo la guida d'onda, otteniamo la cosiddetta *equazione del telegrafista*

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R\frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \qquad (91,17)$$

Se non esiste assorbimento ($R = 0$), questa equazione, come deve essere, si riduce a un'equazione d'onda contenente la velocità di propagazione delle onde uguale a $c/\sqrt{LC} = c$. L'eguaglianza $LC = 1$ deriva dall'equivalenza matematica dei problemi della determinazione di $1/C$ e L per data forma dei contorni. I campi elettrico e magnetico tra le superficie dei conduttori perfetti sono mutuamente perpendicolari e sono uguali in modulo (cfr. la (91,11)), fra l'altro, il valore di quest'ultima sulle superficie stesse determina nel primo caso la densità di cariche e nel secondo caso la densità di correnti. Perciò coincidono anche i coefficienti di proporzionalità

($1/C$ e L) tra l'energia del campo e i quadrati della carica o della corrente, rispettivamente.

Problemi

1. Trovare $\varkappa$ per le onde propagantisi lungo una guida d'onda a sezione rettangolare (di lunghezze laterali a e b). Determinare i coefficienti di smorzamento di queste onde.

Soluzione. Nelle onde E [1])

$$E_z = \text{cost} \cdot \text{sen}\, k_x\, x\, \text{sen}\, k_y\, y,$$

ove

$$k_x = n_1\pi/a, \quad k_y = n_2\pi/b,$$

e n_1, n_2 sono dei numeri interi a partire da 1. Nelle onde H

$$H_z = \text{cost} \cdot \cos k_x\, x \cos k_y\, y,$$

e uno dei numeri n_1, n_2 può essere zero. In entrambi i tipi delle onde

$$\varkappa^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Il valore minimo di $\varkappa$ corrisponde all'onda H_{10} (gli indici danno valori di n_1, n_2) e vale $\varkappa_{\min} = \pi/a$ (è supposto che $a > b$).

I coefficienti di smorzamento si calcolano in base alle formule (91,12-13) e valgono: per le onde E

$$\alpha = \frac{2\omega\zeta'}{c\varkappa^2 k_z ab} (k_x^2 b + k_y^2 a),$$

per le onde $H_{n_1 0}$

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{ck_z ab} \left(a + \frac{2\varkappa^2}{k^2}\, b \right)$$

e per le onde $H_{n_1 n_2}$ (n_1, $n_2 \neq 0$)

$$\alpha = \frac{2c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z ab} \left[a + b + \frac{k_z^2}{\varkappa^4} (ak_x^2 + bk_y^2) \right].$$

2. Risolvere il problema 1 per una guida d'onda a sezione circolare (di raggio a).

Soluzione. Risolvendo l'equazione d'onda in coordinate polari r, φ, otteniamo nelle onde E

$$E_z = \text{cost} \cdot J_n (\varkappa r) \begin{matrix}\text{sen}\\ \cos\end{matrix}\, n\varphi$$

con la condizione $J_n(\varkappa a) = 0$ che determina valori di $\varkappa$. Nelle onde H la stessa formula dà H_z e il valore $\varkappa$ è determinato dalla condizione $J_n'(\varkappa a) = 0$. Del minimo valore di $\varkappa$ gode la prima delle onde H_1; esso vale $\varkappa_{\min} = 1{,}84/a$.

Il coefficiente di smorzamento si calcola mediante le formule (91,12-14) e vale per le onde E:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{cak_z},$$

[1]) Omettiamo ovunque il fattore $\exp\{i(k_z z - \omega t)\}$.

e per le onde H:

$$\alpha = \frac{c\varkappa^2\zeta'}{\omega k_z a}\left[1 + \frac{n^2\omega^2}{c^2\varkappa^2(a^2\varkappa^2 - n^2)}\right].$$

§ 92. Diffusione delle onde elettromagnetiche su particelle di piccole dimensioni

Consideriamo la diffusione delle onde elettromagnetiche su particelle macroscopiche le cui dimensioni sono piccole rispetto alla lunghezza dell'onda diffusa $\lambda \sim c/\omega$ (*Rayleigh*, 1871). Se questa condizione è soddisfatta il campo elettromagnetico in prossimità della particella si può supporre uniforme. La particella sita in un campo periodico uniforme acquisisce momenti elettrico e magnetico $\mathcal{P}$ e $\mathcal{M}$ la cui dipendenza dal tempo è data dal fattore $e^{-i\omega t}$ Un'onda diffusa può essere descritta come risultato della radiazione da questi momenti variabili. A distanze R grandi (rispetto a λ) dalla particella il campo dell'onda diffusa nella zona ondosa è determinato dalle formule (cfr. II § 71)

$$\mathbf{H}' = \frac{\omega^2}{c^2 R}\{[\mathbf{n}\mathcal{P}] + [\mathbf{n}[\mathcal{M}\mathbf{n}]]\}, \quad \mathbf{E}' = [\mathbf{H}'\mathbf{n}], \tag{92,1}$$

ove il vettore unitario $\mathbf{n}$ indica la direzione della diffusione e i momenti $\mathcal{P}$ e $\mathcal{M}$ vanno calcolati all'istante $t - R/c$; il campo dell'onda diffusa indichiamo con lettere munite di apice e il campo dell'onda incidente con lettere senza apice. L'intensità media (rispetto al tempo) della radiazione diffusa nell'angolo solido do vale

$$dI = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}|\mathbf{H}'|^2 R^2\, do,$$

e dividendo per l'intensità del flusso di energia nell'onda incidente

$$\frac{c}{8\pi}|\mathbf{H}|^2 = \frac{c}{8\pi}|\mathbf{E}|^2,$$

otteniamo così la *sezione efficace di diffusione*.

Il calcolo di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{M}$ è particolarmente semplice se le dimensioni della particella sono piccole non soltanto rispetto a λ, ma anche rispetto alla « lunghezza d'onda » δ corrispondente alla frequenza ω nella sostanza della particella. In questo caso si può calcolare la polarizzabilità della particella in base alle formule che si riferiscono al campo statico uniforme esterno con la sola differenza, ovviamente, che per ε e μ si calcolano non valori statici, bensì quelli corrispondenti alla frequenza ω in questione. Se, come di solito si ha, il valore μ è vicino a 1, nella formula (92,1) si può mettere il termine di dipolo magnetico.

Così, per una particella sferica di raggio a abbiamo (cfr. l'(8,10))

$$\mathcal{P} = V\alpha\mathbf{E}, \quad \alpha = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \tag{92,2}$$

e la sezione di diffusione

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4} \mid \alpha \mid^2 V^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, do, \tag{92,3}$$

ove θ è l'angolo formato dalla direzione **n** della diffusione e dalla direzione del campo elettrico **E** dell'onda incidente polarizzata linearmente. La sezione totale è

$$\sigma = \frac{8\pi \mid \alpha \mid^2 \omega^4 V^2}{3c^4}. \tag{92,4}$$

La dipendenza della sezione dalla frequenza è conclusa sia nel fattore ω^4 che nella polarizzabilità. Se le frequenze sono così piccole che non esiste dispersione α, la diffusione è proporzionale a ω^4. È da notare anche che la sezione di diffusione è proporzionale al quadrato del volume della particella.

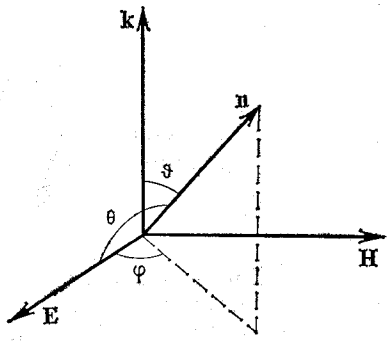


Fig. 47

Se l'onda incidente non è polarizzata (luce naturale), allora per ottenere la sezione differenziale occorre calcolare la media della grandezza (92,3) rispetto a tutte le direzioni del vettore **E** nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda incidente (cioè al suo vettore d'onda **k**). Indichiamo con ϑ e φ l'angolo polare e l'azimut della direzione **n** rispetto a **k** (fra l'altro, φ si calcola dal piano **k**, **E**); abbiamo così $\cos\theta = \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi$ (fig. 47) in modo che

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{c^4} \mid \alpha \mid^2 V^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \vartheta \cos^2 \varphi) \, do. \tag{92,5}$$

Calcolando la media di φ, otteniamo la seguente formula per la sezione di diffusione di un'onda non polarizzata

$$d\sigma = \frac{\omega^4}{2c^4} V^2 \mid \alpha \mid^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \, do, \tag{92,6}$$

ove ϑ è l'angolo fra le direzioni dell'incidenza e della diffusione. È da badare alla simmetria della distribuzione angolare della (92,6) rispetto al piano $\vartheta = \pi/2$, ossia la distribuzione avanti e indietro è uguale.

Dalla formula (92,5) è facile ricavare anche il grado di depolarizzazione della luce diffusa. A tale scopo osserviamo che per data direzione **E** la direzione **E**′ giace nel piano **E**, **n**. Perciò la direzione del campo elettrico **E**′ nell'onda diffusa giacerà nel piano **k**, **n** (piano di diffusione) o perpendicolarmente a questo piano nei casi in cui

l'azimut del vettore **E** rispetto al piano **k**, **n** valga $\varphi = 0$ o $\pi/2$, rispettivamente. Supponiamo che $I_{\parallel}$ e $I_{\perp}$ siano le intensità della diffusione con queste due polarizzazioni; il grado di depolarizzazione è determinato come rapporto tra la più piccola e la più grande di queste grandezze. Secondo la (92,5) otteniamo

$$I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2\vartheta. \tag{92,7}$$

Se la particella diffondente gode di grande permettività dielettrica, allora $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|} \ll \lambda$. In questo caso le dimensioni della particella possono essere piccole rispetto a λ e, al tempo stesso, non piccole rispetto a δ. Nella prima approssimazione in $1/\varepsilon$ il momento elettrico della particella si può calcolare semplicemente come momento del conduttore ($\varepsilon \to \infty$) nel campo uniforme costante esterno. Per il calcolo del momento magnetico sotto queste condizioni hanno importanza le correnti di induzione che compaiono nella particella e il problema non si riduce a quello statico; si deve cercare invece la soluzione

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{H} = 0 \tag{92,8}$$

dell'equazione (83,2), ove poniamo $\mu = 1$, la quale lontano dalla particella si trasforma in campo dell'onda incidente. Si trova in questo caso che i momenti magnetico e elettrico sono grandezze di un medesimo ordine e nella formula (92,1) si devono conservare ambedue i termini. La distribuzione angolare e la grandezza della diffusione in questo caso variano notevolmente rispetto al caso studiato precedentemente (cfr. il problema 2).

Problemi

1. La luce polarizzata linearmente si diffonde su particelle piccole orientate caoticamente e aventi tre valori principali distinti del tensore di polarizzabilità elettrica. Determinare il coefficiente di depolarizzazione della luce diffusa.

Soluzione. Trascurando come nel testo il momento magnetico, dalla (92,1) ricaviamo

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega^2}{c^2R}[[\mathbf{n}\mathcal{P}]\mathbf{n}]$$

Il coefficiente di depolarizzazione cercato è dato dal rapporto tra valori principali del tensore bidimensionale

$$I_{\alpha\beta} = \langle E'_\alpha E'^*_\beta \rangle,$$

ove parentesi angolare indica la media rispetto alle orientazioni della particella diffondente per direzione data della diffusione **n**, mentre gli indici α e β descrivono due valori nel piano perpendicolare a **n** (cfr. II § 50). È più comodo, tuttavia, calcolare la media del tensore tridimensionale $\mathcal{P}_i\mathcal{P}^*_k$ e in seguito proiet-

tarlo sul piano perpendicolare a **n**; queste componenti del tensore $\langle \mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^* \rangle$ sono proporzionali alle componenti corrispondenti di $I_{\alpha\beta}$.

Sostituendo $\mathcal{P}_i = \alpha_{ik} E_k$ abbiamo

$$\langle \mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^* \rangle = \langle \alpha_{il} \alpha_{km}^* \rangle E_l E_m^*.$$

Per calcolare la media ricorriamo alla formula

$$\langle \alpha_{il} \alpha_{km}^* \rangle = A \delta_{il} \delta_{km} + B (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl}).$$

Questa è la forma più generale del tensore del quarto ordine simmetrico rispetto alle coppie di indici il e km e contenente le sole costanti scalari. Quest'ultime vanno determinate mediante due uguaglianze che si ottengono semplificando il tensore una volta secondo le coppie $i = l$, $k = m$ e l'altra secondo le coppie $i = k$, $l = m$, esse valgono

$$A = 1/15\,(2\alpha_{ii}\alpha_{kk}^* - \alpha_{ik}\alpha_{ik}^*, \qquad B = 1/30\,(3\alpha_{ik}\alpha_{ik}^* - \alpha_{ii}\alpha_{kk}^*).$$

Nell'onda polarizzata linearmente l'ampiezza del campo **E** (omettiamo il fattore temporale $e^{-i\omega t}$) sempre può essere determinata come grandezza reale. Allora otteniamo

$$\langle \mathcal{P}_i \mathcal{P}_k^* \rangle = (A + B) E_i E_k + B E^2 \delta_{ik}. \tag{1}$$

Supponiamo che l'asse z sia diretto lungo **n** e che il piano xz passi per i vettori **n** e **E**; questi assi sono assi principali del tensore $I_{\alpha\beta}$. Mediante componenti corrispondenti del tensore (1) otteniamo il coefficiente di depolarizzazione

$$\frac{I_y}{I_x} = \frac{B}{(A + B)\,\mathrm{sen}^2\,\theta + B}$$

(θ è l'angolo formato da **E** e **n**).

2. Trovare la sezione di diffusione su una sferetta (di raggio a) che gode di grande ε; è supposto che $\lambda \gg a \sim \delta$.

Soluzione. Il problema del calcolo del momento magnetico che acquisisce nel campo magnetico variabile **H** la sferetta con dato valore ε (e $\mu = 1$) coincide con quello già risolto nel § 59 (problema 1) con la sola differenza che nelle formule là dedotte si deve porre $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$. Perciò abbiamo

$$\mathcal{M} = -a^3 \gamma \mathbf{H}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{ka}\,\mathrm{ctg}\,ka - \frac{3}{(ka)^2}\right).$$

È da notare che per $|ka| \ll 1$ abbiamo $\gamma \approx -(ka)^2/30$, e per $|ka| \gg 1$, invece, $\mathrm{cotg}\,ka \to -i$, $\gamma \approx 1/2\,(1 - 3i/ka)$.

Il momento elettrico si calcola nella prima approssimazione rispetto a $1/\varepsilon$ semplicemente come momento della sfera conduttrice ($\varepsilon \to \infty$) nel campo elettrico uniforme costante:

$$\mathcal{P} = a^3 \mathbf{E}.$$

Tenendo conto della perpendicolarità reciproca di **E** e **H**, dopo un semplice calcolo mediante la formula (92,1) otteniamo la seguente espressione per la sezione di diffusione:

$$d\sigma = \frac{a^6 \omega^4}{c^4}\left[|\gamma|^2 \cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi - (\gamma + \gamma^*)\cos\vartheta + \cos^2\vartheta\,(\cos^2\varphi + |\gamma|^2\,\mathrm{sen}^2\varphi)\right] do,$$

ove φ e ϑ sono gli angoli mostrati nella fig. 47. Per diffusione della luce non polarizzata

$$d\sigma = \frac{a^6 \omega^4}{c^4}\left[\frac{1}{2}(1 + |\gamma|^2)(1 + \cos^2\vartheta) - (\gamma + \gamma^*)\cos\vartheta\right] do,$$

e il grado di depolarizzazione della luce diffusa è

$$\frac{I_{\parallel}}{I_{\perp}}=\left|\frac{\gamma-\cos\vartheta}{1-\gamma\cos\vartheta}\right|^2.$$

La sezione di diffusione totale è

$$\sigma=\frac{8\pi a^6\omega^4}{3c^4}(1+|\gamma|^2).$$

Nel limite $ka\to\infty$ (cioè quando $\lambda\gg a\gg\delta$) abbiamo $\gamma=1/2$; questo limite corrisponde alla diffusione su una sferetta perfettamente riflettente all'interno della quale, in generale, non penetra né campo elettrico né quello magnetico. Per la sezione di diffusione differenziale abbiamo

$$d\sigma=\frac{5a^6\omega^4}{8c^4}\left(1+\cos^2\vartheta-\frac{8}{5}\cos\vartheta\right)do.$$

È da notare una brusca asimmetria della distribuzione angolare rispetto al piano $\vartheta=\pi/2$: la diffusione si produce principalmente indietro (il rapporto tra l'intensità della luce diffusa avanti e l'intensità della diffusione indietro è 1 : 9).

§ 93. Assorbimento delle onde elettromagnetiche su particelle di piccole dimensioni

La diffusione delle onde elettromagnetiche è accompagnata da loro assorbimento contemporaneo su particelle. La sezione di questo processo è data dal rapporto fra l'energia media Q dissipata nella particella (in un secondo) e la densità del flusso di energia incidente. In questo caso per il calcolo di Q si può ricorrere alla formula

$$Q=-\overline{\mathscr{P}\dot{\mathfrak{E}}}-\overline{\mathscr{M}\dot{\mathfrak{H}}}, \tag{93,1}$$

ove $\mathscr{P}$ e $\mathscr{M}$ sono momenti elettrico e magnetico totali della particella e i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{H}$ dell'onda diffusa fungono da campi esterni $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{H}$ (cfr. la formula (59,11)).

Ricorrendo alla rappresentazione complessa delle grandezze, scriviamo (si veda la nota alla pag. 300)

$$Q=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\mathscr{P}\dot{\mathbf{E}}^*+\mathscr{M}\dot{\mathbf{H}}^*\}=\frac{\omega}{2}V(\alpha_e''+\alpha_m'')|\mathbf{E}|^2,$$

ove α_e e α_m sono le polarizzabilità elettrica e magnetica della particella. Dividendo per il flusso di energia incidente, otteniamo

$$\sigma=\frac{4\pi\omega}{c}(\alpha_e''+\alpha_m'')V. \tag{93,2}$$

Applichiamo questa formula all'assorbimento su una sferetta di raggio $a(a\ll\lambda)$ la cui sostanza sia non magnetizzata ($\mu=1$). Il carattere di assorbimento dipende notevolmente dalla grandezza di permettività dielettrica.

Se ε non è grande, accanto ad $a \ll \lambda$ abbiamo anche $a \ll \delta$. In questo caso si può trascurare la polarizzabilità magnetica rispetto a quella elettrica. Ricavando quest'ultima dalla (92,2) abbiamo

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\varepsilon''}{c\,[(\varepsilon'+2)^2+\varepsilon''^2]}. \tag{93,3}$$

Se, invece $|\varepsilon| \gg 1$, la parte elettrica dell'assorbimento diventa piccola e l'assorbimento magnetico può essere notevole anche se ancora $\delta \gg a$. Per $\delta \gg a$ (cioè $|ka| \ll 1$) la polarizzabilità magnetica (cfr. il problema 2 del § 92) è

$$\alpha_m = \frac{(ka)^2}{40\pi} = \frac{a^2\omega^2\varepsilon}{40\pi c^2}$$

e la sezione di assorbimento

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3\varepsilon''}{c}\left(\frac{1}{|\varepsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2}\right). \tag{93,4}$$

All'ulteriore aumentare di ε la parte elettrica dell'assorbimento diviene piccola rispetto a quella magnetica. Nel caso limite $\delta \ll a$ (cioè $|ka| \gg 1$) abbiamo

$$\alpha_m = -\frac{3}{8\pi}\left(1 - \frac{3i}{ka}\right) = -\frac{3}{8\pi}\left(1 - \frac{3ic}{\omega a}\zeta\right),$$

ove $\zeta = 1/\sqrt{\varepsilon}$ è l'impedenza superficiale della sferetta. Di qui

$$\sigma = 6\pi a^2\zeta'. \tag{93,5}$$

È da sottolineare che questa formula si potrebbe ottenere direttamente senza ricorrere all'espressione generale per la polarizzabilità magnetica della sferetta $\alpha_m(\omega)$. Per ζ piccola la dissipazione dell'energia Q può essere calcolata integrando il vettore medio di Poynting (87,4) sulla superficie della sferetta, mentre la distribuzione del campo magnetico sulla superficie sferica è data dalla soluzione (54,3) del problema della sfera superconduttrice ($\zeta = 0$) collocata in un campo magnetico uniforme.

Se è nota la sezione di assorbimento della sferetta si può determinare immediatamente l'intensità dell'irraggiamento da essa stessa prodotto. Secondo la legge di Kirchhoff (cfr. V § 63) l'intensità dI (nell'intervallo di frequenze $d\omega$) si esprime in funzione di $\sigma(\omega)$ mediante la formula

$$dI = 4\pi c\sigma(\omega)\, e_0(\omega)\, d\omega, \tag{93,6}$$

ove

$$e_0(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^3 (e^{\hbar\omega/T} - 1)}$$

è la densità spettrale della radiazione nera riferita all'unità di volume e all'intervallo unitario di angoli solidi.

§ 94. *Diffrazione su un cuneo*

La teoria della diffrazione approssimata ordinaria (cfr. II §§ 59-61) è basata sull'ipotesi della piccolezza di deviazioni dall'ottica geometrica. Con ciò è supposto, primo, che tutte le dimensioni siano grandi rispetto alla lunghezza d'onda; ciò si riferisce sia alle dimensioni dei corpi (schermi) o ai fori in essi sia alle distanze fra corpi e punti di radiazione e di osservazione della luce. Secondo, vanno considerati i soli piccoli angoli di diffrazione, cioè la distribuzione della luce in direzioni vicine alla direzione della frontiera dell'ombra geometrica. Sotto queste condizioni le proprietà ottiche concrete dei corpi sono in generale inessenziali; ciò che più importa è il fatto stesso della non trasparenza degli schermi.

Se le condizioni suindicate non sono soddisfatte la soluzione del problema della diffrazione richiede soluzione precisa dell'equazione d'onda tenendo conto delle condizioni di frontiera corrispondenti sulla superficie dei corpi, dipendenti da loro proprietà concrete. La ricerca di queste soluzioni presenta difficoltà matematiche notevoli ed è stata attuata per una cerchia di problemi relativamente stretta. In questo caso si parte da ipotesi che semplificano le proprietà del corpo sul quale si produce la diffrazione: esso è supposto perfettamente conduttore (e con ciò, dal punto di vista ottico, perfettamente riflettente).

A questo proposito è da notare la seguente circostanza. Potrebbe sembrare naturale risolvere il problema della diffrazione supponendo « nera » la superficie del corpo, cioè assorbente completamente la luce incidente. In realtà, tuttavia, nell'impostazione del problema corretto della diffrazione questa ipotesi sulle proprietà del corpo sarebbe contraddittoria internamente. Infatti, se la sostanza stessa del corpo è fortemente assorbente, il coefficiente di riflessione dalla sua superficie non è piccolo, ma, al contrario, vicino a 1 (cfr. § 87). Perciò per ottenere un coefficiente di riflessione vicino a zero occorre che la sostanza sia debolmente assorbente e che il corpo goda di spessore grande (rispetto alla lunghezza d'onda). Nella teoria della diffrazione precisa un ruolo importante giocano inevitabilmente tratti di superficie del corpo in prossimità (a distanza dell'ordine della lunghezza d'onda) del suo orlo; ma lo spessore del corpo in prossimità del suo orlo è comunque piccolo in modo che l'ipotesi che esso sia « nero » è qui a priori non vera.

Interesse teorico notevole presenta la soluzione precisa del problema della diffrazione della luce dall'orlo di un cuneo perfettamente conduttore delimitato da due semipiani intersecantisi (*A. Sommerfeld*, 1894). Esposizione completa di questa teoria matematica com-

plicata richiedente applicazione di metodi matematici particolari supera i limiti del presente libro. Diamo qui a titolo di informazione soltanto i risultati finali [1]).

Scegliamo il bordo del cuneo come asse z del sistema delle coordinate cilindriche r, φ, z. Alla superficie anteriore del cuneo (OA nella fig. 48) corrisponde $\varphi = 0$ e a quella posteriore (OB) $\varphi = \gamma$, ove $2\pi - \gamma$ è l'angolo di apertura del cuneo; al dominio all'esterno del cuneo corrispondono gli angoli $0 \leqslant \varphi \leqslant \gamma$. Supponiamo che un'onda monocromatica piana con ampiezza unitaria incida nel piano r, φ sulla superficie anteriore del cuneo sotto un angolo φ_0 rispetto alla superficie (per ragioni di simmetria è sufficiente considerare i valori $\varphi_0 < \gamma/2$). Distingueremo due casi di polarizzazione indipendenti dell'onda incidente (e con essa di quella diffratta, ossia allorché all'orlo del cuneo (asse z) sia parallelo il vettore **E** o il vettore **H**. In questi casi con la lettera u indichiamo E_z o H_z, rispettivamente.

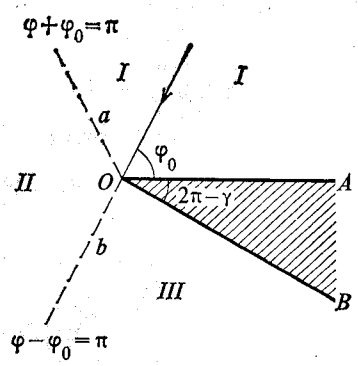


Fig. 48

Allora il campo elettromagnetico in tutto lo spazio è dato dalla formula (omettiamo ovunque il fattore temporale $e^{-i\omega t}$)

$$u(r, \varphi) = v(r, \varphi - \varphi_0) \mp v(r, \varphi + \varphi_0), \tag{94,1}$$

ove i segni superiore e inferiore corrispondono rispettivamente alle polarizzazioni con **E** e **H** lungo l'asse z, mentre la funzione $v(r, \psi)$ si esprime mediante l'integrale complesso

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\gamma} \int\limits_C e^{-ikr\cos\zeta} \frac{d\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta+\psi)/\gamma}} \tag{94,2}$$

($k = \omega/c$). Il cammino di integrazione $C = C_1 + C_2$ nel piano ζ è composto di due anelli rappresentati nella fig. 49. Gli estremi di ciascun anello vanno all'infinito nei tratti del piano ζ (tratteggiati nella fig. 49) in cui $\operatorname{Im}(\cos\zeta) < 0$ e perciò il fattore $\exp(-ikr\cos\zeta)$ tende a zero nell'infinito. L'espressione integranda nella (94,2) ha poli giacenti sull'asse reale ζ nei punti $\zeta = -\psi + 2n\gamma$, ove n

[1]) Per calcoli dettagliati si vedano: *A. Sommerfeld* « Optika », 1950; *F. Frank* e *R. Mises* « Differential and Integral Equations of Physics Mathematical », N.Y., 1935, p. 2, ch. XX. Un altro metodo di soluzione appartenente a *M.I. Kontorovič* e *N.N. Lebedev* si trova nel libro: *Grinberg G.A.* « Alcune questioni della teoria matematica dei fenomeni elettrici e magnetici », Mosca, 1948, cap. XXII (edizione russa).

sono degli interi. Al posto di C si può integrare lungo il cammino $D = D_1 + D_2$ (fig. 49) aggiungendo all'integrale i residui dell'espressione integranda nei poli siti nell'intervallo $-\pi \leqslant \zeta \leqslant \pi$ qualora tali esistano. Rappresentiamo v nella forma

$$v(r, \psi) = v_0(r, \psi) + v_d(r, \psi), \tag{94,3}$$

ove v_d è l'integrale (94,2) esteso al cammino D e v_0 il contributo proveniente dai residui nei poli suindicati. Da ciascuno dei poli compare un termine in v_0 uguale a

$$\exp[-ikr\cos(\psi - 2n\gamma)],$$

che rappresenta ora l'onda incidente ora una delle onde riflesse dalla superficie del cuneo secondo le leggi dell'ottica geometrica. Quanto

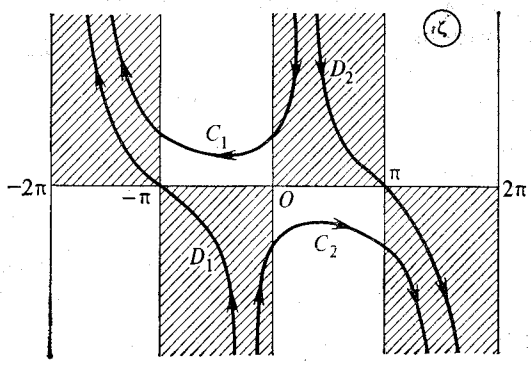


Fig. 49

alla funzione v_d, essa descrive propriamente la deformazione per diffrazione delle onde. Interesse maggiore presenta il campo a distanze grandi (rispetto alla lunghezza d'onda) dal bordo del cuneo. Per $kr \gg 1$ si verifica la formula asintotica [1])

$$v_d(r, \psi) = \frac{\pi}{\gamma\sqrt{2\pi kr}}\, e^{i(kr+\pi/4)} \frac{\operatorname{sen}(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)}, \tag{94,4}$$

a condizione che l'angolo ψ soddisfi la disuguaglianza

$$\left(\cos\frac{\pi^2}{\gamma} - \cos\frac{\pi\psi}{\gamma}\right)^2 \gg \frac{1}{kr}. \tag{94,5}$$

La dipendenza della funzione v_d e con essa anche del campo

$$u_d(r, \varphi) = v_d(r, \varphi - \varphi_0) \mp v_d(r, \varphi + \varphi_0)$$

[1]) Per termini successivi di questo sviluppo si veda *W. Pauli*. — Phys. Rev., 1938, v. 54, p. 924.

da r è data dal fattore $e^{ikr}/\sqrt{r}$, vale a dire che questo campo ha carattere di un'onda cilindrica come se fosse irradiata dal bordo del cuneo.

Le formule (94,1-5) nella scrittura suindicata sono valide qualunque siano i valori degli angoli γ e φ_0. Per fissare le idee, studiamo in dettaglio queste formule per un rapporto tra gli angoli γ e φ_0 ($\gamma > \pi + \varphi_0$) tale che dal punto di vista dell'ottica geometrica conduce alla comparsa di due frontiere: frontiera Ob dell'ombra completa (dominio III della fig. 48) e frontiera Oa dell'« ombra » dell'onda riflessa dalla superficie OA. Nella fig. 48 $\varphi_0 < \pi/2$; se invece $\varphi_0 > \pi/2$ la frontiera Oa si trova a destra della direzione dell'onda incidente. Per $\gamma < \pi + \varphi_0$ il dominio dell'ombra totale in generale non esiste e la riflessione (semplice o persino multipla) si produce da ambedue i lati del cuneo.

Nei domini I, II, III la funzione

$$u_0(r, \varphi) = v_0(r, \varphi - \varphi_0) \mp v_0(r, \varphi + \varphi_0)$$

ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} &\text{dominio } I \; u_0 = \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)] \mp \exp[-ikr\cos(\varphi + \varphi_0)], \\ &\text{dominio } II \; u_0 = \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)], \\ &\text{dominio } III \; u_0 = 0. \end{aligned} \tag{94,6}$$

Queste espressioni, che non si annullano per $kr \to \infty$ descrivono non alterate dalla diffrazione l'onda incidente (nel dominio II) o l'insieme delle onde incidente e riflessa (nel dominio I). L'alterazione del campo per diffrazione è data dalla formula (94,4), ma la condizione (94,5) va violata per valori ψ troppo vicini a π (quando la differenza $|\psi - \pi|$ cessa di essere grande rispetto a $1/\sqrt{kr}$.)

I valori $\psi = \pi$ corrispondono alle frontiere geometriche dell'ombra; per $\psi = \varphi - \varphi_0$ questa è la frontiera dell'ombra totale e per $\psi = \varphi + \varphi_0$ la frontiera dell'ombra dell'onda riflessa. In prossimità immediata di questi valori si deve ricorrere a un'altra espressione asintotica la quale si verifica unicamente se è soddisfatta la condizione $|\psi - \pi| \ll 1$. Quest'ultima assieme alla condizione $kr \gg 1$ garantisce l'applicabilità della teoria approssimata ordinaria della diffrazione di Fresnel. Ciò premesso, in prossimità della frontiera Ob dell'ombra totale otteniamo l'espressione asintotica

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)] \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta \\ w &= -(\varphi - \varphi_0 - \pi)\sqrt{kr/2}. \end{aligned} \tag{94,7}$$

Analogamente in prossimità della frontiera Oa dell'ombra dell'onda riflessa otteniamo

$$u(r, \varphi) = \exp[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)] + \\ + \exp[-ikr\cos(\varphi + \varphi_0)] \frac{1-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta, \qquad (94,8)$$

$$w = -(\varphi + \varphi_0 - \pi)\sqrt{kr/2}.$$

In questa approssimazione il quadro della diffrazione non dipende dalla direzione della polarizzazione dell'onda e dall'angolo d'apertura del cuneo.

I domini di applicabilità delle formule (94,4) e (94,7-8) in parte si sovrappongono. Così, in prossimità della frontiera dell'ombra totale il dominio di applicabilità comune è dato dalle disuguaglianze

$$1 \gg |\varphi - \varphi_0 - \pi| \gg 1\sqrt{kr},$$

e in esso

$$u(r, \varphi) = u_0(r, \varphi) + \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \frac{1}{\varphi - \varphi_0 - \pi} \qquad (94,9)$$

(con u_0 dalla (94,6)). Questa espressione si ricava dalla (94,7) mediante le note formule asintotiche esprimenti l'integrale di Fresnel per grandi $|w|$:

$$\int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw} e^{iw^2} \quad \text{per} \quad w > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta = \frac{1}{2iw} e^{iw^2} \quad \text{per} \quad w < 0.$$

§ 95. *Diffrazione su uno schermo piano*

La formula esatta (94,2) esprimente la diffrazione su un cuneo può essere ridotta a una forma relativamente semplice nel caso particolare della diffrazione su un semipiano (cui corrisponde $\gamma = 2\pi$). E precisamente, l'integrale complesso che figura nella formula (94,2) può essere trasformato nell'integrale di Fresnel:

$$v(r, \psi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(kr\cos\psi + \pi/4)} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2} d\eta, \\ w = \sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}. \qquad (95,1)$$

Questa formula si verfica per r e ψ qualsiasi. Per $kr \gg 1$ e gli angoli $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{kr}$ è applicabile l'espressione asintotica

$$v_d(r, \psi) = -e^{i(kr+\pi/4)} \frac{1}{2\sqrt{2\pi kr}\cos(\psi/2)} \tag{95,2}$$

(che è la formula (94,4) con $\gamma = 2\pi$).

La formula (95,2) consente di ottenere in forma chiusa la soluzione del problema della diffrazione su uno schermo piano perfettamente conduttore di configurazione qualsiasi. In questo caso è supposto soltanto che le dimensioni dello schermo e le distanze da esse siano grandi rispetto alla lunghezza d'onda, mentre gli angoli di diffrazione non siano troppo piccoli (questo dominio va sovrapposto dal dominio di angoli piccoli in cui sono applicabili le formule di Fresnel ordinarie esprimenti la diffrazione). Il risultato si ottiene sotto forma di integrale esteso al contorno dell'orlo dello schermo, così come nella teoria approssimata ordinaria il campo di diffrazione si esprime sotto forma dell'integrale di superficie che chiude il foro nello schermo. Non ci soffermiamo qui su questi calcoli.

Nella teoria della diffrazione precisa su schermi piani perfettamente conduttori si può enunciare un teorema (appartenente a *L.I. Mandelštam* e *M.A. Leontovič*) sotto certo aspetto analogo al teorema di Babinet nella teoria della diffrazione approssimata.

Consideriamo uno schermo piano con foro di forma qualsiasi; supponiamo che il piano dello schermo coincida con il piano $z = 0$ e che l'onda elettromagnetica incida dalla parte $z < 0$. Siano $\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{H}_0$ il campo totale dell'onda incidente e dell'onda riflessa dallo schermo (come se non esistesse foro); supporremo il campo prolungato all'altro lato dello schermo ($z > 0$). Poiché $H_z = 0$, $\mathbf{E}_t = 0$ per $z = 0$ (in virtù delle condizioni di frontiera sulla superficie perfettamente conduttrice), i valori $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ per $z > 0$ e $z < 0$ saranno legati dalle relazioni

$$\begin{gathered} E_{0z}(x, y, z) = E_{0z}(x, y, -z), \quad \mathbf{E}_{0t}(x, y, z) = -\mathbf{E}_{0t}(x, y, -z), \\ H_{0z}(x, y, z) = -H_{0z}(x, y, -z), \quad \mathbf{H}_{0t}(x, y, z) = \mathbf{H}_{0t}(x, y, -z). \end{gathered} \tag{95,3}$$

In seguito, sia $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ il campo che si otterrebbe se fosse collocato nel campo $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ di una lamina piana coincidente per forma, grandezza e posizione con il foro sullo schermo e avente la permeabilità magnetica $\mu = \infty$. Allora la soluzione del problema di diffrazione sul foro dello schermo è data dalle espressioni seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= {}^1/_2(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = {}^1/_2(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \text{ per } z < 0 \\ \mathbf{E} &= {}^1/_2(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = {}^1/_2(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}') \text{ per } z > 0. \end{aligned} \tag{95,4}$$

Per dimostrare questa affermazione osserviamo che il campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ gode della stessa simmetria (espressa dalle formule (95,3))

che il campo $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$. Perciò nel piano $z = 0$ esso verifica le condizioni

$$\mathbf{E}'_t = 0, \quad H'_z = 0 \qquad \text{fuori del foro}$$
$$\mathbf{E}'_{t1} = -\mathbf{E}'_{t2}, \; H'_{z1} = -H'_{z2} \qquad \text{sul foro}$$

(gli indici 1 e 2 corrispondono a $z \to \pm 0$). Inoltre, esso verifica le condizioni

$$E'_z = 0, \; \mathbf{H}'_t = 0 \text{ sul foro},$$

in quanto le condizioni di frontiera sulla superficie del corpo con $\mu = \infty$ sono inverse (sostituendo $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ con $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$) rispetto alle condizioni sulla superficie perfettamente conduttrice ($\varepsilon = \infty$). Di qui risulta con chiarezza che il campo (95,4) soddisfa le condizioni necessarie $\mathbf{E}_t = 0$, $H_z = 0$ sulla superficie dello schermo ($z \to -0$) all'esterno del foro ed è continuo sul foro. Infine, poiché il campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ nell'infinito tende a $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, allora il campo (95,4) tende a $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ per $z \to -\infty$ e a zero per $z \to +\infty$. Così esso soddisfa tutte le ipotesi del problema della diffrazione posto, come dovevasi dimostrare.

In tal modo, il problema della diffrazione sul foro di uno schermo con $\varepsilon = \infty$ è equivalente al problema della diffrazione su uno schermo addizionale con $\mu = \infty$.

Problemi

1. Un'onda monocromatica piana incide normalmente su una fessura di larghezza $2a$ sufficientemente grande rispetto alla lunghezza d'onda, praticata in uno schermo piano perfettamente conduttore. Determinare la distribuzione dell'intensità della luce dietro la fessura a grandi distanze da essa per grandi angoli di diffrazione.

Soluzione. Per $a \gg \lambda$ il campo diffrattivo dietro la fessura si può considerare come sovrapposizione di campi provenienti dalla diffrazione indipendente su ciascuno dei due orli della fessura e definibili mediante la formula asintotica (95,2) [1]. Quando le distanze $AP = r_1$ e $BP = r_2$ fra gli orli della fessura e il punto di osservazione (fig. 50) sono grandi rispetto ad a, nei fattori e^{ikr_1} e e^{ikr_2} scriviamo

$$r_1 = r - a \operatorname{sen} \chi, \qquad r_2 = r + a \operatorname{sen} \chi;$$

in tutti gli altri punti poniamo $r_1 \approx r_2 \approx r$ e tutti gli angoli formati da AP, OP, BP e l'asse z uguali a un medesimo angolo di diffrazione χ.

Come risultato otteniamo

$$u = \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[\frac{\operatorname{sen}(ka \operatorname{sen} \chi)}{\operatorname{sen}(\chi/2)} \pm i \frac{\cos(ka \operatorname{sen} \chi)}{\cos(\chi/2)} \right]$$

[1]) Quest'ipotesi, tuttavia, perde la sua validità per angoli di diffrazione sufficientemente vicini a $\pi/2$ (per $\pi/2 - \chi \lesssim 1/\sqrt{ka}$).

Di qui l'intensità della luce diffratta nell'intervallo di angoli $d\chi$ (riferita all'intensità totale della luce incidente sulla fessura) è

$$dI = \frac{1}{4\pi ak}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}(ak\operatorname{sen}\chi)}{\operatorname{sen}(\chi/2)}\right]^2 + \left[\frac{\cos(ak\operatorname{sen}\chi)}{\cos(\chi/2)}\right]^2\right\} d\chi =$$

$$= \frac{ak}{\pi}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}(ak\operatorname{sen}\chi)}{ak\operatorname{sen}\chi}\right]^2 \cos\chi + \left[2ak\cos\frac{\chi}{2}\right]^{-2}\right\} d\chi.$$

Per χ piccoli quest'espressione si trasforma nella seguente formula esprimente la diffrazione di Fraunhofer sulla fessura:

$$dI = \frac{1}{\pi ak}\,\frac{\operatorname{sen}^2(ak\chi)}{\chi^2}\,d\chi.$$

2. Un'onda piana incide su un piano perfettamente conduttore avente un foro circolare di raggio a piccolo rispetto alla lunghezza d'onda. Determinare l'intensità della luce diffratta passata attraverso il foro (*Rayleigh*, 1897).

Soluzione. In accordo con quanto detto nel testo, il problema posto conduce al problema della diffrazione su una lamina circolare con $\mu = \infty$, e poiché $a \ll \lambda$ abbiamo a che fare con la dispersione su piccola particella. Secondo il § 92, per risolvere il problema di tale dispersione è necessario determinare le polarizzabilità elettrica e magnetica statiche del disco. Il campo $\mathbf{E}_0$ è perpendicolare al piano del disco e la condizione di frontiera $E_z' = 0$ coincide formalmente con la condizione che avrebbe luogo in elettrostatica sulla superficie solida con $\varepsilon = 0$. Il campo $\mathbf{H}_0$, invece, è parallelo al disco e la condizione di frontiera $\mathbf{H}_t' = 0$ corrisponde al problema magnetostatico con $\mu = \infty$. Perciò i momenti elettrico e magnetico del disco (si vedano il problema 4 del § 4 e il problema del § 54) sono

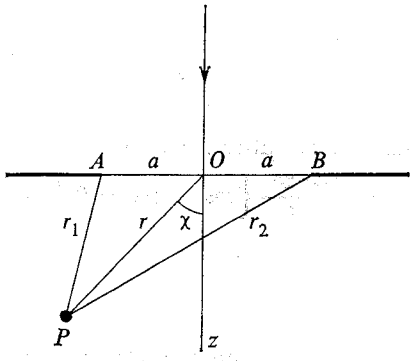


Fig 50

$$\mathscr{P} = -\frac{2a^3}{3\pi}\,\mathbf{E}_0, \quad \mathscr{M} = \frac{4a^3}{3\pi}\,\mathbf{H}_0.$$

Nel passare al problema della diffrazione sul foro queste espressioni vanno moltiplicate per 1/2 in accordo con le formule (95,4) e in seguito sostituite nella formula (92,1) esprimente la dispersione.

In tal modo, l'intensità della radiazione diffratta nell'angolo solido do [1]) è

$$dI = \frac{c}{4\pi}\,\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\,\{[\mathbf{nE}_0] - 2\,[\mathbf{n}[\mathbf{H}_0\mathbf{n}]]\}^2\,do =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\,\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\,\{[\mathbf{nE}_0]^2 + 4\,[\mathbf{nH}_0]^2 + 4\mathbf{n}\,[\mathbf{H}_0\mathbf{E}_0]\}\,do,$$

L'intensità della diffrazione totale si ottiene per integrazione su semisfera e vale

$$I = \frac{\omega^4 a^6}{27\pi^2 c^3}\,(E_0^2 + 4H_0^2).$$

[1]) Supponiamo omessi i fattori $e^{-i\omega t}$ in modo che E e H sono reali.

La sezione di diffrazione si determina come rapporto tra intensità della radiazione diffratta e densità del flusso di energia nell'onda incidente ($cE^2/4\pi$; le lettere senza indice si riferiscono al campo dell'onda incidente). Si distinguono due casi di polarizzazione dell onda incidente:

a) il vettore E nell'onda incidente è perpendicolare al piano d'incidenza (al piano xz), cioè parallelo al piano dello schermo (al piano xy). La somma dei campi delle onde incidente e riflessa in prossimità della superficie dello schermo è

$$E_0 = 0, \quad H_{0x} = 2H \cos\alpha = 2E \cos\alpha$$

(α è l'angolo d'incidenza). D qui

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \cos^2\alpha\,(1 - \operatorname{sen}^2\vartheta \cos^2\varphi)\, do$$

Qui ϑ è l angolo fra direzione della diffrazione **n** e normale allo schermo (asse z) e φ l'azimut del vettore **n** rispetto al piano di incidenza. La sezione totale è

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{26\pi c^4} \cos^2\alpha.$$

b) Il vettore E si trova nel piano d'incidenza. Allora

$$E_0 = E_{0z} = -2E \operatorname{sen}\alpha, \quad H_0 = H_{0y} = 2H = 2E.$$

La sezione differenziale è

$$d\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \left\{\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta \left(\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha\right) - \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\alpha \cos\varphi\right\} do,$$

la sezione totale

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\alpha\right).$$

Per la luce naturale abbiamo

$$\sigma = \frac{64a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 - \frac{3}{8}\operatorname{sen}^2\alpha\right).$$

Capitolo XI

ONDE ELETTROMAGNETICHE NEI MEZZI ANISOTROPI

§ 96. *Permettività dielettrica dei cristalli*

Le proprietà di un mezzo anisotropo nei confronti delle onde elettromagnetiche sono determinate dai tensori $\varepsilon_{ik}(\omega)$ e $\mu_{ik}(\omega)$ che stabiliscono un legame fra induzione e intensità in base alle formule [1]

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega) E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega) H_k. \tag{96,1}$$

Più avanti, per fissare le idee, tratterremo il campo elettrico e il tensore ε_{ik}; tutti i risultati ottenuti saranno validi anche per il tensore μ_{ik}.

Per $\omega \to 0$ le grandezze ε_{ik} assumono loro valori statici per i quali nel § 13 è stata dimostrata la simmetria rispetto agli indici i, k. Questa dimostrazione ha avuto carattere meramente termodinamico e perciò si riferiva ai soli stati in equilibrio termodinamico. In un campo variabile, invece, lo stato della sostanza, ovviamente, è privo di equilibrio, e, quindi, la dimostrazione suindicata è inapplicabile. Per precisare le proprietà del tensore ε_{ik} bisogna ora ricorrere al principio di simmetria generalizzato dei coefficienti cinetici (cfr. V § 125).

Ricordiamo che le suscettività generalizzate $\alpha_{ab}(\omega)$ che figurano nella formulazione di questo principio si determinano in base alla risposta del sistema a una perturbazione della forma

$$\hat{V} = -\hat{x}_a f_a(t)$$

(ove x_a è una serie di grandezze che caratterizzano il sistema) e rappresentano coefficienti nel legame lineare fra le componenti di Fourier delle medie $\bar{x}_a(t)$ e delle forze generalizzate $f_a(t)$:

$$\bar{x}_{a\omega} = \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega}.$$

La variazione dell'energia del sistema con il tempo sotto influsso della perturbazione si esprime mediante la formula

$$\dot{\mathcal{U}} = -\dot{f}_a \bar{x}_a.$$

[1] È da ricordare che tutte le grandezze si riferiscono al campo variabile nell'onda. L'esistenza possibile dell'induzione costante (nel cristallo piroelettrico o ferromagnetico) non ha niente a che vedere con le questioni qui trattate.

Secondo il principio di simmetria

$$\alpha_{ab}(\omega) = \alpha_{ba}(\omega),$$

se il sistema non si trova nel campo magnetico esterno e non gode della struttura magnetica; in caso contrario, si deve considerare $\alpha_{ba}(\omega)$ per un sistema « invertito nel tempo ».

È facile legare le componenti del tensore $\varepsilon_{ik}(\omega)$ con le suscettività generalizzate. A tale scopo osserviamo che la velocità di variazione dell'energia di un corpo dielettrico nel campo elettrico variabile è data dall'integrale

$$\int \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dV. \tag{96,2}$$

Dal confronto con le formule scritte precedentemente si vede che intendendo con le grandezze $\bar{x}_a$ i valori delle componenti del vettore **E** in ciascun punto del corpo le rispettive grandezze f_a saranno le componenti di **D** (fra l'altro, l'indice a descrive una serie continua di valori enumerando sia le componenti dei vettori sia i punti del corpo). Da coefficienti α_{ab} fungeranno le componenti del tensore ε_{ik}^{-1}, ma tutte le proprietà simmetriche dei tensori inverso e diretto, ovviamente, coincidono. Poiché nell'integrale (96,2) si moltiplicano i valori di **E** e **D** nei soli punti identici del corpo, la permutazione degli indici a e b si riduce difatti alla sola permutazione degli indici tensoriali. In tal modo concludiamo che il tensore ε_{ik} è simmetrico [1]:

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ki}(\omega). \tag{96,3}$$

Osserviamo che le componenti del tensore di polarizzabilità di un corpo come tutt'uno sono definite anch'esse come suscettività generalizzate, vale a dire i coefficienti nelle uguaglianze

$$\mathcal{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k.$$

Infatti, la variazione dell'energia del corpo portato in un campo esterno variabile $\mathfrak{E}$ è data dalla formula

$$-\mathcal{P}\frac{d\mathfrak{E}}{dt}. \tag{96,4}$$

Ne risulta che se da grandezze x_a fungono le tre componenti del vettore $\mathcal{P}$, allora da grandezze corrispondenti f_a fungeranno le componenti del vettore $\mathfrak{E}$ in modo che i coefficienti α_{ab} coincidono con $V\alpha_{ik}$.

Alcune formule dedotte prima per il mezzo isotropo si generalizzano immediatamente per il caso anisotropo. Ripetendo la dedu-

[1]) Le proprietà del tensore ε_{ik} nel caso dell'esistenza del campo elettromagnetico esterno saranno studiate nel § 101.

zione fatta nel § 80 troviamo che la dissipazione dell'energia nel campo elettromagnetico monocromatico è data dalla formula

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} \{(\varepsilon^*_{ik} - \varepsilon_{ki}) E_i E^*_k + (\mu^*_{ik} - \mu_{ki}) H_i H^*_k\}, \qquad (96,5)$$

analoga alla formula (80,5). La condizione di mancanza dell'assorbimento consiste nell'uguaglianza $\varepsilon^*_{ik} = \varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$, vale a dire che sono reali tutte le grandezze ε_{ik} (e lo stesso per le μ_{ik}).

Se non esiste assorbimento si può determinare, come abbiamo fatto nel § 80, l'energia elettromagnetica interna per l'unità di volume del corpo. Nel caso del mezzo anisotropo essa è data dalla formula

$$\overline{U} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{d}{d\omega} (\omega\varepsilon_{ik}) E_i E^*_k + \frac{d}{d\omega} (\omega\mu_{ik}) H_i H^*_k \right\} \qquad (96,6)$$

analoga all'(80, 11).

Nel § 87 è stata introdotta la nozione di impedenza superficiale ζ mediante la quale si possono formulare le condizioni di frontiera sulla superficie metallica anche in casi in cui la nozione di permettività dielettrica non ha senso. Sulla superficie di un corpo anisotropo la condizione di frontiera analoga alla (87,6) deve essere scritta nella forma

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta} [\mathbf{Hn}]_\beta, \qquad (96,7)$$

ove $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ è un tensore bidimensionale sulla superficie del corpo. Si deve tener conto che valori di questo tensore, in generale, dipendono anche dalla direzione cristallografica della faccia cristallina.

Il flusso dell'energia che penetra all'interno del corpo è

$$\frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]\, \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} [\mathbf{Hn}] \equiv \frac{c}{4\pi} E_\alpha [\mathbf{Hn}]_\alpha$$

(qui **E** e **H** sono reali). Ne risulta che se in accordo con il principio di simmetria con x_a vanno intese le componenti E_α, allora saranno le grandezze $-[\mathbf{Hn}]_\alpha$ a corrispondere alle $\dot{f}_a$, cioè (tornando alla rappresentazione complessa) da grandezze f_a fungeranno le $-(i/\omega)[\mathbf{Hn}]_\alpha$. Perciò i coefficienti α_{ab} coincidono, a meno di un fattore, con le componenti $\zeta_{\alpha\beta}$ e così concludiamo che

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \qquad (96,8)$$

(in assenza di campo magnetico esterno).

Problema

Esprimere le componenti del tensore $\zeta_{\alpha\beta}$ in funzione delle componenti del tensore $\eta_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-1}{}_{\alpha\beta}$ (supponendo che quest'ultimo esista); il corpo non è magnetico ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

Soluzione. Nel caso anisotropo l'uguaglianza $\zeta^2 = 1/\varepsilon$ (87,2) va sostituita con la seguente:

$$\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Nelle componenti

$$\zeta_{11}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{11}, \quad \zeta_{22}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{22},$$
$$\zeta_{12}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{12}, \quad \zeta_{21}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{21}.$$

Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$\zeta_{12} = \eta_{12}/\xi, \quad \zeta_{21} = \eta_{21}/\xi,$$
$$\zeta_{11} = \frac{1}{\xi}\left[\eta_{11} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}\right], \quad \zeta_{22} = \frac{1}{\xi}\left[\eta_{22} \pm \sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}\right]$$
$$(\xi^2 = \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2\sqrt{\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}}).$$

I segni sono determinati dalla condizione di positività dell'assorbimento dell'energia. Non ammettiamo possibile l'uguaglianza $\zeta_{12} = \zeta_{21}$ e con ciò supponiamo anche l'applicabilità al caso di esistenza del campo magnetico esterno.

§ 97. *Onda piana in un mezzo anisotropo*

Nello studio dell'ottica dei corpi anisotropi, ossia dei cristalli, ci limitiamo al caso più importante quando il mezzo si può supporre (in un dato dominio di frequenze) non magnetico e trasparente. Ciò premesso, il legame tra intensità e induzioni dei campi elettrico e magnetico è dato dalle uguaglianze

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \tag{97,1}$$

ove tutte le componenti del tensore dielettrico ε_{ik} sono reali e i suoi valori principali positivi.

Le equazioni di Maxwell per campo dell'onda monocromatica sono

$$i\omega\mathbf{H} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \quad i\omega\mathbf{D} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}. \tag{97,2}$$

Tutte le grandezze dell'onda piana propagantesi in mezzo trasparente sono proporzionali a $e^{i\mathbf{kr}}$ con vettore d'onda $\mathbf{k}$ reale. Derivando rispetto alle coordinate abbiamo

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{H} = [\mathbf{kE}], \quad \frac{\omega}{c}\mathbf{D} = -[\mathbf{kH}]. \tag{97,3}$$

Di qui si vede soprattutto che tre vettori $\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ sono mutuamente perpendicolari. Inoltre, il vettore $\mathbf{H}$ è perpendicolare a $\mathbf{E}$. Poiché il vettore $\mathbf{H}$ è contemporaneamente perpendicolare ai tre vettori $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{k}$, quest'ultimi giacciono nel medesimo piano. La fig. 51 illustra la disposizione reciproca di questi vettori. Rispetto alla direzione del vettore d'onda sono trasversali $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ ma non $\mathbf{E}$. Nella fig. 51 è indicata anche la direzione del flusso d'energia $\mathbf{S}$ nell'onda determinata dal prodotto $[\mathbf{EH}]$, cioè perpendicolarmente a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$. A differenza dell'onda nel mezzo isotropo qui la direzione del flusso dell'energia non coincide con quella del vettore d'onda. Il vettore $\mathbf{S}$, evidentemente, è co-

planare ai vettori **E**, **D**, **k** e costituisce con il vettore **k** un angolo uguale a quello fra **E** e **D**.

Separiamo nel valore assoluto del vettore **k** il fattore ω/c e scriviamo

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}. \tag{97,4}$$

Il valore assoluto del vettore **n** così definito dipende nel mezzo anisotropo dalla sua direzione mentre nel mezzo isotropo $n = \sqrt{\varepsilon}$ dipende unicamente dalla frequenza [1]). Mediante la notazione (97,4) le formule fondamentali (97,3) si riscrivono così:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{nE}], \quad \mathbf{D} = -[\mathbf{nH}]. \tag{97,5}$$

Scriviamo anche l'espressione per il vettore del flusso dell'energia nell'onda piana:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] = \frac{c}{4\pi}\{\mathbf{n}E^2 - \mathbf{E}(\mathbf{En})\} \tag{97,6}$$

(**E** e **H** in questa formula sono reali).

Finora non abbiamo usato ancora la relazione (97,1) contenente costanti materiali ε_{ik}. L'uso comune di questa relazione e dell'equazioni (97,5) consente di determinare la dipendenza $\omega(\mathbf{k})$.

Sostituendo la prima formula (97,5) nella seconda abbiamo

$$\mathbf{D} = [\mathbf{n}[\mathbf{En}]] = n^2\mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{nE}). \tag{97,7}$$

Se le componenti di questo vettore vanno uguagliate alle espressioni $\varepsilon_{ik}E_k$ secondo la (97,1), si ottengono tre equazioni lineari uniformi per le tre componenti del vettore **E**:

$$n^2E_i - n_in_kE_k = \varepsilon_{ik}E_k$$

ossia

$$(n^2\delta_{ik} - n_in_k - \varepsilon_{ik})E_k = 0. \tag{97,8}$$

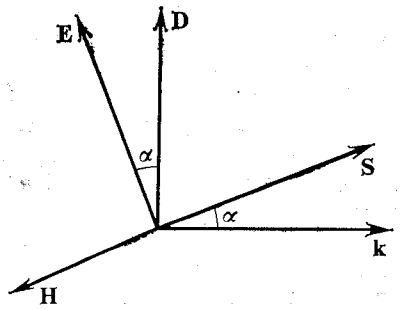


Fig. 51

La condizione di compatibilità di queste equazioni richiede che sia nullo il determinante composto dai loro coefficienti

$$\det|n^2\delta_{ik} - n_in_k - \varepsilon_{ik}| = 0. \tag{97,9}$$

È comodo calcolare questo determinante usando invece degli assi coordinati cartesiani x, y, z gli assi principali del tensore ε_{ik} (che si

[1]) Anche qui con grandezza n si intende l'indice di rifrazione benché questa grandezza non abbia relazione così semplice con la legge di rifrazione come nei corpi isotropi.

chiamano in questo proposito *assi dielettrici principali*). Indichiamo con $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$ i valori principali del tensore. Un calcolo semplice conduce alla seguente equazione

$$n^2(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)-[n_x^2\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})+n_y^2\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})+ \\ +n_z^2\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})]+\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}=0. \qquad (97,10)$$

È da notrare che i termini superiori (della sesta potenza rispetto a n_i) essendo sviluppati si elidono reciprocamente; questa circostanza, ovviamente non è casuale e dovuta in fin dei conti al fatto che l'onda gode di sole due e non tre direzioni indipendenti di polarizzazione.

L'equazione (97,10), detta *equazione di Fresnel*, è una delle equazioni fondamentali dell'ottica dei cristalli[1]). Essa determina in forma implicita la legge della dispersione, cioè la dipendenza fra frequenza e vettore d'onda (da funzioni della frequenza fungono i valori principali $\varepsilon^{(i)}$ e in alcuni casi, cfr. il § 99, anche le direzioni degli assi principali del tensore ε_{ik}). Di solito, nello studio delle onde monocromatiche la frequenza e con essa anche tutti i valori principali $\varepsilon^{(i)}$ sono grandezze costanti date, perciò l'equazione (97,10) determina il valore assoluto del vettore d'onda in base alla sua direzione. Per direzione **n** data l'equazione (97,10) è quadratica per tutti gli n^2 a coefficienti reali. Quandi, a ciascuna direzione **n** corrispondono nel caso generale due valori assoluti distinti del vettore d'onda.

L'equazione (97,10) (a coefficienti costanti $\varepsilon^{(i)}$) determina in coordinate n_x, n_y, n_z una superficie che si chiama *superficie dei vettori d'onda* [2]). Nel caso generale essa è una superficie del quarto ordine; la studieremo in dettaglio nei prossimi paragrafi. Qui ne diamo alcune proprietà generali importanti.

Introduciamo preliminarmente ancora una grandezza che caratterizza la luce propagantesi nel mezzo anisotropo. La direzione dei raggi luminosi (nell'ottica geometrica) è determinata dal vettore della velocità di gruppo $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Nel mezzo isotropo la sua direzione sempre coincide con quella del vettore d'onda, ma nel mezzo anisotropo le cose in generale non stanno così. Per caratterizzare i raggi introduciamo il vetore **s** la cui direzione coincide con la velocità di gruppo e in valore assoluto è definito dall'uguaglianza

$$\mathbf{ns}=1. \qquad (97\ 11)$$

[1]) Le basi dell'ottica dei cristalli sono state fondate da *A. Fresnel* verso il 1820 partendo da analogie meccaniche e molto prima della costruzione della teoria elettromagnetica.

[2]) Nella letteratura si usa un'altra costruzione, ossia la *superficie delle normali* (o la *superficie degli indici*) che si ottiene ponendo lungo ciascuna direzione un intervallo chiuso $1/n$ (al posto di n), ma questa operazione è meno comoda.

Esso si chiama *vettore radiale*. Il significato di questa grandezza si può precisare nel seguente modo.

Consideriamo un fascio di raggi (di frequenza uguale) che si propagano in tutte le direzioni uscendo da un centro. Il valore dell'iconale ψ (coincidente con la fase dell'onda a meno del fattore ω/c, cfr. § 85) è dato in ogni punto del raggio dall'integrale $\int \mathbf{n}\, d\mathbf{l}$ calcolato lungo il raggio. Introducendo il vettore $\mathbf{s}$ che determina la direzione del raggio, scriviamo

$$\psi = \int \mathbf{n}\, d\mathbf{l} = \int \frac{\mathbf{ns}}{s}\, dl = \int \frac{dl}{s}. \qquad (97,12)$$

In un mezzo omogeneo il valore di s è costante lungo il raggio in modo che $\psi = L/s$, ove L è la lunghezza di un segmento del raggio. Ne deriva quanto segue: se lungo ogni raggio uscente dal centro del fascio divergente poniamo un segmento uguale (o proporzionale) a s, otteniamo una superficie in tutti i punti della quale i raggi hanno la stessa fase. Questa superficie si dice *radiale*.

La superficie dei vettori d'onda e la superficie radiale così introdotte si trovano in una relazione reciproca. Scriviamo convenzionalmente l'equazione esprimente le superficie dei vettori d'onda nella forma $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Allora la velocità di gruppo

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial f}{\partial\mathbf{k}} \Big/ \frac{\partial f}{\partial\omega}, \qquad (97,13)$$

cioè proporzionale al vettore $\partial f/\partial\mathbf{k}$ o, che è lo stesso (poiché la derivata si calcola per ω costante), al vettore $\partial f/\partial\mathbf{n}$. Di conseguenza, gli è proporzionale anche il vettore radiale. Ma il vettore $\partial f/\partial\mathbf{n}$ è diretto lungo la normale alla superficie $f = 0$.

Concludiamo quindi che la direzione del vettore radiale dell'onda con $\mathbf{n}$ dato è determinata dalla normale in un punto corrispondente della superficie dei vettori d'onda.

Si vede facilmente che l'inverso è vero anch'esso: le normali alla superficie radiale determinano le direzioni dei vettori d'onda corrispondenti. Infatti, la perpendicolarità di $\mathbf{s}$ alla superficie dei vettori d'onda è espressa mediante la relazione

$$\mathbf{s}\ \delta\mathbf{n} = 0,$$

ove $\delta\mathbf{n}$ qualsiasi variazione infinitesima di $\mathbf{n}$ (per ω dato), cioè il vettore di spostamento infinitesimo sulla superficie. Ma derivando (sempre per ω dato) l'uguaglianza $\mathbf{ns} = 1$, otteniamo $\mathbf{n}\,\delta\mathbf{s} + \mathbf{s}\,\delta\mathbf{n} = 0$ da cui risulta che anche

$$\mathbf{n}\ \delta\mathbf{s} = 0,$$

ciò che dimostra l'affermazione fatta.

La relazione descritta tra le superficie $\mathbf{n}$ e $\mathbf{s}$ può essere ancora precisata. Siano $\mathbf{n}_0$ il raggio vettore di un punto qualsiasi della superficie dei vettori d'onda e $\mathbf{s}_0$ il suo vettore radiale corrispondente; scriviamo un'equazione (in coordinate n_x, n_y, n_z) esprimente la tangente in questo punto del piano. Questa è

$$\mathbf{s}_0 (\mathbf{n} - \mathbf{n}_0) = 0$$

ed espime la perpendicolarità di $\mathbf{s}_0$ a qualsiasi vettore $\mathbf{n} - \mathbf{n}_0$ giacente nel piano in questione. Poiché $\mathbf{s}_0$ e $\mathbf{n}_0$ sono legati dalla relazione $\mathbf{s}_0\mathbf{n}_0 = 1$, questa equazione si può scrivere nella forma

$$\mathbf{s}_0\mathbf{n} = 1. \qquad (97,14)$$

Ne risulta che $1/s_0$ è la lunghezza della perpendicolare tracciata dall'origine delle coordinate al piano tangente alla superficie dei vettori d'onda nel punto $\mathbf{n}_0$.

Contrariamente, se per un punto $\mathbf{s}_0$ della superficie radiale è costruito un piano tangente, la lunghezza della perpendicolare tracciata dall'origine delle coordinate a questo piano vale $1/n_0$.

Vediamo quale è la disposizione del vettore radiale rispetto ai vettori intensità del campo nell'onda. A tale scopo osserviamo che la direzione della velocità di gruppo coincide con quella del vettore medio (rispetto al tempo) del flusso di energia. Consideriamo infatti il pacchetto d'onda sito in piccolo tratto dello spazio. Allo spostarsi del pacchetto l'energia in esso contenuta si sposta con il pacchetto stesso, e ciò significa che la direzione del suo flusso coincide con quella del pacchetto d'onda, cioè della velocità di gruppo. La coincidenza fra direzione della velocità di gruppo e del vettore di Poynting si può dimostrare anche immediatamente partendo dalle formule (97,5). Derivando queste formule (per ω dato) abbiamo

$$\delta\mathbf{D} = [\delta\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}] + [\mathbf{H}\ \delta\mathbf{n}], \quad \delta\mathbf{H} = [\mathbf{n}\ \delta\mathbf{E}] + [\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}]. \qquad (97,15)$$

Moltiplicando scalarmente la prima uguaglianza per $\mathbf{E}$ e la seconda per $\mathbf{H}$ e tenendo conto delle (97,5), otteniamo

$$\mathbf{E}\,\delta\mathbf{D} = \mathbf{H}\,\delta\mathbf{H} + [\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}, \quad \mathbf{H}\,\delta\mathbf{H} = \mathbf{D}\,\delta\mathbf{E} + [\mathbf{EH}]\delta\mathbf{n}.$$

Ma $\mathbf{D}\,\delta\mathbf{E} = \varepsilon_{ik}E_k\delta E_i = \mathbf{E}\,\delta\mathbf{D}$; perciò, sommando ambedue le uguaglianze, otteniamo

$$[\mathbf{EH}]\,\delta\mathbf{n} = 0, \qquad (97,16)$$

vale a dire che il vettore $[\mathbf{EH}]$ è normale alla superficie dei vettori d'onda, come dovevasi dimostrare [1]).

[1]) Il risultato così ottenuto si riferisce al valore istantaneo (e non soltanto medio) del flusso dell'energia. Tuttavia, per la siffatta dimostrazione è stata usata principalmente la simmetria del tensore ε_{ik}. Perciò sotto questa forma il risultato ottenuto non sarà valido per mezzi con ε_{ik} asimmetrico (mezzi girotropi; cfr. il § 101). Quanto all'affermazione per il valore medio del vettore di Poynting, essa sarà vera anche per quest'ultimo caso (problema 1 del § 101).

Poiché il vettore di Poynting è perpendicolare e **H** e **E**, ora concludiamo che lo stesso si dice anche del vettore **s**:

$$\mathbf{sH} = 0, \quad \mathbf{sE} = 0. \tag{97,17}$$

Calcolo diretto mediante le formule (97,5), (97,11) e (97,17) conduce alle relazioni

$$\mathbf{H} = [\mathbf{sD}], \quad \mathbf{E} = -(\mathbf{sH}]. \tag{97,18}$$

Così,

$$[\mathbf{sH}] = [\mathbf{s}\,[\mathbf{nE}]] = \mathbf{n}\,(\mathbf{sE}) - \mathbf{E}\,(\mathbf{ns}) = -\mathbf{E}.$$

Dal confronto tra le formule (97,18) e (97,5) si vede che esse si ottengono le une dalle altre mediante le sostituzioni

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \leftrightarrow \mathbf{s}, \quad \varepsilon_{ik} \leftrightarrow \varepsilon_{ik}^{-1} \tag{97,19}$$

(fra l'altro, non si viola, ovviamente, la relazione $\mathbf{ns} = 1$). L'ultima di queste sostituzioni deve essere eseguita perché non sia violata la relazione (97,1) fra **D** e **E**. Quindi, si può enunciare la seguente regola utile per vari calcoli: se esiste un'equazione verificabile per una serie delle grandezze summenzionate, le sostituzioni (97,19) conducono a un'equazione analoga che si verifica per l'altra serie di queste grandezze.

In particolare, applicando questa regola all'equazione (97,10), otteniamo immediatamente un'equazione analoga per il vettore **s**:

$$s^2\,(\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}s_x^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(z)}s_y^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}s_z^2) -$$
$$-[s_x^2\,(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}) + s_y^2\,(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}) + s_z^2\,(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)})] + 1 = 0. \tag{97,20}$$

Questa equazione determina la forma della superficie radiale. Questa superficie, così come quella dei vettori d'onda, è del quarto ordine. Per una data direzione **s** la formula (97,20) dà un'equazione quadratica per s^2 avente nel caso generale due radici reali distinte. In tal modo, lungo ciascuna direzione nel cristallo si possono propagare due raggi con vettori d'onda diversi.

Passiamo alla questione della polarizzazione di onde che si propagano nel mezzo anisotropo. A tale scopo non sono comode le equazioni (97,8) dalle quali è stata ricavata l'equazione di Fresnel, in quanto in esse figura l'intensità **E** mentre trasversale nell'onda (rispetto a **n** data) è l'induzione **D**. Per tener conto fin dall'inizio della trasversalità del vettore **D** consideriamo per il momento un sistema di coordinate uno degli assi del quale coincide con la direzione del vettore d'onda. Due assi trasversali denoteremo con indici greci che assumono i valori 1, 2. Le componenti trasversali dell'uguaglianza (97,7) danno $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; sostituendovi $E_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1} D_\beta$ (ove $\varepsilon_{\alpha\beta}^{-1}$ è una componente del tensore inverso a $\varepsilon_{\alpha\beta}$), otteniamo

$$(n^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^{-1})\,D_\beta = 0. \tag{97,21}$$

La condizione di compatibilità di queste due ($\alpha = 1, 2$) equazioni con due incognite D_1, D_2 consiste nell'uguaglianza a zero del loro determinante

$$\det|n^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}| = 0. \qquad (97,22)$$

Ovviamente, questa condizione coincide con l'equazione di Fresnel scritta nel sistema di coordinate x, y, z iniziale. Ora vediamo, tuttavia, che corrispondenti a due valori n i vettori **D** sono diretti lungo gli assi principali del tensore simmetrico bidimensionale del secondo ordine $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$. Ne segue in accordo con teoremi generali che questi due vettori sono mutuamente perpendicolari. In tal modo, in due onde con medesima direzione del vettore d'onda i vettori di induzione elettrica sono polarizzati linearmente in due piani mutuamente perpendicolari.

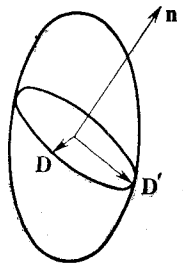


Fig. 52

Le equazioni (97,21) ammettono un'interpretazione geometrica semplice. Costruiamo nel sistema delle coordinate x, y, z (ritorniamo così agli assi dielettrici principali) un ellissoide tensoriale corrispondente al tensore ε^{-1}_{ik}, in altre parole costruiamo la superficie

$$\varepsilon^{-1}_{ik} x_i x_k = \frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} = 1 \qquad (97,23)$$

(fig. 52). Facciamo intersecare l'ellissoide con un piano passante per il suo centro e perpendicolare alla direzione data **n**. La figura dell'intersezione nel caso generale sarà un'ellisse; le lunghezze dei suoi assi principali determinano valori n e le loro direzioni danno le direzioni corrispondenti di oscillazioni (vettori **D**).

È evidente da questa costruzione (nel caso generale di $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(y)}$, $\varepsilon^{(z)}$ diverse) che se il vettore d'onda è diretto, ad esempio, lungo l'asse x, allora gli assi y e z saranno direzioni della polarizzazione **D**. Se, invece, il vettore **n** giace in uno dei piani coordinati, per esempio, nel piano xy, allora una delle direzioni della polarizzazione giace anch'essa nel piano xy e l'altra è perpendicolare.

Di proprietà analoghe godono le polarizzazioni di due onde a direzione medesima del vettore radiale. Qui, al posto delle direzioni dell'induzione **D**, si devono considerare le direzioni del vettore **s** trasversale rispetto al vettore **E**, fra l'altro, al posto delle equazioni (97,21) avremo le equazioni analoghe

$$(s^{-2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}) E_\beta = 0. \qquad (97,24)$$

In questo caso la costruzione geometrica si realizza mediante l'ellissoide tensoriale

$$\varepsilon_{ik} x_i x_k = \varepsilon^{(x)} x^2 + \varepsilon^{(y)} y^2 + \varepsilon^{(z)} z^2 = 1, \qquad (97,25)$$

corrispondente al tensore diretto ε_{ik} (*ellissoide di Fresnel*).

Si deve sottolineare che le onde piane propagantisi nel mezzo anisotropo risultano di essere linearmente polarizzate in determinati piani. Sotto questo aspetto le proprietà ottiche dei mezzi anisotropi differiscono notevolmente dalle proprietà dei mezzi isotropi. Un'onda piana propagantesi nel mezzo isotropo sarà polarizzata, in generale, ellitticamente e soltanto in casi particolari la polarizzazione ellittica si riduce a quella lineare. Questa distinzione essenziale è dovuta al fatto che il caso dell'isotropia totale di un mezzo è in un certo senso degenere: a due direzioni della polarizzazione corrisponde qui lo stesso vettore d'onda al posto di due vettori d'onda distinti (con medesima direzione) nel caso generale del mezzo anisotropo; propagandosi con lo stesso valore **n** due onde polarizzate linearmente si sommano in una polarizzata ellitticamente.

Problema

Esprimere le componenti del vettore radiale **s** in funzione delle componenti di **n** negli assi dielettrici principali.

Soluzione. Derivando rispetto a n_i il primo membro dell'equazione $f(\mathbf{n}) = 0$ (97,10) e determinando in seguito il coefficiente di proporzionalità fra s_i e $\partial f/\partial n_i$, dalla condizione $\mathbf{ns} = 1$ ricaviamo le seguenti formule esprimenti il legame fra i vettori **s** e **n**:

$$\frac{s_x}{n_x} = \frac{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}\right) - 2\varepsilon^{(x)}n_x^2 - \left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}\right)n_y^2 - \left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}\right)n_z^2}{2\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} - n_x^2\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}\right) - n_y^2\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}\right) - n_z^2\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}\right)}$$

e analogamente per s_y, s_z.

§ 98. *Proprietà ottiche dei cristalli iniassici*

Le proprietà ottiche d'un cristallo dipendono principalmente dalla simmetria del suo tensore dielettrico ε_{ik}. Sotto questo aspetto tutti i cristalli si dividono in tre categorie: cubici, uniassici e biassici (cfr. § 13).

In un cristallo del sistema cubico $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$, vale a dire che le direzioni degli assi principali sono completamente arbitrarie, mentre i tre valori principali del tensore sono coincidenti. Perciò i cristalli cubici per loro proprietà ottiche non differiscono in generale dai corpi isotropi.

Sono uniassici i cristalli dei sistemi romboedrico, tetragonale e esagonale. Uno degli assi principali del tensore ε_{ik} coincide qui con l'asse di simmetria del terzo, quarto o sesto ordine, rispettivamente; questo asse si chiama *asse ottico* del cristallo (con questo asse intenderemo più avanti l'asse z e il valore principale corrispondente di ε_{ik} indicheremo con $\varepsilon_{\parallel}$). Le direzioni degli altri due assi principali (nel piano perpendicolare all'asse ottico) sono arbitrarie e i valori principali corrispondenti del tensore dielettrico coincidono (sono indicati più avanti con $\varepsilon_{\perp}$).

Se nell'equazione di Fresnel (97,10) poniamo $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(y)} = \varepsilon_\perp$ e $\varepsilon^{(z)} = \varepsilon_\parallel$, l'espressione al suo primo membro si scinde in due fattori quadratici:

$$(n^2 - \varepsilon_\perp)\,[\varepsilon_\parallel n_z^2 + \varepsilon_\perp (n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel] = 0.$$

In altre parole, l'equazione del quarto ordine si scinde in due equazioni del secondo ordine:

$$n^2 = \varepsilon_\perp, \tag{98,1}$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{n_x^2 + n_y^2}{\varepsilon_\parallel} = 1. \tag{98,2}$$

Ciò significa geometricamente che la superficie dei vettori d'onda (che, in generale, è una superficie del quarto ordine) si divide in due superficie separate: sfera ed ellissoide. Nella fig. 53 è rappresen-

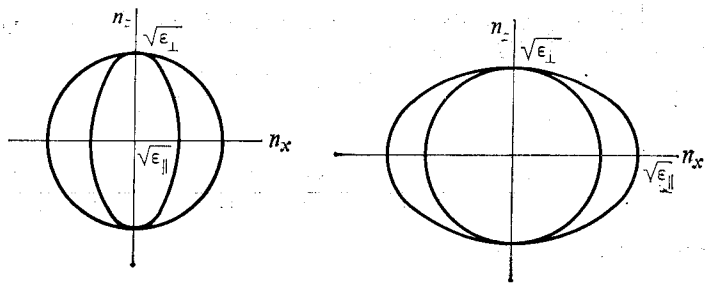


Fig. 53

tato il taglio longitudinale di queste superficie. Qui sono possibili due casi: se $\varepsilon_\perp > \varepsilon_\parallel$, allora la sfera si trova al di fuori dell'ellissoide; se $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$, si trova nel suo interno (nel primo caso il cristallo uniassico si dice *negativo*, nel secondo caso *positivo*; fig. 53). Ambedue le superficie sono tangenti in due punti, ossia in poli opposti giacenti sull'asse n_z. In altre parole, alla direzione dell'asse ottico corrisponde un solo valore del vettore d'onda.

Di forma analoga gode la superficie radiale. Secondo la regola (97,19) la sua equazione si ricava dalle (98,1-2) sotto la forma

$$s^2 = 1/\varepsilon_\perp, \tag{98,3}$$

$$\varepsilon_\perp s_z^2 + \varepsilon_\parallel (s_x^2 + s_y^2) = 1. \tag{98,4}$$

Nel cristallo positivo l'ellissoide è delimitato dalla sfera, e nel cristallo negativo viceversa.

Vediamo così che nel cristallo uniassico si possono propagare onde di due tipi. Nei confronti di un tipo di tali onde (dette onde *ordinarie*) il cristallo si comporta come corpo isotropo con l'indice

di rifrazione $n = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. Il valore assoluto del vettore d'onda è uguale a $\omega n/c$ a prescindere dalla sua direzione, mentre la direzione del vettore radiale coincide con quella **n**.

Nelle onde del secondo tipo (onde *straordinarie*) la grandezza del vettore d'onda dipende dall'angolo di sua inclinazione θ verso l'asse ottico. In accordo con la formula (98,2) si ha

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp}. \tag{98,5}$$

Quanto al vettore radiale delle onde straordinarie, la sua direzione non coincide con quella del vettore d'onda, ma appartiene allo stesso piano passante per l'asse ottico (questo piano si chiama *sezione principale* appartenente a **n** dato). Supponiamo che questo piano coincida con il piano xz; derivando il primo membro dell'uguaglianza (98,2) rispetto a n_z e n_x e considerando il rapporto tra queste derivate troviamo la direzione del vettore radiale

$$\frac{s_x}{s_z} = \frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z}.$$

In altre parole, l'angolo θ' formato dal vettore radiale e l'asse ottico è legato all'angolo θ dalla semplice relazione

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta. \tag{98,6}$$

Le direzioni **n** e **s** coincidono per le sole onde propagantisi lungo l'asse ottico e perpendicolarmente a quest'ultimo.

La questione della direzione delle onde ordinaria e straordinaria si risolve molto semplicemente. A tale scopo è sufficiente osservare che i quattro vettori **E**, **D**, **s**, **n** in ogni onda sono coplanari. Nell'onda straordinaria le direzioni **s** e **n** non coincidono ma appartengono alla stessa sezione principale. Perciò questa onda è polarizzata in modo tale che i vettori **E** e **D** giacciano nella stessa sezione. D'altra parte, i vettori **D** nelle onde ordinaria e straordinaria con la stessa direzione **n** (o i vettori **E** per le direzioni uguali **s**) sono mutuamente perpendicolari. Perciò la polarizzazione dell'onda ordinaria è tale che **E** e **D** giacciano nel piano perpendicolare alla sezione principale.

Fanno eccezione le sole onde che si propagano lungo l'asse ottico. In questa direzione la distinzione tra onde ordinarie e straordinarie scompare e le loro polarizzazioni si sommano rispettivamente generando nel caso generale un'onda polarizzata ellitticamente.

Il fenomeno di rifrazione dell'onda piana incidente sulla superficie di un cristallo differisce notevolmente dalla rifrazione sulla frontiera di due mezzi isotropi. La legge di rifrazione (e della riflessione) anche qui si ottiene dalla condizione di continuità della tangente al piano di separazione della componente $\mathbf{n}_t$ del vettore

d'onda. Perciò il vettore d'onda dell'onda rifratta (e di quella riflessa) giace nel piano di incidenza. In questo caso, tuttavia, nei cristalli compaiono contemporaneamente due onde rifratte distinte (*birifrangenza*) rispettivamente a due valori possibili della componente normale n_n, dati dall'equazione di Fresnel per $\mathbf{n}_t$ assegnato. Inoltre, è necessario ricordare che la direzione di propagazione dei raggi osservabile è determinata non dal vettore d'onda, ma dal vettore radiale **s**; essa differisce dalla direzione **n** e nel caso generale giace all'esterno del piano di incidenza.

Per rifrazione nel cristallo uniassico compaiono onde rifratte ordinaria e straordinaria. La prima è assolutamente analoga alle onde comuni rifratte nei corpi isotropi; in particolare, il suo vettore radiale (coincidente per direzione con il suo vettore d'onda) giace nel piano di incidenza. Quanto alla direzione del vettore radiale dell'onda straordinaria, essa giace in generale fuori del piano di incidenza.

Problemi

1. Trovare la direzione del raggio straordinario per rifrazione della luce (incidente dal vuoto) sulla superficie del cristallo uniassico, perpendicolare al suo asse ottico.

Soluzione. In questo caso il raggio rifratto resta nel piano di incidenza (con quale intendiamo il piano xz con l'asse z lungo la normale alla superficie). Per rifrazione si conserva la componente x del vettore d'onda $n_x = \operatorname{sen}\vartheta$ (ove ϑ è l'angolo di incidenza); la componente n_z per l'onda rifratta ricaviamo dall'espressione (98,2):

$$n_z = \left(\varepsilon_\perp - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{sen}^2\vartheta\right)^{1/2}.$$

La direzione del raggio rifratto (ϑ' è l'angolo di rifrazione) troviamo in accordo con la formula (98,6):

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}\operatorname{sen}\vartheta}{\sqrt{\varepsilon_\parallel(\varepsilon_\parallel - \operatorname{sen}^2\vartheta)}}.$$

2. Trovare la direzione del raggio straordinario per incidenza normale della luce sulla superficie del cristallo uniassico con asse ottico diretto in modo qualsiasi.

Soluzione. Il raggio rifratto giace nel piano xz passante per la normale alla superficie (asse z) e l'asse ottico; α è angolo tra l'asse ottico e la normale. Il vettore radiale (le cui componenti sono proporzionali alle derivate del primo membro dell'equazione (98,2) rispetto alle componenti corrispondenti di **n**) sarà proporzionale a

$$\mathbf{s} \backsim \frac{\mathbf{n}}{\varepsilon_\parallel} + (\mathbf{nl})\,\mathbf{l}\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel}\right),$$

ove **l** è il vettore unitario nella direzione dell'asse ottico. In questo caso il vettore d'onda **n** è diretto lungo l'asse z in modo che

$$s_x \backsim \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_\parallel}\right),\quad s_z \backsim \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}.$$

Di qui ricaviamo per l'angolo di rifrazione ϑ' la seguente espressione:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \operatorname{sen} 2\alpha}{\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp} + (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \cos 2\alpha}.$$

§ 99. *Cristalli biassici*

Nei cristalli biassici tutti e tre i valori principali del tensore ε_{ik} sono distinti. Tali sono cristalli dei sistemi triclino, monoclino e ortorombico. Nei cristalli del sistema triclino la posizione degli assi dielettrici principali non è legata a nessuna direzione cristallografica determinata; in particolare, essa varia con la frequenza variabile dalla quale dipendono tutte le componenti del tensore ε_{ik}. Nei cristalli del sistema monoclino è fissato cristallograficamente uno degli assi dielettrici principali (che coincide con l'asse di simmetria del secondo ordine o è perpendicolare al piano di simmetria); la posizione degli altri due assi principali dipende dalla frequenza. Infine, nei cristalli del sistema ortorombico è fissata la posizione di tutti e tre gli assi principali che devono coincidere con i tre mutuamente perpendicolari assi di simmetria del secondo ordine.

Lo studio delle proprietà ottiche dei cristalli biassici è legato con l'esame dell'equazione di Fresnel nella sua forma generale.

Per fissare le idee, nel seguito supporremo che

$$\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(y)} < \varepsilon^{(z)}. \tag{99,1}$$

Per precisare il carattere formale della superficie del quarto ordine definita dall'equazione (97,10) troviamo soprattutto la forma delle sue sezioni con i piani coordinati. Ponendo $n_z = 0$ nell'equazione, troviamo che il suo primo membro si divide in due fattori

$$(n^2 - \varepsilon^{(z)})\,(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 - \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}) = 0.$$

Ne risulta che il contorno della sezione nel piano xy consta di cerchio

$$n^2 = \varepsilon^{(z)} \tag{99,2}$$

e di ellisse

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon^{(x)}} = 1, \tag{99,3}$$

fra l'altro, in accordo con la condizione (99,1) l'ellisse si trova all'interno del cerchio. Analogamente troviamo che le sezioni prodotti dai piani yz e xz anch'essi sono un'ellisse ed un cerchio ma nel piano yz l'ellisse si trova all'esterno del cerchio e nel piano xz essi si intersecano reciprocamente. In tal modo, la superficie dei vettori d'onda è superficie autointersecantesi del tipo rappresentato nella fig. 54 (la superficie qui è data in un ottante).

Questa superficie ha quattro punti singolari, ossia quattro punti di autointersezione giacenti ciascuna in ogni quadrante del piano xz. I punti singolari della superficie data da un'equazione della forma $f(n_x, n_y, n_z) = 0$ sono definiti, come è noto, dall'uguaglianza a zero di tutte e tre le derivate prime della funzione f. Derivando l'espressione a primo membro dell'equazione (97,10), otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} &n_x[\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)})-\varepsilon^{(x)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0,\\ &n_y[\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)})-\varepsilon^{(y)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0,\\ &n_z[\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)})-\varepsilon^{(z)}n^2-(\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2)]=0 \end{aligned} \tag{99,4}$$

(fra l'altro, deve essere soddisfatta, ovviamente, anche l'equazione (97,10) stessa). Sapendo a priori che le direzioni cercate **n** giacciono

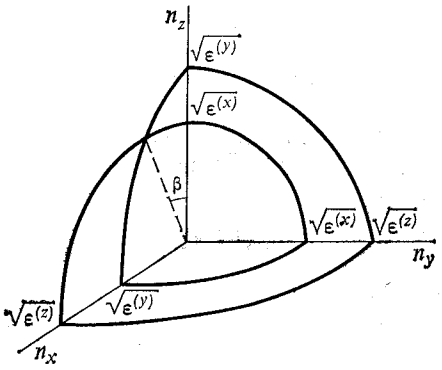


Fig. 54

nel piano xz, poniamo $n_y = 0$ e dalle due equazioni restanti dopo un semplice calcolo ricaviamo [1])

$$n_x^2=\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}},\quad n_z^2=\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}}. \tag{99,5}$$

Le direzioni di questi vettori **n** sono inclinati verso l'asse z sotto un angolo β per il quale

$$\frac{n_x}{n_z}=\pm\operatorname{tg}\beta=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}}. \tag{99,6}$$

[1]) È facile vedere immediatamente che la soluzione così ottenuta è l'unica soluzione reale delle equazioni (99,4). Se tutte e tre le componenti n_x, n_y, n_z sono non nulle, allora le tre equazioni (99,4) sono in contraddizione reciproca (in esse infatti figurano le sole due incognite: n^2 e $\varepsilon^{(x)}n_x^2+\varepsilon^{(y)}n_y^2+\varepsilon^{(z)}n_z^2$). Se, invece, $n_x = 0$ o $n_z = 0$, allora le equazioni hanno soluzioni immaginarie.

Questa formula definisce due assi (due direzioni) nel piano xz ognuno dei quali passa per due punti singolari opposti ed è inclinato sotto l'angolo β verso l'asse z. Essi si chiamano *assi ottici* (o *binormali*) del cristallo; nella fig. 54 uno di essi è dato in tratteggio. Le direzioni degli assi ottici sono, evidentemente, uniche direzioni in cui il vettore d'onda può assumere un solo valore [1]).

Di proprietà analoghe gode la superficie radiale. Per ottenere le formule corrispondenti è sufficiente sostituire **n** con **s** e ε con $1/\varepsilon$. In particolare, esistono due *assi ottici dei raggi* disposti anch'essi nel piano xz ed inclinati verso l'asse z sotto un angolo γ:

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\operatorname{tg}\beta. \tag{99,7}$$

Poiché $\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(z)}$, allora $\gamma < \beta$.

Le direzioni di **n** ed **s** coincidono soltanto per le onde che si propagano lungo gli assi coordinati (cioè assi dielettrici principali). Se **n** giace in qualche piano coordinato, allora **s** si trova nello stesso piano. Questa regola ha, però, un'eccezione importante — per i vettori d'onda diretti lungo gli assi ottici.

Le formule generali che definiscono il vettore **s** in base al vettore **n** (cfr. problema del § 97) con la sostituzione in esse del valore **n** dato dalla (99,5) forniscono un'indeterminazione della forma 0/0. L'origine e il significato di questa indeterminazione sono del tutto comprensibili dalle considerazioni geometriche seguenti. In prossimità del punto singolare le cavità esterna e interna della superficie dei vettori d'onda rappresentano coni di vertice comune. In questo vertice (punto singolare) la direzione della normale alla superficie diviene indeterminata, mentre le formule suindicate determinano la direzione **s** come direzione della normale vera e propria. In realtà, al vettore d'onda diretto lungo l'asse ottico (binormale) corrisponde un'infinità di vettori radiali le cui direzioni descrivono una superficie conica (*cono di rifrazione conica interna*)[2]).

Per trovare questo cono sarebbe possibile studiare le direzioni delle normali nell'intorno del punto singolare. Il più intuitivo sarebbe, tuttavia, un procedimento basato sulla costruzione geometrica mediante la superficie radiale.

Nella fig. 55 è rappresentata in un quadrante (con curve continue) la sezione radiale della superficie con il piano xz. Con gli stessi assi coordinati è rappresentata (su scala modificata in modo qualsiasi) la sezione della superficie dei vettori d'onda, ove la retta OS è asse ottico del raggio e ON binormale; il vettore d'onda corrispondente

---

[1]) Nell'ellissoide tensoriale (97,23) le binormali sono determinate come direzioni perpendicolari alle sezioni circolari dell'ellissoide. Come è noto, l'ellissoide a tre assi ha due queste sezioni circolari.

[2]) Il fenomeno della rifrazione conica trattato più avanti è stato predetto da *W.R. Hamilton* nel 1833.

al punto N indichiamo con $\mathbf{n}_N$. Si vede facilmente che al punto singolare N della superficie dei vettori d'onda corrisponde sulla superficie radiale un piano tangente singolare, ossia il piano perpendicolare alla direzione ON e tangente alla superficie non in un punto separato, bensì lungo un'intera curva (la quale risulterà di essere circonferenza). Nella fig. 55 la sezione con questo piano è rappresentata mediante il segmento ab. Ciò deriva immediatamente dalla conformità geometrica tra superficie dei vettori d'onda e quella radiale (cfr. § 97): se in un punto $\mathbf{s}$ della superficie radiale tracciare un piano tangente la perpendicolare abbassata dall'origine delle coordinate a questo piano coincide per direzione con $\mathbf{n}$ e per valore con $1/n$, ove $\mathbf{n}$ è il vettore d'onda corrispondente a $\mathbf{s}$ dato. Nel caso considerato esiste un'infinità di vettori $\mathbf{s}$ corrispondenti allo stesso $\mathbf{n} = \mathbf{n}_N$; perciò tutti i punti corrispondenti a questi vettori sulla superficie radiale devono appartenere a un medesimo piano tangente e quest'ultimo è perpendicolare a $\mathbf{n}_N$. Quindi, il triangolo Oab nella fig. 55 è la traccia della sezione del cono della rifrazione conica interna con il piano xz.

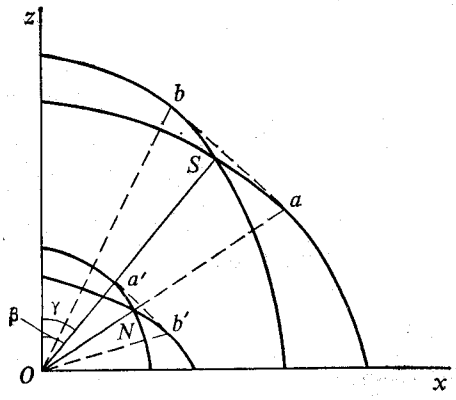


Fig. 55

Il calcolo quantitativo del quadro geometrico descritto non presenta difficoltà alcuna, ma non lo facciamo qui limitandoci alla scrittura delle formule definitive. L'equazione della circonferenza lungo la quale il cono della rifrazione conica interna interseca la superficie radiale è data dall'insieme delle formule seguenti:

$$\begin{gathered}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})\, s_y^2+\left(s_x\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}-s_z\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}\right)\times \\ \times\left(s_x\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}{\varepsilon^{(x)}}}-s_z\sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\right)=0, \qquad (99,8) \\ s_x\sqrt{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}+s_z\sqrt{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}=\sqrt{\varepsilon^{(z)}+\varepsilon^{(x)}}.\end{gathered}$$

La prima di queste equazioni, se con s_x, s_y, s_z in essa intendiamo le tre variabili indipendenti, è l'equazione esprimente il cono stesso di rifrazione. La seconda invece dà l'equazione del piano tangente (alla superficie radiale). In particolare, per $s_y = 0$ la prima equazione (99,8) si divide in due equazioni

$$\frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}},\quad \frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)})}{\varepsilon^{(z)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)})}},$$

che determinano le direzioni dei raggi estremi (*Oa* e *Ob*, rispettivamente, nella fig. 55) nel piano della sezione *xz*. La prima di quest'ultime coincide con la direzione della binormale (cfr. la formula (99,6)) che al tempo stesso è perpendicolare alla tangente *ab*.

La situazione analoga si verifica per i vettori d'onda corrispondenti a un dato vettore radiale. Al vettore **s** diretto lungo l'asse ottico radiale corrisponde un'infinità di vettori d'onda le cui direzioni riempiono il cosiddetto *cono di rifrazione conica esterna* (nella fig. 55 il triangolo *Oa'b'* è la traccia della sezione di questo cono con il piano *xz*). Le formule corrispondenti si ottengono, come sempre, mediante le sostituzioni $\mathbf{s} \to \mathbf{n}$, $\varepsilon \to 1/\varepsilon$ nelle formule (99,8) e sono

$$\begin{gathered}\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})\,n_y^2+(n_x\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}-n_z\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}})\times\\ \times(n_x\varepsilon^{(x)}\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}-n_z\varepsilon^{(z)}\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}})=0,\\ n_x\sqrt{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}+n_z\sqrt{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}=\sqrt{\varepsilon^{(y)}(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)})}.\end{gathered} \tag{99,9}$$

Per un'osservazione efficace della rifrazione conica interna si può [1]) ricorrere a una lamina pianoparallela tagliata da un cristallo in modo perpendicolare alla binormale (fig. 56). La superficie della lamina è coperta da un diaframma sottile che separa dall'onda piana incidente (onda con una determinata direzione del vettore d'onda) in modo perpendicolare alla lamina un fascio sottile. Il vettore d'onda della luce capitata nella lamina avrà la direzione coincidente con la binormale, e perciò i suoi raggi saranno distribuiti sulla superficie del cono della rifrazione interna. Quanto alla luce uscente dalla superficie opposta della lamina e avente lo stesso vettore d'onda della luce incidente, essa sarà distribuita sulla superficie di un cilindro circolare.

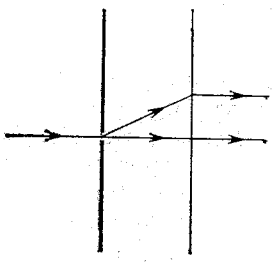


Fig. 56

Per l'osservazione della rifrazione conica esterna la lamina deve essere tagliata perpendicolarmente all'asse ottico radiale, mentre le sue ambedue superficie devono essere coperte da diaframmi con piccoli fori disposti precisamente l'uno di fronte all'altro. Se la lamina va illuminata da un fascio di luce convergente (cioè dal fascio contenente raggi con tutte le direzioni possibili **n**) i diaframmi individueranno all'interno della lamina raggi con le direzioni **s** lungo l'asse ottico radiale e, rispettivamente, con le direzioni **n** che riempiono la superficie del cono di rifrazione conica esterna. La luce uscente dal secondo foro sarà distribuita anch'essa sulla superficie conica

[1]) La descrizione che segue è molto schematica.

(la quale, tuttavia, per rifrazione all'uscita non coincide esattamente con il cono di rifrazione esterna).

Le leggi della rifrazione sulla superficie del cristallo biassico per incidenza qualsiasi sono estremamente complicate e noi qui non ci soffermiamo sulla loro descrizione [1]). Indichiamo soltanto che a differenza del caso dei cristalli uniassici le due onde rifratte sono « straordinarie » e i loro raggi non appartengono al piano di incidenza.

Secondo la convenzione del § 97 studiamo l'ottica dei cristalli trasparenti. Ricordiamo qui, tuttavia, una proprietà dei cristalli biassici con la quale si potrà avere a che fare tenendo conto dell'assorbimento.

Consideriamo un'onda piana uniforme che si propaga in un cristallo; in essa $\mathbf{n}$ è un vettore complesso con direzione uguale delle parti reale e complessa: $\mathbf{n} = n\mathbf{v}$, ove $\mathbf{v}$ è il vettore unitario reale e $n = n(\omega)$ una grandezza complessa. Per $\mathbf{v}$ dato l'equazone di dispersione (97,21) in forma sviluppata è

$$n^{-4} - n^{-2}(\eta_{11} + \eta_{22}) + \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = 0,$$

ove $\eta_{ik} \equiv \varepsilon_{ik}^{-1}$ e 1, 2 sono indici tensoriali nel piano perpendicolare a $\mathbf{v}$. Questa equazione quadratica rispetto a n^{-2} ha radice multipla se

$$\eta_{22} - \eta_{11} = \pm 2i\eta_{12}; \tag{99,10}$$

in questo caso $n^{-2} = (\eta_{11} + \eta_{22})/2$. Nel caso di assorbimento il tensore $\eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik}$ è complesso.

Nei cristalli biassici gli elissoidi dei tensori η'_{ik} e η''_{ik} sono a tre assi e i rapporti tra lunghezze dei loro semiassi (e nei cristalli dei sistemi triclino e monoclino anche le loro direzioni) sono distinti per ambedue i tensori. Sotto queste condizioni i tensori bidimensionali $\eta'_{\alpha\beta}$ e $\eta''_{\alpha\beta}$ non si riducono, in generale, contemporaneamente agli assi principali. L'angolo ϑ tra assi principali di ambedue i tensori è una funzione di due variabili indipendenti (di angoli che determinano la direzione $\mathbf{v}$). Quindi, per frequenza data ω può esistere un insieme monoparametrico di direzioni $\mathbf{v}$ per le quali $\vartheta = \pi/4$. Con questo valore dell'angolo ϑ la parte immaginaria dell'equazione complessa (99,10) è soddisfatta identicamente e la parte reale assume la forma

$$\eta'_2 - \eta'_1 = \mp(\eta''_2 - \eta''_1). \tag{99,11}$$

ove gli indici 1 e 2 denotano i valori principali dei tensori corrispondenti [2]). Qualunque siano gli assi x_1, x_2 le equazioni (97,21)

[1]) Per calcoli corrispondenti si veda l'articolo di *G. Szivessy* « Kristalloptik » nel libro Handbuch der Physik, Bd. XX — Berlin, 1928.

[2]) È facile capire quanto detto intendendo con assi x_1, x_2 le direzioni degli assi principali del tensore $\eta'_{\alpha\beta}$ ed esprimendo le componenti del tensore $\eta''_{\alpha\beta}$ in funzione dei suoi valori principali.

danno ora

$$D_2/D_1 = (\eta_{22} - \eta_{11})/2\eta_{12} = \pm i,$$

ove due segni che precedono il secondo membro dell'uguaglianza corrispondono a due segni della (99,10). In tal modo, le condizioni $\vartheta = \pi/4$ e (99,11) determinano insieme per ogni valore ω una direzione $\mathbf{v}$ nella quale può propagarsi la sola onda di polarizzazione circolare di un segno, sinistra o destra, a seconda del segno con il quale è soddisfatta la condizione (99,10) (*W. Voigt*, 1902). Questa direzione nel cristallo si dice *singolare* o *asse ottico circolare*.

In accordo con la teoria generale delle equazioni differenziali lineari la seconda soluzione indipendente delle equazioni del campo contiene, in questo caso, accanto al fattore esponenziale exp $(in\mathbf{vr})$ (contenente in sé anche indebolimento) un altro fattore lineare rispetto alle coordinate della forma $a + b\mathbf{vr}$ [1]). La polarizzazione di quest'onda varia lungo il raggio, ma in fin dei conti all'aumentare di $\mathbf{vr}$ si stabilisce la stessa polarizzazione circolare come nella prima onda (ciò diventa evidente osservando che nel limite indicato per sostituzione della soluzione nell'equazione del campo si deve derivare il solo fattore esponenziale; allora la differenza tra ambedue le soluzioni scompare).

Sottolineiamo la distinzione dell'asse singolare dal caso in cui la doppia radice dell'equazione di dispersione compaia automaticamente in virtù della simmetria del cristallo. Per una luce propagantesi lungo l'asse ottico del cristallo uniassico il tensore bidimensionale $\eta_{\alpha\beta}$ ha la forma $\eta_{\alpha\beta} = \eta\delta_{\alpha\beta}$ e la condizione (99,10) è soddisfatta identicamente. In questo caso le equazioni (97,21) hanno due soluzioni indipendenti con polarizzazioni diverse.

§ 100. *Birifrangenza in un campo elettrico*

Un corpo isotropo diviene anisotropo nel campo elettrico costante. La comparsa di questa anisotropia può essere descritta come risultato del cambiamento della permettività dielettrica sotto influsso del campo costante. Sebbene questo cambiamento sia relativamente debole, nel caso considerato esso è notevole in quanto conduce a cambiamento qualitativo delle proprietà ottiche del corpo.

Indichiamo in questo paragrafo con $\mathbf{E}$ l'intensità del campo elettrico costante nel corpo [2]) e sviluppiamo il tensore dielettrico ε_{ik} in potenze di questa grandezza. Nel corpo isotropo si ha nell'approssimazione zero $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$. In ε_{ik} non possono essere termini del primo ordine rispetto al campo poiché nel corpo isotropo non esiste

[1]) Di questa soluzione si deve tener conto, ad esempio, nei problemi della riflessione e della rifrazione della luce propagantesi lungo l'asse singolare.

[2]) Non confondere con l'intensità del campo elettrico variabile debole dell'onda!

nessun vettore costante mediante il quale si potrebbe costruire tensore del secondo ordine lineare rispetto a **E**. Perciò i termini dello sviluppo successivi di ε_{ik} saranno quadratici rispetto al campo. Con le componenti del vettore si possono formare due tensori simmetrici del secondo ordine: $E^2\delta_{ik}$ e E_iE_k. Il primo di essi non modifica la simmetria del tensore $\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$ e, se a quest'ultimo associamo un termine della forma cost$\cdot E^2\delta_{ik}$, ciò si riduce a una piccola correzione alla costante scalare $\varepsilon^{(0)}$; questa correzione, evidentemente, non implica la comparsa di certa anisotropia ottica e perciò è priva di interesse. Otteniamo così la seguente forma del tensore dielettrico dipendente dal campo:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k, \tag{100,1}$$

ove α è una costante.

Uno degli assi principali di questo tensore coincide con la direzione del campo elettrico e il valore principale corrispondente è

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2. \tag{100,2}$$

Gli altri due valori principali sono uguali:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)}, \tag{100,3}$$

e la posizione degli assi principali corrispondenti nel piano perpendicolare al campo è arbitraria. Quindi, il corpo isotropo nel campo elettrico si comporta otticamente come cristallo uniassico (*effetto Kerr*).

Un cambiamento della simmetria ottica nel campo elettrico può aver luogo anche per il cristallo (così, il cristallo otticamente uniassico può trasformarsi in biassico, un cristallo cubico otticamente isotropo può divenire otticamente anisotropo). A differenza del fenomeno corrispondente nei corpi isotropi, qui l'effetto può essere anche del primo ordine rispetto al campo. A questo effetto lineare corrisponde un tensore dielettrico della forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl}E_l, \tag{100,4}$$

ove l'insieme di coefficienti α_{ikl} costituisce un tensore del terzo ordine simmetrico rispetto agli indici i e k. La simmetria di questo tensore coincide con la simmetria del tensore piezoelettrico. Perciò l'effetto considerato si verifica nei cristalli delle stesse 20 classi che ammettono la piezoelettricità.

§ 101. *Effetti magneto-ottici*

Se esiste il campo magnetico costante **H** [1]) il tensore ε_{ik} (ω; **H**) cessa di essere simmetrico. Il principio di simmetria generalizzato

[1]) Non confondere con il campo periodico debole dell'onda elettromagnetica!

dei coefficienti cinetici lega le componenti ε_{ik} e ε_{ki} in diversi campi:

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{101,1}$$

La condizione che l'assorbimento sia assente non richiede altro che questo tensore sia hermitiano:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^{*} \tag{101,2}$$

(come ciò si vede dalla (96,5)) e non reale. Dalla (101,2) non risulta altro che le parti reale e immaginaria del tensore ε_{ik} devono essere simmetrica e antisimmetrica, rispettivamente:

$$\varepsilon'_{ik} = \varepsilon'_{ki}, \quad \varepsilon''_{ik} = -\varepsilon''_{ki}. \tag{101,3}$$

Tenendo conto della formula (101,1) abbiamo

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ik}(\mathbf{H}) &= \varepsilon'_{ki}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}), \\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}) &= -\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ik}(-\mathbf{H}), \end{aligned} \tag{101,4}$$

vale a dire che nel mezzo non assorbente le grandezze ε'_{ik} sono funzioni di $\mathbf{H}$ pari e le grandezze ε''_{ik} funzioni dispari.

Delle stesse proprietà di simmetria gode, evidentemente, anche il tensore inverso ε_{ik}^{-1}. Nei calcoli ulteriori sarà più comodo operare proprio con questo tensore. Per evitare numerosi indici introduciamo per esso la notazione speciale seguente [1]):

$$\varepsilon_{ik}^{-1} = \eta_{ik} = \eta'_{ik} + i\eta''_{ik} \tag{101,5}$$

(che abbiamo già usato precedentemente).

Come è noto, ogni tensore antisimmetrico del secondo ordine è equivalente (duale) a un vettore assiale; per il tensore η''_{ik} indichiamo questo vettore con $\mathbf{G}$. Mediante il tensore unitario antisimmetrico e_{ikl} il legame tra le componenti del tensore η''_{ik} e del vettore $\mathbf{G}$ si scrive sotto la forma

$$\eta''_{ik} = e_{ikl}G_l, \tag{101,6}$$

e nelle componenti:

$$\eta''_{xy} = G_z, \quad \eta''_{zx} = G_y, \quad \eta''_{yz} = G_x.$$

Il legame $E_i = \eta_{ik}D_k$ fra induzione e intensità elettrica assume la forma in questo caso

$$E_i = (\eta'_{ik} + ie_{ikl}G_l)D_k = \eta'_{ik}D_k + i[\mathbf{DG}]_i. \tag{101,7}$$

In modo analogo si scrive la dipendenza diretta di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{E}$:

$$D_i = \varepsilon'_{ik}E_k + i[\mathbf{Eg}]_i. \tag{101,8}$$

---

[1]) Ovviamente, η'_{ik} e η''_{ik} non sono tensori inversi di ε'_{ik} e ε''_{ik}.

Il legame tra i coefficienti nelle espressioni (101,7) e (101,8) è dato dalle formule

$$\eta'_{ik} = \frac{1}{|\varepsilon|}\{\varepsilon'^{-1}_{ik}|\varepsilon'| - g_i g_k\}, \; G_i = -\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik} g_k, \qquad (101,9)$$

ove $|\varepsilon|$ e $|\varepsilon'|$ sono determinanti dei tensori ε_{ik} e ε'_{ik} (cfr. problema del § 22). Un mezzo con questa forma della dipendenza di **D** da **E** si chiama *girotropo*. Il vettore **g** si dice *vettore di girazione* e **G** *vettore di attività ottica*.

Studiamo sotto aspetti generali il carattere delle onde propagantisi in un mezzo girotropo qualsiasi supponendo in questo caso il mezzo anisotropo e non avanzando nessuna ipotesi sul valore del campo magnetico [1]).

Consideriamo la direzione del vettore d'onda come l'asse z e scriviamo l'equazione (97,21):

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = \left(\eta'_{\alpha\beta} + i\eta''_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = 0, \qquad (101,10)$$

ove gli indici α, β assumono i valori x, y. Facciamo coincidere le direzioni degli assi x e y con gli assi principali del tensore bidimensionale $\eta'_{\alpha\beta}$ e indichiamo i valori principali corrispondenti di quest'ultimo con n_{01}^{-2} e n_{02}^{-2}; allora le equazioni assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_x + iG_z D_y = 0, \\ &-iG_z D_x + \left(\frac{1}{n_{02}^2} - \frac{1}{n^2}\right) D_y = 0. \end{aligned} \qquad (101,11)$$

La condizione che il determinante di questo sistema sia nullo dà l'equazione quadratica rispetto a n^2

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right) = G_z^2, \qquad (101,12)$$

le cui radici determinano due valori di n riferiti a una data direzione **n** [2]):

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2}. \qquad (101,13)$$

---

[1]) Come prima, supponiamo il mezzo non magnetico rispetto al campo variabile dell'onda elettromagnetica (ponendo cioè $\mu_{ik}(\omega) = \delta_{ik}$). Tuttavia, con ciò non si esclude la possibilità di magnetizzazione del mezzo dal campo costante (vale a dire che la permeabilità statica può essere diversa da 1).

Tutte le proprietà suindicate di $\varepsilon_{ik}(\omega)$ si riferiscono nella stessa misura al tensore $\mu_{ik}(\omega)$ quando nel dominio di frequenze in esame è sensibile la dispersione della permeabilità magnetica.

[2]) Se il campo non esiste, $\mathbf{G} = 0$ e $n = n_{01}$ o n_{02}. Tuttavia, si deve tener conto che se il campo esiste le grandezze n_{01} e n_{02} nell'equazione (101,12) non hanno, in generale, significato dei valori n per $\mathbf{H} = 0$ poiché dal campo dipende non il solo vettore **G**, ma dipendono anche le componenti del tensore η'_{ik}.

Sostituendo di nuovo questi valori nelle equazioni (101,11), troviamo le rispettive relazioni

$$\frac{D_y}{D_x}=\frac{i}{G_z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2}\right]. \tag{101,14}$$

Il rapporto puramente immaginario D_y/D_x significa che le onde sono polarizzate ellitticamente e che gli assi principali delle ellissi di polarizzazione coincidono con gli assi x, y. Il prodotto di due valori di questo rapporto è uguale, come si vede facilmente, a uno. In altre parole, se in un'onda

$$D_y = i\rho D_x$$

(ove il numero reale ρ è il rapporto tra lunghezze degli assi dell'ellisse di polarizzazione), nella seconda onda

$$D_y = -iD_x/\rho.$$

Ciò vuol dire che le ellissi di polarizzazione di ambedue le onde hanno medesimo rapporto tra gli assi ma ruotate l'una rispetto all'altra di 90°; la direzione della rotazione in esse è opposta (fig. 57).

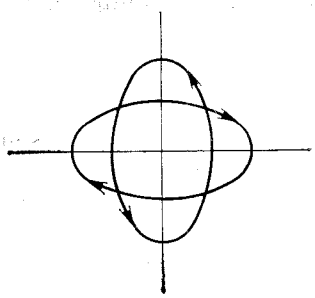


Fig. 57

Se in ambedue le onde indichiamo i vettori $\mathbf{D}$ con $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$, le relazioni ottenute si possono scrivere nella seguente forma:

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^* = D_{1x}D_{2x}^* + D_{1y}D_{2y}^* = 0.$$

Questa relazione esprime la proprietà generale degli autovettori che compaiono per riduzione del tensore hermitiano (in questo caso del tensore $\eta_{\alpha\beta}$) agli assi principali.

Le componenti del vettore $\mathbf{G}$ e del tensore η'_{ik} sono funzioni dell'intensità del campo magnetico. Se (come di solito si verifica) il campo magnetico è relativamente debole lo si può sviluppare in potenze. Il vettore $\mathbf{G}$ è nullo se non esiste campo; perciò nel campo debole si può porre

$$G_i = f_{ik}H_k, \tag{101,15}$$

ove f_{ik} è un tensore del secondo ordine, in generale, asimmetrico. Questa forma della dipendenza funzionale è in accordo con la regola generale secondo la quale in un mezzo trasparente le componenti del tensore antisimmetrico η''_{ik} (così come del tensore ε''_{ik}) devono essere funzioni dispari di $\mathbf{H}$. Quanto al tensore simmetrico η'_{ik}, le sue componenti sono funzioni pari del campo magnetico. Perciò i primi ter-

mini correttivi in η'_{ik} (rispetto ai valori in assenza del campo) sono del secondo ordine rispetto al campo (trascurando questi termini nella (101,9) abbiamo semplicemente $\eta'_{ik} = \varepsilon^{-1}_{ik}$).

Nel caso generale del vettore d'onda diretto in modo qualsiasi il campo magnetico influisce relativamente poco sulla propagazione della luce nel cristallo implicando soltanto la comparsa di debole ellitticità di oscillazioni con piccolo (del primo ordine rispetto al campo) rapporto tra lunghezze degli assi dell'ellisse di polarizzazione.

Quanto al carattere dell'effetto magneto-ottico, fanno eccezione le direzioni degli assi ottici (e quelle ad esse vicine) lungo le quali i due valori di n coincidono in assenza del campo. Le radici dell'equazione (101,12) differiscono allora da questi valori per grandezze infinitesime del primo ordine [1]) e si producono degli effetti analoghi a quelli nei corpi isotropi allo studio dei quali ora passiamo. L'effetto ottico-magnetico nei corpi isotropi (così come nei cristalli del sistema cubico) rappresenta interesse particolare per suo carattere originale e valore relativamente notevole.

Trascurando infinitesimi del secondo ordine abbiamo $\eta'_{ik} = \varepsilon^{-1}\delta_{ik}$, ove ε è la permettività dielettrica del mezzo isotropo in assenza del campo magnetico. La dipendenza tra **D** e **E** è data dalle formule

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + i\,[\mathbf{DG}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i\,[\mathbf{Eg}], \tag{101,16}$$

ove i due vettori **g** e **G** sono legati, trascurando gli stessi infinitesimi, dalla relazione

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{g}. \tag{101,17}$$

La dipendenza di **g** (o di **G**) dal campo esterno si riduce nel mezzo isotropo alla semplice proporzionalità

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}; \tag{101,18}$$

la costante scalare può essere sia positiva che negativa.

Ora, nell'equazione (101,12) abbiamo $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\varepsilon}$; questo è il coefficiente di rifrazione senza campo. Ne segue che

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} \mp G_z$$

oppure, con la stessa precisione,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \tag{101,19}$$

[1]) In questo caso si deve notare che ambedue le radici dell'equazione (101,12) sono un po' diverse. Ciò significa geometricamente che le due cavità (interna ed esterna) della superficie dei vettori d'onda risultano essere completamente separate.

Ricordando che l'asse z coincide con la direzione del vettore $\mathbf{n}$ possiamo scrivere questa espressione con la stessa precisione nella forma vettoriale seguente:

$$\left(\mathbf{n}\pm\frac{1}{2n_0}\,\mathbf{g}\right)^2=n_0^2. \qquad (101,20)$$

Di qui si vede che la superficie dei vettori d'onda rappresenta nel caso considerato l'insieme di due sfere di raggio n_0 i cui centri sono spostati nella direzione $\mathbf{G}$ a distanza $\pm g/2n_0$ dall'origine delle coordinate.

A ciascuno dei due valori di n corrisponde una sua polarizzazione dell'onda, e cioè:

$$D_x = \mp iD_y, \qquad (101,21)$$

ove i segni corrispondono a quelli nella formula (101,19). L'uguaglianza tra valori assoluti D_x e D_y per sfasamento $\mp\pi/2$ tra queste grandezze significa la polarizzazione circolare dell'onda con la direzione di rotazione del vettore $\mathbf{D}$ nel senso antiorario e orario, rispettivamente, se guardare lungo la direzione del vettore d'onda (o, come si suole dire, l'*onda è di polarizzazione destra o sinistra*).

La differenza tra indici di rifrazione delle onde di polarizzazione sinistra e destra fa sì che per rifrazione sulla superficie del corpo girotropo compaiono due onde polarizzate circolarmente (la cosiddetta *birifrangenza circolare*).

Supponiamo che un'onda piana polarizzata linearmente incida nella direzione normale sullo strato pianoparallelo di sostanza (di spessore l). La direzione dell'incidenza consideriamo come asse z e la direzione del vettore $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ nell'onda incidente come asse x. L'oscillazione lineare si può rappresentare come sovrapposizione di due oscillazioni circolari a direzioni di rotazione opposte, che si propagheranno in seguito nello strato di sostanza con vettori d'onda diversi $k_\pm = \omega n_\pm/c$. Ponendo convenzionalmente uguale a 1 l'ampiezza dell'onda avremo

$$D_x=\frac{1}{2}\left(e^{ik_+z}+e^{ik_-z}\right),\quad D_y=\frac{i}{2}\left(-e^{ik_+z}+e^{ik_-z}\right),$$

oppure, introducendo $k = (k_+ + k_-)/2$, $\varkappa = (k_+ - k_-)/2$,

$$D_x=\frac{1}{2}\,e^{ikz}\left(e^{i\varkappa z}+e^{-i\varkappa z}\right)=e^{ikz}\cos\varkappa z,$$

$$D_y=\frac{i}{2}\,e^{ikz}\left(-e^{i\varkappa z}+e^{-i\varkappa z}\right)=e^{ikz}\operatorname{sen}\varkappa z,$$

e all'uscita dell'onda dallo strato avremo

$$\frac{D_y}{D_x}=\operatorname{tg}\varkappa l=\operatorname{tg}\left(l\,\frac{\omega g}{2cn_0}\right). \qquad (101,22)$$

Questa relazione è reale. Ciò significa che l'onda resta polarizzata linearmente ma con direzione ruotata rispetto a quella di polarizzazione iniziale (*effetto Faradey*). L'angolo di rotazione del piano di polarizzazione è proporzionale al cammino attraversato dall'onda; esso vale per unità di lunghezza lungo la direzione del vettore d'onda

$$\frac{\omega g}{2cn_0}\cos\theta, \tag{101,23}$$

ove θ è l'angolo fra **n** e **g**.

Si deve notare che per data direzione del campo magnetico la direzione di rotazione del piano di polarizzazione (rispetto alla direzione **n**) per cambiamento di segno di **n** diventa inversa, vale a dire che la rotazione destra si trasforma in quella sinistra, e viceversa. Perciò, se il raggio percorre lo stesso cammino due volte (di andata e di ritorno), la rotazione totale del piano di polarizzazione sarà il doppio di un solo percorso.

Per $\theta = \pi/2$ (il vettore d'onda è perpendicolare al campo magnetico) l'effetto lineare rispetto al campo che è descritto dalle formule (101,19) scompare (conformemente alla regola generale suindicata secondo la quale fra tutte le componenti del vettore **g** è la sua sola proiezione sulla direzione **n** a influire sulla propagazione della luce). Quindi, per gli angoli θ vicini a $\pi/2$ si deve tener conto anche dei termini proporzionali al quadrato del campo.In particolare, vanno presi in considerazione i termini del secondo ordine anche nel tensore η'_{ik}. In virtù della simmetria assiale attorno alla direzione del campo due valori principali del tensore η'_{ik} saranno uguali (come per il cristallo uniassico). In seguito intendiamo con asse x la direzione del campo e indichiamo i valori principali del tensore η'_{ik} con $\eta_{\parallel}$ e $\eta_{\perp}$ nelle direzioni parallela e perpendicolare, rispettivamente, al campo magnetico; la differenza $\eta_{\parallel} - \eta_{\perp}$ è proporzionale a H^2.

Consideriamo l'effetto quadratico che compare per **n** e **g** mutuamente perpendicolari (*effetto Cotton-Muton*). In questo caso nelle equazioni (101,11-12) abbiamo $G_z = 0$ e n_{01}^{-2} e n_{02}^{-2} sono uguali a $\eta_{\parallel}$ e $\eta_{\perp}$, rispettivamente. Quindi, in una delle onde

$$n^{-2} = \eta_{\parallel},\ D_y = 0;$$

questa onda è polarizzata linearmente con il vettore **D** e diretta parallelamente all'asse x. Nell'altra onda, invece,

$$n^{-2} = \eta_{\perp},\ D_x = 0$$

vale a dire che **D** è diretto lungo l'asse y. Supponiamo che la luce polarizzata linearmente incida nella direzione normale sullo strato pianoparallelo di sostanza sito nel campo magnetico che gli è parallelo. Due componenti della luce penetrata nella sostanza (con vettori **D** nei piani xz e yz) si propagano con n diversi. Come risultato la

luce uscente dalla parte opposta dello strato risulta polarizzata ellitticamente.

Infine, soffermiamoci su un altro effetto originale che si produce in un mezzo con il vettore di attività magnetica (101,15) lineare rispetto al campo magnetico (costante), ossia la magnetizzazione del mezzo trasparente non magnetico mediante il campo elettrico variabile (*L.P. Pitaevskij*, 1960; *R.W. Terhune*, 1962).

Partiamo dalla formula generale (31,6)

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi}=\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\mathbf{H}},$$

tenendo conto del contributo in $\widetilde{U}$ del campo elettrico variabile definito dalla formula (80,11). Secondo il teorema delle piccole aggiunte alle grandezze termodinamiche la variazione $\delta\widetilde{U}$ di questo contributo per piccola variazione della permettività dielettrica coincide (essendo espressa mediante variabili appropriate) con la variazione dell'energia libera $\delta\widetilde{F}$. Per quest'ultima si può ricorrere alla formula (14,1) generalizzandola con evidenza ai mezzi anisotropi (è stato già detto nel § 81 che questa formula resta valida per il campo variabile, e non costante come nel § 14, nel campo trasparente con la dispersione [1])). Quindi, abbiamo

$$\delta\widetilde{U}=-\delta\varepsilon_{ik}\frac{E_iE_k^*}{16\pi}=\delta\eta_{ik}\frac{D_iD_k^*}{16\pi} \qquad (101,24)$$

(il fattore superfluo 1/2 qui tiene conto della rappresentazione di **E** nella forma complessa); l'ultima uguaglianza nella (101,24) è la conseguenza del fatto che in virtù della definizione $\varepsilon_{il}\eta_{lk}=\delta_{ik}$ si ha $\varepsilon_{il}\delta\eta_{lk}=-\eta_{lk}\delta\varepsilon_{il}$ [2]).

Intendendo ora con variazione della permettività dielettrica il risultato di variazione del campo magnetico costante scriviamo

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi}=\frac{\partial\widetilde{U}_0}{\partial\mathbf{H}}+\frac{\partial\eta_{ik}}{\partial\mathbf{H}}\frac{D_iD_k^*}{16\pi},$$

---

[1]) Ricordiamo che il segno $\sim$ sopra U si riferisce qui ai campi magnetici e non a quelli elettrici variabili. Per rendere più semplice la scrittura omettiamo il segno di media rispetto al tempo sopra $\widetilde{U}$.

[2]) Per una deduzione diretta della formula (101,24) bisognerebbe considerare il risonatore riempito da dielettrico al posto del contorno di oscillazione considerato nel § 81. Calcolata la variazione della frequenza per piccola variazione della permettività dielettrica (cfr. problema 4 del § 90) e applicato il teorema dell'invariante adiabatica, troviamo la variazione dell'energia nel risonatore.

ove $\widetilde{U}_0$ si riferisce al mezzo senza campo elettrico. Se il mezzo di per se stesso è non magnetico ($\mu = 1$), allora $\partial\widetilde{U}_0/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{H}/4\pi$. Allora la magnetizzazione $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ vale

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial\eta_{ik}}{\partial\mathbf{H}}\frac{D_i D_k^*}{16\pi}.$$

Se non esiste campo magnetico esterno il valore della derivata $\partial\eta_{ik}/\partial\mathbf{H}$ va calcolato per $\mathbf{H} = 0$. Con η_{ik} ricavato dalle (101,6) e (101,15) otteniamo infine la seguente espressione della magnetizzazione creata dal campo elettrico variabile:

$$M_l = -\frac{i}{16\pi} e_{ikm} f_{ml} D_i D_k^*; \qquad (101,25)$$

essa è quadratica rispetto al campo elettrico. Se in assenza del campo magnetico il mezzo è isotropo, allora $f_{ml} = f\delta_{ml}$ e

$$\mathbf{M} = -\frac{if}{16\pi}[\mathbf{D}\mathbf{D}^*]. \qquad (101,26)$$

Per un campo polarizzato linearmente il vettore $\mathbf{D}$ può differire da quello reale per il solo fattore di fase; allora $\mathbf{D}$ e $\mathbf{D}^*$ sono collineari e l'espressione (101,25) o (101,26) si annulla. In tal modo, la magnetizzazione compare esclusivamente sotto influsso del campo elettrico rotante. Questo effetto in un certo senso è inverso all'effetto di rotazione del piano di polarizzazione nel campo magnetico e si esprime mediante lo stesso tensore f_{ik}; esso si chiama *effetto Faraday inverso*.

Problemi

1. Mostrare con un calcolo diretto che la direzione del vettore di Poynting medio (rispetto al tempo) in un'onda propagantesi nel mezzo girotropo trasparente coincide con la direzione della velocità di gruppo.

Soluzione. In accordo con la formula (59,9a) abbiamo

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}],$$

ove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono espresse in forma complessa. Procedendo analogamente alla deduzione della formula (97,16), moltiplichiamo le uguaglianze (97,15) per $\mathbf{E}^*$ e $\mathbf{H}^*$, rispettivamente:

$$\mathbf{E}^*\,\delta\mathbf{D} = \mathbf{H}^*\,\delta\mathbf{H} + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]\,\delta\mathbf{n},$$

$$\mathbf{H}^*\delta\mathbf{H} = \mathbf{D}^*\,\delta\mathbf{E} + [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\,\delta\mathbf{n}.$$

Sommando i risultati e osservando che in virtù del carattere hermitiano del tensore ε_{ik} si ha $\mathbf{E}^*\,\delta\mathbf{D} = \mathbf{D}^*\,\delta\mathbf{E}$, otteniamo il risultato cercato

$$\delta\mathbf{n}\cdot\operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}] = 0.$$

2. Determinare la direzione dei raggi per rifrazione della luce incidente dal vuoto sulla superficie di un corpo isotropo nel campo magnetico.

Soluzione. La direzione del vettore radiale **s** è determinata dalla normale alla superficie dei vettori d'onda. Derivando il primo membro dell'equazione (101,20) rispetto alle componenti del vettore **n**, troviamo che il vettore **s** è proporzionale a $\mathbf{n} \pm \mathbf{g}/2n_0$. Il quadrato di questa espressione vale n_0^2; perciò il vettore unitario nella direzione del raggio è dato dalla formula

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0}\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right). \tag{1}$$

Indichiamo con θ l'angolo di incidenza. I raggi rifratti non giacciono, in generale, nel piano di incidenza e la loro direzione è determinata dall'angolo θ' formato dalla normale alla superficie e dall'azimut φ' calcolato a partire dal piano di incidenza. Intendiamo con quest'ultimo il piano xz con l'asse z perpendicolare alla superficie di rifrazione. Per rifrazione restano costanti le componenti n_x, n_y del vettore d'onda. Nel raggio incidente esse valgono: $n_x = \operatorname{sen}\theta$, $n_y = 0$. Sostituendo questi valori nella formula (1), troviamo le componenti x e y del vettore unitario $\mathbf{s}/s$, che danno immediatamente la direzione dei raggi rifratti:

$$\operatorname{sen}\theta' \cos\varphi' = \frac{1}{n_0}\operatorname{sen}\theta \pm \frac{1}{2n_0^2}\, g_x,$$

$$\operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\varphi' = \pm \frac{1}{2n_0^2}\, g_y.$$

Per angoli di incidenza non troppo piccoli è piccolo l'azimut φ' e si può scrivere

$$\varphi' = \pm \frac{g_y}{2n_0 \operatorname{sen}\theta}, \quad \operatorname{sen}\theta' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{n_0} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}.$$

Per incidenza normale ($\theta = 0$) consideriamo il piano xz passante per il vettore **g**; allora $\varphi' = 0$ e per θ' abbiamo

$$\theta' \approx \operatorname{sen}\theta' = \pm \frac{1}{2n_0^2}\, g_x.$$

Sebbene g_z non figuri in questa formula, essa è inapplicabile se $g_z = 0$ poiché per **n** e **g** mutuamente perpendicolari l'approssimazione lineare rispetto al campo è insufficiente.

3. Determinare la polarizzazione della luce riflessa per incidenza normale dell'onda polarizzata dal vuoto sulla superficie di un corpo isotropo nel campo magnetico.

Soluzione. Per incidenza normale la direzione del vettore d'onda resta immutata al passare dell'onda nel secondo mezzo. Perciò in tutte le onde (incidente, riflessa e rifratta) i vettori **H** sono paralleli alla superficie di separazione (piano xy). Quanto al vettore elettrico **E**, nelle onde incidente e riflessa anch'esso è parallelo al piano xy, mentre nell'onda rifratta, anche se $E_z \neq 0$, il legame tra le componenti x e y di **E** e **H** è lo stesso che nel corpo isotropo ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Se la polarizzazione dell'onda incidente coincide con la polarizzazione di uno dei due tipi di onde che possono propagarsi in un dato mezzo anisotropo (rifrangente) in una direzione **n**, compare una sola onda rifratta con la stessa polarizzazione. Sotto queste condizioni il problema non differisce formalmente dal problema della riflessione da un corpo isotropo, e i campi $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_0$ nelle onde riflessa e incidente sono legati reciprocamente mediante

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1-n}{1+n}\,\mathbf{E}_0, \tag{1}$$

ove **n** è il coefficiente di rifrazione corrispondente alla polarizzazione in questione.

La polarizzazione lineare si può considerare come risultato della somma di due polarizzazioni circolari con direzioni di rotazione opposte; se nell'onda incidente $\mathbf{E}_0$ è diretto lungo l'asse x, allora scriviamo $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^+ + \mathbf{E}_0^-$, ove

$$E_{0x}^+ = iE_{0y}^+ = 1/2\, E_0, \quad E_{0x}^- = -iE_{0y}^- = 1/2\, E_0.$$

Usando per ciascuna delle onde $\mathbf{E}_0^+$ e $\mathbf{E}_0^-$ la formula (1) con $n_\pm$ corrispondente della formula (101,19) otteniamo

$$E_{1x} = \frac{E_0}{2}\left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-}\right] \approx E_0 \frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{iE_0}{2}\left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+}\right] \approx iE_0 \frac{g\cos\theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ è l'angolo fra la direzione di incidenza e il vettore **g**). Ne risulta che l'onda riflessa è polarizzata ellitticamente e che il grande asse dell'ellisse coincide con l'asse x e il rapporto tra gli assi piccolo e grande vale

$$\frac{g\cos\theta}{n_0(n_0^2-1)}.$$

4. Determinare la legge limite della dipendenza del vettore di girazione dalla frequenza per grandi valori di quest'ultima.

Soluzione. I calcoli sono analoghi a quelli del § 78 con la sola differenza che nell'equazione descrivente il moto dell'elettrone (carica $e = -|e|$) si deve aggiungere la forza di Lorentz del campo magnetico costante **H**:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{H}].$$

Se è soddisfatta la condizione $\omega \gg |e|\, H/mc$, questa equazione può essere risolta con il metodo di approssimazioni successive. Otteniamo così a meno del termine del primo ordine rispetto a **H**:

$$\mathbf{v}' = \frac{ie}{m\omega}\mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2 c}[\mathbf{EH}],$$

in seguito troviamo l'induzione nella forma

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} + if(\omega)\,[\mathbf{EH}],$$

ove $\varepsilon(\omega)$ coincide con la (78,1) e

$$f(\omega) = -\frac{4\pi N e^3}{cm^2\omega^3} = \frac{|e|}{2mc}\frac{d\varepsilon}{d\omega}$$

(*H. Becquerel*, 1897).

§ 102. *Effetti dinamo-ottici*

Accanto agli effetti ottici elettrici e magnetici esistono altri casi di cambiamento della simmetria ottica del mezzo sotto influsso di azioni esterne.

Prima di tutto tale è influsso delle deformazioni elastiche sulle proprietà ottiche dei corpi solidi. In particolare, in seguito alla defor-

mazione un corpo solido isotropo può divenire otticamente anisotropo. Questi fenomeni vanno descritti da termini addizionali in $\varepsilon_{ik}(\omega)$, proporzionali alle componenti del tensore di deformazione. Le formule corrispondenti coincidono formalmente con le formule (16,1) e (16,6) scritte per la permettività dielettrica statica con la sola differenza che i coefficienti in esse sono ora funzioni della frequenza. Così, per deformazione di un corpo isotropo

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}. \tag{102,1}$$

I coefficienti $a_1(\omega)$ e $a_2(\omega)$ si chiamano *costanti otticoelastiche*.

Un altro caso è la comparsa dell'anisotropia ottica in un liquido che si muove in modo non uniforme. L'espressione corrispondente del tensore dielettrico

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \lambda_1\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{i}{2}\lambda_2\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \tag{102,2}$$

rappresenta i primi termini dello sviluppo di ε_{ik} in potenze di una velocità qualsiasi $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. La condizione per cui non esiste assorbimento (carattere hermitiano di ε_{ik}) chiede che siano reali i coefficienti $\lambda_1(\omega)$ e $\lambda_2(\omega)$. La grandezza $\varepsilon^{(0)}(\omega)$, invece, è la permettività dielettrica del fluido immobile. Nel fluido imcompressibile $\partial v_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ e i due ultimi termini nella formula (102,2) per riduzione danno zero.

Per lo studio delle proprietà elettromagnetiche del liquido in moto si devono usare contemporaneamente le formule elettrodinamiche dei dielettrici in moto (76,9-11) (con velocità $\mathbf{v}$ dipendente dalle coordinate) e l'espressione (102,2). Tuttavia, in questo caso i termini contenenti contemporaneamente velocità e sue derivate vanno trascurati poiché essi superano i limiti di precisione delle formule in esame.

Il secondo e il terzo termine nell'espressione (102,2) è simmetrico e antisimmetrico, rispettivamente, rispetto agli indici i, k. Per rotazione del liquido come un tutt'uno $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$ ($\mathbf{\Omega}$ è la velocità angolare della rotazione) e il termine simmetrico si annulla. Quanto al termine antisimmetrico, esso assume la forma $i\lambda_2 e_{ikl}\Omega_l$, vale a dire che il mezzo diviene girotropo con il vettore di girazione

$$\mathbf{g} = \lambda_2\mathbf{\Omega}. \tag{102,3}$$

Nella grandezza λ_2 portano contributo due effetti, ossia la dispersione della permettività dielettrica e l'influsso delle forze di Coriolis.

Nel sistema di riferimento che si muove con l'elemento di fluido considerato l'ampiezza $\mathbf{E}_0$ dell'onda monocromatica (nel sistema

di laboratorio) ruota con la velocità angolare $-\mathbf{\Omega}$, cioè diventa funzione del tempo soddisfacente all'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = -[\mathbf{\Omega}\mathbf{E}_0].$$

In questo senso l'onda diventa quasi-monocromatica e il legame tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ in essa è dato dalla formula

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} + i\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega}\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t} \qquad (102,4)$$

(la sua deduzione differisce da quella della formula (80,10) per il solo fatto che ora $f(\omega) = \varepsilon(\omega)$). Sostituendovi il valore della derivata $\partial \mathbf{E}_0/\partial t$ e confrontando il risultato con la definizione del vettore di girazione $\mathbf{g}$ nella formula (101,16), troviamo che la dispersione dà in λ_2 un contributo uguale a $d\varepsilon^{(0)}/\partial\omega$ (*M.A. Player*, 1976).

Se ora rappresentiamo λ_2 nella forma

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(c)} + \frac{d\varepsilon^{(0)}}{d\omega}, \qquad (102,5)$$

allora $\lambda_2^{(c)}$ sarà legata con le sole forze di Coriolis (lineari rispetto a $\mathbf{\Omega}$).

Come è noto, nel sistema di riferimento ruotante da operatore di Hamilton del sistema funge la differenza

$$\hat{\mathscr{H}}' = \hat{\mathscr{H}} - \hat{\mathscr{M}}_{\text{mec}}\mathbf{\Omega},$$

ove $\hat{\mathscr{H}}$ e $\hat{\mathscr{M}}_{\text{mec}}$ sono operatori ordinari dell'energia e del momento meccanico del sistema (cfr. V § 34); la permettività dielettrica del mezzo ruotante deve essere calcolata in linea di massima in base a questo operatore di Hamilton. Ma questa espressione è analoga all'operatore di Hamilton del sistema nel campo magnetico scritto a meno dei termini lineari rispetto a $\mathbf{H}$:

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 - \hat{\mathscr{M}}\mathbf{H},$$

ove $\hat{\mathscr{M}}$ è operatore del momento magnetico (cfr. III § 113). L'analogia diviene letterale se nel dominio di frequenze considerato il contributo nella permettività proviene unicamente del moto orbitale degli elettroni negli atomi. Allora $\mathscr{M} = (e/2mc)\mathscr{M}_{\text{mec}}$ ($e = -|e|$ è la carica dell'elettrone) e ambedue gli operatori di Hamilton differiscono l'uno dall'altro per la sola sostituzione di $\mathbf{\Omega}$ con $e\mathbf{H}/2mc$. Percio è chiaro che in questo caso si avrà

$$\lambda_2^{(c)}(\omega) = \frac{2mc}{e}f(\omega), \qquad (102,6)$$

ove $f(\omega)$ è definita dalla formula (101,18) (*N.B. Baranova, B.J. Zeldovič*, 1978) [1]).

Gli effetti legati al coefficiente λ_1 hanno valori notevoli negli oggetti come sospensioni e soluzioni colloidali con particelle di forma anisotropa. In questo caso l'effetto è legato all'azione di orientazione dei gradienti della velocità sulle particelle sospese nel fluido. Questa azione di orientazione non gode di rotazione uniforme, perciò in questo caso $\lambda_2 \ll \lambda_1$ e l'ultimo termine nella formula (102,2) può essere omesso. Quanto all'effetto descritto dal termine con λ_1, esso si chiama *effetto Maxwell*.

Per concludere sottolineiamo che il termine con λ_1 nella formula (102,2) non verifica il principio di simmetria generalizzato dei coefficienti cinetici secondo il quale deve essere $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{v}) = \varepsilon_{ki}(\omega; -\mathbf{v})$ (poiché $\mathbf{v}$ è un parametro che cambia di segno per inversione del tempo). Ma ciò, tuttavia, non è necessario. Il fatto è che la deduzione di questo principio suppone che i processi descritti dai coefficienti considerati siano l'unica sorgente di dissipazione dell'energia nel sistema. Ma in questo caso accanto alla dissipazione nel campo elettromagnetico variabile dell'onda esiste un'altra fonte di dissipazione non avente niente a che vedere con il campo, ossia l'attrito interno nel flusso di fluido non omogeneo. Dal punto di vista della teoria delle permettività generalizzate il termine con λ_1 descrive la risposta del sistema all'interazione non lineare, ossia il contributo nell'induzione proveniente contemporaneamente dal campo $\mathbf{E}$ e dai gradienti della velocità [2]). Quanto alla rotazione uniforme del fluido come un tutt'uno, essa non è legata alla dissipazione supplementare; perciò il termine con λ_2 nella formula (102,2), esistente anche per questa rotazione, verifica il principio di simmetria: $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{\Omega}) = \varepsilon_{ki}(\omega; -\mathbf{\Omega})$.

Problema

Determinare la rotazione del piano di polarizzazione di un'onda propagantesi parallelamente all'asse di un corpo dielettrico rotante.

---

[1]) Sottolineiamo in questo caso che il coefficiente non nullo $\lambda_2^{(c)}$ può esistere già nella teoria classica (non quantistica). La nota affermazione che nei limiti della teoria classica le proprietà termodinamiche dei corpi sono indipendenti dalle forze di Coriolis per rotazione uniforme (cfr. V § 34) si riferisce unicamente alle proprietà statisticamente di equilibrio. La permettività dielettrica, invece, per $\omega \neq 0$ caratterizza le proprietà cinetiche non di equilibrio dei corpi.

[2]) Esistono, in principio, altri effetti di questo tipo. Così, in un mezzo conduttore senza centro d'inversione è possibile l'esistenza in ε_{ik} di termini pseudotensoriali della forma $\delta_{ik}\mathbf{EH}$ o $H_iE_k + H_kE_i$, ove $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono due campi costanti esterni (*N.B. Baranova, J.V. Bogdanov, B.J. Zeldovič*, 1977). È importante che questi termini esprimenti formalmente la violazione del principio di simmetria siano possibili in un solo mezzo conduttore dove il campo elettrico costante conduce alla dissipazione supplementare.

Soluzione. Il problema si riduce alla definizione del vettore di girazione composto additivamente di due parti: il contributo (102,3) per variazione della permettività dielettrica e della sua dispersione, e la parte « cinetica » dovuta all'esistenza della velocità nelle relazioni (76,10-11); è quest'ultima parte che deve essere calcolata.

Nelle equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=\frac{i\omega}{c}\mathbf{B},\ \operatorname{rot}\mathbf{H}=-\frac{i\omega}{c}\mathbf{D},\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\ \operatorname{div}\mathbf{D}=0 \tag{1}$$

esprimiamo **E** e **B** in funzione di **D** e **H** in accordo con le relazioni (76,10-11) (con $\mu = 1$) e in seguito le trasformiamo; applicando alla prima equazione l'operazione rot e usando le altre equazioni otteniamo

$$\Delta\mathbf{D}+\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D}+\frac{\varepsilon-1}{c}\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{vH}]+\frac{i\omega(\varepsilon-1)}{c^2}\operatorname{rot}[\mathbf{Dv}]=0 \tag{2}$$

(qui scriviamo ε al posto di $\varepsilon^{(0)}$ come ciò si dovrebbe scrivere conformemente alle notazioni nel testo del paragrafo); poiché tutte le formule sono vere soltanto a meno dei termini del primo ordine rispetto a **v**, i termini di ordine superiore sono stati omessi.

Gli ultimi due termini nell'equazione (2) danno l'effetto cercato. Sviluppiamo questi termini sostituendovi $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$; allora

$$\operatorname{rot}[\mathbf{vH}] = -[\mathbf{H\Omega}],\quad \operatorname{rot}[\mathbf{Dv}] = [\mathbf{D\Omega}].$$

Dopo queste derivazioni la dipendenza dalle coordinate di tutte le grandezze restanti si riduce ai fattori $e^{i\mathbf{kr}}$ con $\mathbf{k} \parallel \Omega$ (secondo l'ipotesi del problema). Infine, osservando che nella approssimazione nulla rispetto a **v** abbiamo le relazioni ordinarie $\mathbf{H} = c\,[\mathbf{kE}]/\omega$ e $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, dopo un calcolo appropriato riduciamo l equazione (2) alla forma

$$\Delta\mathbf{D}+\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D}+2i\omega\frac{\varepsilon-1}{c^2}[\mathbf{D\Omega}]=0$$

ossia

$$\left(\frac{1}{n_0^2}-\frac{1}{n^2}\right)\mathbf{D}-\frac{2i(\varepsilon-1)}{\omega\varepsilon^2}[\mathbf{D\Omega}]=0, \tag{3}$$

ove $n_0^2 = \varepsilon$ e n è il coefficiente di rifrazione nel corpo rotante. Confrontando la formula (3) con le espressioni (101,11) e (101,17) troviamo che il contributo « cinematico » cercato nel vettore di girazione vale

$$2(\varepsilon-1)\,\mathbf{\Omega}/\omega$$

(*E. Fermi*, 1923). La rotazione del piano di polarizzazione dell'onda è determinata dal vettore totale

$$\mathbf{g}=\left\{\frac{2(\varepsilon-1)}{\omega}+\frac{d\varepsilon}{d\omega}+\lambda_2^{(c)}\right\}\mathbf{\Omega}.$$

È da notare che nel limite di grandi frequenze quando gli elettroni atomici nella sostanza si possono supporre liberi, ε è data dall'espressione (78,1) e i primi due termini tra parentesi si riducono reciprocamente.

Capitolo XII

DISPERSIONE SPAZIALE

§ 103. *Dispersione spaziale*

Finora nel discutere le proprietà dielettriche della sostanza abbiamo supposto che il valore dell'induzione $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ sia definito da valori dell'intensità del campo elettrico $\mathbf{E}(t', \mathbf{r})$ nello stesso punto dello spazio $\mathbf{r}$ anche se (nel caso di dispersione) non soltanto al medesimo istante ma anche in tutti gli istanti precedenti $t' \leqslant t$. Ma questa ipotesi non sempre è vera. Nel caso generale il valore $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ dipende dai valori $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$ in un dominio dello spazio attorno al punto $\mathbf{r}$. Il legame lineare fra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ si scrive allora in una forma che generalizza l'espressione (77,3):

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(t-\tau, \mathbf{r}') dV' d\tau; \quad (103,1)$$

questo legame è rappresentato qui nella forma che si riferisce anche ai mezzi anisotropi. Questo legame *non locale* riflette, come si dice, *la dispersione spaziale* (in questo proposito la dispersione ordinaria studiata nel § 77 si chiama *temporale* o *di frequenza*). Per le componenti monocromatiche del campo la cui dipendenza da t è data dal fattore $e^{-i\omega t}$, questo legame assume la forma

$$D_i(\mathbf{r}) = E_i(\mathbf{r}) + \int f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(\mathbf{r}') dV'. \quad (103,2)$$

È da notare immediatamente che nella maggioranza dei casi la dispersione spaziale gioca ruolo di gran lunga inferiore che la dispersione temporale. Il fatto è che per i dielettrici ordinari il nucleo f_{ik} dell'operatore integrale decresce notevolmente già a distanze $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ più grandi soltanto rispetto alle dimensioni atomiche a. In questo capitolo come in tutta l'esposizione precedente, considereremo i campi macroscopici, le cui medie sono calcolate rispetto ad elementi di volume fisicamente infinitesimi. Questi campi, per definizione, devono variare poco a distanza $\sim a$. Nella prima approssimazione si può portare $\mathbf{E}(\mathbf{r}') \approx \mathbf{E}(\mathbf{r})$ fuori dal segno di integrale in dV' nell'espressione (103,1) e come risultato riotteniamo la formula (77,3). In questi casi la dispersione spaziale non può rivelarsi che in forma di piccole correzioni. Ma queste correzioni, come vedremo, possono implicare fenomeni fisici qualitativamente nuovi e perciò essere importanti.

Un'altra situazione può verificarsi nei mezzi conduttori (metalli, soluzioni elettrolitiche, plasma): il moto dei portatori di corrente liberi implica non località che si estende a distanze le quali possono essere grandi rispetto alle dimensioni atomiche. In questi casi una dispersione spaziale notevole può verificarsi già nei limiti della teoria macroscopica [1]).

L'allargamento di *Doppler* della riga di assorbimento nel gas è anch'esso rivelazione della dispersione spaziale. Se un atomo immobile ha per frequenza ω_0 la riga di assorbimento di larghezza trascurabilmente piccola, allora per un atomo in moto questa frequenza si sposta per effetto Doppler di grandezza $\mathbf{kv}$, ove $\mathbf{v}$ è la velocità dell'atomo ($v \ll c$). Ciò implica nello spettro di assorbimento del gas come un tutt'uno la comparsa di una linea di larghezza $\Delta\omega \sim kv_T$, ove v_T è la velocità termica media degli atomi. A sua volta, questo allargamento significa che la permettività dielettrica del gas ha una dispersione spaziale notevole per $k \gtrsim |\omega - \omega_0|/v_T$.

Quanto alla forma della scrittura (103,1) si deve fare la seguente osservazione. Nessuna considerazione di simmetria (spaziale o temporale) può escludere la possibilità di polarizzazione elettrica del dielettrico nel campo magnetico non uniforme variabile. Può sorgere la domanda: non si deve completare il secondo membro dell'uguaglianza (103,1) o (103,2) con un termine contenente il campo magnetico? Ma ciò non è necessario in quanto i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non si possono supporre completamente indipendenti. Essi sono reciprocamente legati (nel caso monocromatico) mediante l'equazione $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}$. In virtù di questa uguaglianza, la dipendenza di $\mathbf{D}$ da $\mathbf{B}$ si può considerare come dipendenza dalle derivate spaziali di $\mathbf{E}$, cioè come una delle rivelazioni della non località.

Se è tenuto conto della dispersione spaziale, in molti casi è opportuno scrivere le equazioni di Maxwell, senza perdere di generalità della teoria, nella seguente forma:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{103,3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \tag{103,4}$$

---

[1]) Le condizioni per cui si può trascurare la dispersione spaziale nel caso di un mezzo isotropo conduttore possono essere diverse per le permettività trasversale e longitudinale. Nel primo caso da distanza caratteristica r_0 alla quale il nucleo dell'integrale nell'espressione (103,2) è non nullo funge la più piccola delle grandezze v/ω o l, ove v è la velocità media dei portatori di corrente e l la lunghezza del loro cammino libero. Per la permettività longitudinale r_0 coincide con la più piccola delle grandezze v/ω o $(lv/\omega)^{1/2}$ (quest'ultima lunghezza è la distanza percorsa dai portatori di corrente lungo il campo per conto della diffusione durante il tempo $\sim 1/\omega$; il coefficiente di diffusione è $D \sim lv$). La dispersione spaziale è trascurabile se $kr_0 \ll 1$.

senza introdurre accanto all'intensità media del campo magnetico $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$ un'altra grandezza di $\mathbf{H}$. Invece, tutti i termini che compaiono dopo il calcolo della media di correnti microscopiche sono supposti inclusi nella definizione di $\mathbf{D}$. La divisione precedente della corrente media in due parti secondo la formula (79,3), in generale, non è univoca. Se non esiste dispersione spaziale essa è fissata dalla condizione che $\mathbf{P}$ sia polarizzazione elettrica localmente legata con $\mathbf{E}$. Se questo legame non esiste è comodo porre $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ e

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \tag{103,5}$$

cui corrisponde la rappresentazione delle equazioni di Maxwell nella forma (103,3-4) [1]).

Le componenti del tensore f_{ik} (ω; $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$), che è il nucleo dell'operatore nella (103,2), verificano le relazioni di simmetria

$$f_{ik}(\omega;\ \mathbf{r},\ \mathbf{r}') = f_{ki}(\omega;\ \mathbf{r}',\ \mathbf{r}). \tag{103,6}$$

Ciò deriva dalle stesse considerazioni usate nel § 96 per il tensore $\varepsilon_{ik}(\omega)$. L'unica differenza è che la permutazione degli indici a, b nelle suscettività generalizzate α_{ab}, corrispondente alla permutazione sia degli indici tensoriali i, k che dei punti $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$, implica ora la permutazione delle variabili indipendenti corrispondenti nelle funzioni f_{ik} (ω; $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$) [2]).

Nel seguito considereremo un mezzo macroscopicamente omogeneo illimitato. In questo caso il nucleo dell'operatore integrale nell'espressione (103,1) o (103,2) dipende esclusivamente dalla differenza $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Allora è opportuno sviluppare le funzioni $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ in integrale di Fourier non soltanto rispetto al tempo, ma anche rispetto alle coordinate riducendole all'insieme di onde piane la cui dipendenza da $\mathbf{r}$ e t è data dal fattore $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$. Per queste onde il legame fra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ assume la forma

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega,\ \mathbf{k})\, E_k, \tag{103,7}$$

---

[1]) In questo caso, s'intende, si tratta dei corpi non ferromagnetici. Sottolineiamo anche che nel seguito considereremo soltanto i mezzi omogenei illimitati e non discuteremo la questione sulla forma delle condizioni di frontiera delle equazioni.

Si noti anche che nello spirito di quanto detto si può trattare da un altro punto di vista l'affermazione fatta nel § 79 che la permeabilità μ nel dominio di frequenze ottiche perde significato. In questo dominio gli effetti dovuti alla permeabilità magnetica diversa da 1 non si distinguono, in generale, dagli effetti della dispersione spaziale della permettività dielettrica.

[2]) Come sempre, nell'applicare il principio di simmetria generalizzato dei coefficienti cinetici, se il corpo si trova nel campo magnetico esterno o gode della struttura magnetica, il secondo membro della relazione (103,6) deve essere considerato per il campo a segno cambiato o per una struttura invertita rispetto al tempo.

ove

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau, \boldsymbol{\rho})\, e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\boldsymbol{\rho})} d^3\rho d\tau. \qquad (103,8)$$

Con questa descrizione la dispersione spaziale si riduce alla comparsa della dipendenza del tensore di permettività dielettrica dal vettore d'onda.

La « lunghezza d'onda » $1/k$ determina le distanze alle quali il campo varia notevolmente. Si può quindi affermare che la dispersione spaziale è espressione della dipendenza delle proprietà macroscopiche della sostanza dalla disuniformità spaziale del campo elettromagnetico, così come la dispersione di frequenza esprime la dipendenza dalla variazione temporale del campo. Per $k \to 0$ il campo tende all'uniformità per cui $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{k})$ tende alla permeabilità ordinaria $\varepsilon_{ik}(\omega)$ [1]).

Dalla definizione (103,8) si vede che

$$\varepsilon_{ik}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon^*_{ki}(\omega, \mathbf{k}) \qquad (103,9)$$

è una relazione che generalizza la formula (77,7). Quanto alla simmetria (103,6), essendo espressa nei termini delle funzioni $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ essa dà ora

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, -\mathbf{k}; -\mathfrak{H}), \qquad (103,10)$$

ove è scritto in forma esplicita il parametro $\mathfrak{H}$, ossia il campo magnetico esterno qualora esso esista. Se il mezzo gode del centro di inversione, le componenti di ε_{ik} sono funzioni pari del vettore $\mathbf{k}$; quanto al vettore assiale, esso non cambia per inversione e quindi l'uguaglianza (103,10) si riduce a

$$\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, \mathbf{k}; -\mathfrak{H}). \qquad (103,11)$$

La dispersione spaziale non incide sulla deduzione della formula (96,5) esprimente la dissipazione dell'energia. Perciò la condizione della mancanza di assorbimento si esprime, come precedentemente, dal carattere hermitiano del tensore $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$.

Se la dispersione spaziale esiste, la permettività dielettrica è un tensore (e non scalare) anche nel mezzo isotropo: la direzione fissata si crea dal vettore d'onda. Se il mezzo non è soltanto isotropo ma gode anche del centro d'inversione, il tensore ε_{ik} può essere composto delle sole componenti del vettore $\mathbf{k}$ e del tensore unitario δ_{ik} (se il centro di simmetria non esiste può essere possibile anche

[1]) Più precisamente, la dipendenza da $\mathbf{k}$ scompare per $kr_0 \ll 1$, ove r_0 sono dimensioni del dominio in cui la funzione $f_{ik}(\omega, \rho)$ è sensibilmente non nulla.

l'esistenza di un termine con il tensore unitario antisimmetrico e_{ikl}; cfr. § 104). La forma generale di questo tensore si può scrivere così:

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k)\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right) + \varepsilon_l(\omega, k)\frac{k_i k_k}{k^2}, \qquad (103,12)$$

ove ε_t e ε_l dipendono unicamente dal valore assoluto del vettore d'onda (e da ω). Se l'intensità $\mathbf{E}$ è diretta lungo il vettore d'onda, allora l'induzione $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$; se invece $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, allora $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$. Le grandezze ε_l e ε_t si chiamano *permettività longitudinale* e *trasversale*, rispettivamente. Per $\mathbf{k} \to 0$ l'espressione (103,12) deve tendere al valore $\varepsilon(\omega)\,\delta_{ik}$ indipendente dalla direzione $\mathbf{k}$; è chiaro perciò che

$$\varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \qquad (103,13)$$

La descrizione delle proprietà elettromagnetiche di un mezzo isotropo mediante le permettività ε_l e ε_t corrisponde alle equazioni di Maxwell scritte nella forma (103,3-4). D'altra parte, per $\mathbf{k} \to 0$, quando la dispersione spaziale scompare, si può tornare alla descrizione mediante la permettività ε e la permeabilità μ. Perciò tra le une e le altre grandezze esiste un determinato legame (cfr. il problema 1).

L'analogia tra le formule (103,8) e (77,5) consente di estendere a ciascuna delle componenti di $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ quale funzione della variabile complessa ω le proprietà analitiche studiate nei §§ 77, 82. Esse sono funzioni analitiche senza singolarità nel semipiano superiore ω e verificano (per ogni $\mathbf{k}$ fissato) le relazioni dispersive di Kramers-Kronig. Si può dire lo stesso delle funzioni $\varepsilon_l(\omega, k)$ e $\varepsilon_t(\omega, k)$ nella (103,12). In questo caso si deve tener conto che la funzione ε_l per $k \neq 0$ non tende all'infinito per $\omega \to 0$ neanche nel mezzo conduttore, perciò la sottrazione (necessaria per la deduzione della formula (82,9)) qui non è indispensabile; ciò che $\varepsilon(\omega)$ diventa infinita nel conduttore per $\omega \to 0$ è dovuto all'uniformità ($\mathbf{k} = 0$) del campo statico.

La densità media rispetto al tempo (nel senso specificato nel § 80) dell'energia del campo elettromagnetico in un mezzo trasparente con dispersione spaziale si esprime mediante la stessa formula (96,6); poiché ora $\mu \equiv 1$ si ha

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega} E_i E_k^* + |\mathbf{B}|^2\right] \qquad (103,14)$$

($\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono supposte rappresentate nella forma complessa). Nella densità del flusso di energia in questo mezzo compare un termine additivo

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{B}] - \frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}} E_i^* E_k. \qquad (103,15)$$

Questa formula si deduce generalizzando la deduzione dell'espressione (80,11): ora si deve considerare un'onda sparpagliata sia in un piccolo

intervallo di frequenze sia nelle direzioni del vettore d'onda (cfr. il problema 2).

Problemi

1. Trovare il legame tra le funzioni $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ e valori limite delle funzioni $\varepsilon_l(\omega, k)$, $\varepsilon_t(\omega, k)$ per $k \to 0$.

Soluzione. Confrontiamo le formule (103,5) e (79,3) esprimenti le medie del flusso microscopico $\overline{\rho \mathbf{v}}$. Nel primo caso per il campo monocromatico abbiamo

$$\overline{\rho v_i} = -\frac{i\omega}{4\pi}[\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ik}]E_k,$$

e nel secondo caso

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = -\frac{i\omega}{4\pi}[\varepsilon(\omega) - 1]\mathbf{E} + \frac{ic}{4\pi}[\mu(\omega) - 1][\mathbf{kH}].$$

Sostituendo nella prima espressione $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ dalla formula (103,12) e nella seconda $\mathbf{H} = (c/\omega\mu)[\mathbf{kE}]$ in accordo con l'equazione di Maxwell, uguagliamo ambedue le espressioni (per $k \to 0$); come risultato otteniamo

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{k \to 0} \frac{\varepsilon_t(\omega, k) - \varepsilon_l(\omega, k)}{k^2}$$

(ciò si ottiene dal confronto dei termini con $\mathbf{k}(\mathbf{kE})$). Assieme alla già nota uguaglianza (103,13) questa formula stabilisce il legame richiesto.

2. Dedurre la formula (103,15) esprimente la densità media (rispetto al tempo) del flusso di energia in un mezzo con la dispersione spaziale.

Soluzione. Partiamo, come nel § 80, dall'uguaglianza (80,2) ponendovi $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ (conformemente alla descrizione del campo data dalle equazioni (103,3-4)), rappresentando tutte le grandezze nella forma complessa e calcolandone le medie rispetto al tempo:

$$-\operatorname{div}\frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}[\mathbf{EH}^*] = \frac{1}{8\pi}\operatorname{Re}\left(\mathbf{E}^*\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}^*\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right). \tag{1}$$

Consideriamo un'onda piana quasi-monocromatica in cui

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t)},$$

ove $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ è una funzione lentamente variabile nello spazio e con il tempo. Scriviamo la derivata $\partial D_i/\partial t$ nella forma $\hat{f}_{ik}E_k$ introducendo l'operatore

$$\hat{f}_{ik} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\varepsilon}_{ik}; \tag{2}$$

quando esso agisce su un'onda rigorosamente monocromatica nel tempo e nello spazio abbiamo

$$\hat{f}_{ik}E_k = f_{ik}E_k = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})E_k.$$

Sviluppando $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ in integrale di Fourier rispetto al tempo e alle coordinate, rappresentiamo questa funzione come sovrapposizione di componenti della forma

$$\mathbf{E}_{0\alpha\mathbf{q}}e^{i(\mathbf{qr} - \alpha t)},$$

ove $\alpha \ll \omega_0$, $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}_0$. In seguito procediamo come nel dedurre la formula (80,10). Applicando l'operatore (2) alla funzione

$$\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\ \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{0\alpha\mathbf{q}} \exp\left[i\left(\mathbf{k}_0+\mathbf{q}\right)\mathbf{r} - i\left(\omega_0+\alpha\right)t\right],$$

scriviamo

$$\hat{f}_{ik}\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\ \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} = f_{ik}\left(\omega_0+\alpha,\ \mathbf{k}_0+\mathbf{q}\right)\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\ \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} \approx$$

$$\approx \left[f_{ik}\left(\omega_0,\ \mathbf{k}_0\right) + \alpha\frac{\partial f_{ik}\left(\omega_0,\ \mathbf{k}_0\right)}{\partial\omega_0} + \mathbf{q}\frac{\partial f_{ik}\left(\omega_0,\ \mathbf{k}_0\right)}{\partial\mathbf{k}_0}\right]\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha,\ \mathbf{k}_0+\mathbf{q}}.$$

Eseguendo ora la sommatoria inversa delle componenti di Fourier, sostituendovi $f_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ e omettendo l'indice 0 in ω_0 e $\mathbf{k}_0$, otteniamo

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_{ik}E_k + \left[\frac{\partial\left(\omega\varepsilon_{ik}\right)}{\partial\omega}\frac{\partial E_{0k}}{\partial t} - \omega\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}}\nabla E_{0k}\right]e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{3}$$

Il secondo termine tra parentesi quadre fa distinguere questa espressione dalla formula (80,10). Sostituendo l'espressione (3) nell'uguaglianza (1), riduciamo quest'ultima alla formula esprimente la legge di conservazione dell'energia

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial t} = -\operatorname{div}\overline{\mathbf{S}}$$

con $\overline{U}$ e $\overline{\mathbf{S}}$ dalle formule (103,14-15).

§ 104. *Attività ottica naturale*

Se la dispersione spaziale è debole, il tensore $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ si può sviluppare in potenze di $\mathbf{k}$. Per i mezzi dielettrici condensati ordinari questo sviluppo si fa in potenze di a/λ, ove a sono le dimensioni atomiche e λ la lunghezza d'onda del campo.

Lo sviluppo di questo tipo, a meno degli infinitesimi del primo ordine, ha la forma

$$\varepsilon_{ik}(\omega,\ \mathbf{k}) = \varepsilon_{ik}^{(0)}(\omega) + i\gamma_{ikl}k_l, \tag{104,1}$$

ove $\varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$ e γ_{ikl} è un tensore del terzo ordine dipendente dalla frequenza (per $\omega \to 0$ le componenti di questo tensore non legate a nessun sviluppo in ω tendono a valori costanti). Corrispondente alla permettività (104,1) il legame tra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ nel campo monocromatico ($\sim e^{-i\omega t}$) ha nella rappresentazione delle coordinate la seguente forma:

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)}E_k + \gamma_{ikl}\frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \tag{104,2}$$

Applicando all'espressione (104,1) la condizione di simmetria (103,10) troviamo (se non esiste campo esterno) che

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \tag{104,3}$$

Quanto alla condizione del carattere hermitiano senza dissipazione, essa dà $\gamma_{ikl}^* = -\gamma_{kil}$; oltre all'espressione (104,3) di qui

ricaviamo che $\gamma^*_{ikl} = \gamma_{ikl}$. In tal modo, la condizione della mancanza di assorbimento chiede che il tensore γ_{ikl} sia reale.

Se mediante le notazioni introdotte nel § 97 rappresentiamo il vettore d'onda di un'onda piana nella forma $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, l'espressione (104,1) si scriverà nella forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + i\,\frac{\omega}{c}\,\gamma_{ikl}n_l. \tag{104,4}$$

Introduciamo al posto del tensore antisimmetrico del secondo ordine $\gamma_{ikl}n_l$ il *vettore* assiale di *girazione* $\mathbf{g}$ che gli è duale mediante la relazione

$$\frac{\omega}{c}\,\gamma_{ikl}n_l = e_{ikl}g_l, \tag{104,5}$$

cioè scriviamo ε_{ik} nella forma

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + ie_{ikl}g_l, \tag{104,6}$$

coincidente con la forma della scrittura usata nel § 101. La distinzione è che là il vettore $\mathbf{g}$ dipendeva dalle sole proprietà del mezzo (e del campo magnetico applicato), mentre qui il vettore di girazione dipende ugualmente dal vettore d'onda del campo. Secondo la formula (104,5) le componenti di questo vettore sono funzioni lineari delle componenti di $\mathbf{n}$, ossia

$$g_i = g_{ik}n_k. \tag{104,7}$$

Sostituendo la (104,7) nella (104,5) troviamo

$$\frac{\omega}{c}\,\gamma_{ikl}n_l = e_{ikm}g_{ml}n_l,$$

e di qui, essendo $\mathbf{n}$ arbitrario,

$$\frac{\omega}{c}\,\gamma_{ikl} = e_{ikm}g_{ml}, \tag{104,8}$$

con ciò si stabilisce il legame fra componente del tensore autentico del terzo ordine γ_{ikl} e dello pseudotensore del secondo ordine g_{ik} [1]).

Simmetria cristallografica concreta del corpo pone determinate limitazioni sulle componenti del tensore γ_{ikl} (o g_{ik}) e, in particolare, può implicare l'annullamento identico di tutte le componenti. Così, il tensore γ_{ikl} non può esistere per corpi che godono del centro di simmetria. Infatti, per cambiamento di segno di tutte e tre le coordinate (per inversione) tutte le componenti del tensore del terzo ordine (e, rispettivamente, dello pseudotensore del secondo ordine)

---

[1]) Nelle componenti

$$g_{xx} = \frac{\omega}{c}\,\gamma_{yzx},\quad g_{xy} = \frac{\omega}{c}\,\gamma_{yzy},\quad g_{yx} = \frac{\omega}{c}\,\gamma_{zxx}\ \text{ecc.}$$

cambiano di segno mentre la simmetria del corpo chiederebbe che esse fossero immutate per questa trasformazione.

Se i corpi hanno il tensore g_{ik} non nullo si dice che essi godono di *attività ottica naturale* o di *girotropia naturale*. In tal modo, l'esistenza dell'attività ottica chiede in ogni caso che il corpo sia privo di centro di simmetria.

Consideriamo dapprima l'attività ottica naturale dei corpi isotropi. Se un liquido (o un gas) è composto di sostanza priva di stereoisomeria, esso è simmetrico non soltanto rispetto a ogni rotazione, ma anche rispetto alla riflessione (inversione) in qualsiasi punto per cui in esso è esclusa attività ottica naturale. Otticamente sono attivi i soli liquidi di sostanze con due forme di stereoisomeria, fra l'altro, entrambi gli isomeri devono figurare nel liquido in quantità diverse: questo tipo di liquido non gode di centro di simmetria.

Nei corpi isotropi (così come nei cristalli a simmetria cubica) lo pseudotensore g_{ik} si riduce allo pseudoscalare

$$g_{ik} = f\delta_{ik}, \quad \gamma_{ikl} = \frac{c}{\omega} f e_{ikl}, \tag{104,9}$$

che è una grandezza che cambia di segno per inversione delle coordinate. Due stereoisomeri si trasformano formalmente l'uno nell'altro in seguito all'inversione; perciò i loro valori della grandezza f hanno segno opposto.

Quindi, il vettore di girazione di un corpo isotropo otticamente attivo è $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$ e il legame fra induzione e intensità del campo elettrico dell'onda si esprime mediante la formula

$$\mathbf{D} = \varepsilon^{(0)}\mathbf{E} + if\,[\mathbf{En}]. \tag{104,10}$$

Poiché $\mathbf{Dn} = 0$, ne segue che anche $\mathbf{En} = 0$. In altre parole, in questa onda è trasversale (rispetto alla direzione $\mathbf{n}$) non soltanto l'induzione $\mathbf{D}$, come in qualsiasi mezzo, ma anche l'intensità $\mathbf{E}$.

Se è tenuto conto dell'attività naturale della sostanza, il cambiamento dell'indice di rifrazione n è piccola grandezza. Quindi per la sua determinazione si può porre $n = n_0 = \sqrt{\varepsilon^{(0)}}$ nel piccolo termine $[\mathbf{Eg}]$ nella formula (104,10). Allora il problema del calcolo della differenza $n - n_0$ coincide formalmente con il problema della variazione di n sotto influsso del campo magnetico considerato nel § 101; l'unica differenza è nel senso del vettore $\mathbf{g}$ e che quest'ultimo è sempre parallelo alla direzione $\mathbf{n}$ (asse z nel § 101). Quindi, per analogia con la formula (101,19) possiamo scrivere immediatamente

$$n_\pm^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm f n_0. \tag{104,11}$$

A questi due valori corrispondono (cfr. la relazione (101,21)) le seguenti relazioni tra le due componenti del vettore $\mathbf{E}$ (o $\mathbf{D}$):

$$E_x = \pm i E_y, \tag{104,12}$$

cioè la polarizzazione circolare sinistra e destra delle onde. È da notare anche che il modulo del vettore **n** è indipendente dalla sua direzione; perciò le direzioni di **n** e del vettore radiale **s** coincidono.

Vediamo così che le proprietà ottiche di un corpo isotropo ad attività naturale sono simili a proprietà acquistate da un corpo inattivo nel campo magnetico quando quest'ultimo gode della birifrangenza circolare, mentre per propagazione in esso di un'onda polarizzata linearmente ruota il suo piano di polarizzazione. L'angolo di rotazione di unità di lunghezza del cammino percorso dal raggio vale $\omega f/2c$.

In due modificazioni stereoisomere della sostanza la costante f e la direzione della rotazione hanno segno opposto per cui si parla degli *stereoisomeri destro-* e *levogiro*.

A differenza della rotazione del piano di polarizzazione nel campo magnetico la grandezza e il segno della rotazione nelle sostanze naturalmente attive non dipendono dalla direzione di propagazione del raggio. Perciò, se un raggio luminoso polarizzato linearmente percorre due volte (di andata e di ritorno) un medesimo cammino nel mezzo naturalmente attivo esso in seguito sarà polarizzato nel piano iniziale.

Passiamo ora ai cristalli ad attività naturale . Senza soffermarci qui su un'analisi sistematica di tutti i casi possibili della simmetria (cfr. il problema di questo paragrafo) osserviamo che l'attività naturale è esclusa dall'esistenza del centro di simmetria, ma essa è possibile se esiste il piano di simmetria o l'asse di rotazione speculare. Sottolineiamo che le condizioni di esistenza dell'attività naturale nei cristalli non coincidono, quindi, con le condizioni le quali ammettono che i cristalli esistano in due forme isomeriche speculari (*enantiomorfe*); quest'ultimi sono più rigidi e richiedono la non esistenza sia del centro che del piano di simmetria. In tal modo il cristallo può essere attivo e, al tempo stesso, non coincidere con la propria immagine speculare.

In un cristallo ad attività naturale (uni- o biassico) per propagazione della luce con il vettore d'onda diretto arbitrariamente praticamente abbiamo a che fare con la birifrangenza delle onde polarizzate linearmente; se si tiene conto dell'attività ciò si riduce principalmente alla sostituzione della polarizzazione lineare rigorosa con quella ellittica e un rapporto tra assi infinitesimo (del primo ordine).

Fanno eccezione le sole direzioni degli assi ottici lungo i quali, a prescindere dall'attività, le due radici dell'equazione di Fresnel coincidono. In queste direzioni il fenomeno di attività naturale dei cristalli è analogo all'attività dei corpi isotropi; vale a dire che si verificano la birifrangenza circolare del primo ordine e rispettivamente la rotazione del piano di polarizzazione delle onde polarizzate linearmente. Per deviazione del vettore d'onda dalla direzione dell'asse ottico questi fenomeni decrescono rapidamente.

Per un calcolo quantitativo dei fenomeni di attività naturale

nei cristalli è più comodo usare non l'espressione di **D** in funzione di **E**, bensì le formule inverse esprimenti **E** in funzione di **D** (come è stato fatto nel § 101). Queste formule a meno delle grandezze del primo ordine sono

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{(0)-1} D_k + i\,[\mathbf{DG}]_i, \tag{104,13}$$

ove il vettore **G** è legato con il vettore **g** introdotto prima mediante la relazione

$$G_i = -\frac{1}{|\varepsilon^{(0)}|}\,\varepsilon_{ik}^{(0)}\,g_k$$

(cfr. la formula (101,9)). Per coincidenza formale di questa espressione con quella (101,7) le equazioni (101,11-12) restano anch'esse immutate. G_z in queste equazioni è la proiezione del vettore **G** sulla direzione **n**. Se rappresentiamo **G** nella forma

$$G_i = G_{ik} n_k \tag{104,14}$$

(analoga alla formula (104,7)) questa proiezione è proporzionale a

$$\mathbf{nG} = G_{ik} n_i n_k. \tag{104,15}$$

È questa forma quadratica a determinare le proprietà ottiche dei cristalli ad attività naturale. Il tensore G_{ik} di per se stesso non deve essere necessariamente simmetrico, ma se lo dividiamo in parti simmetrica e antisimmetrica, nella costruzione della forma (104,15) la parte antisimmetrica scompare. Perciò nello studio delle proprietà ottiche dei cristalli ad attività naturale si può supporre simmetrico il tensore G_{ik}.

Problema

Trovare le limitazioni imposte dalla simmetria cristallina alle componenti del tensore G_{ik}.

Soluzione. Per ogni rotazione lo pseudotensore G_{ik} si comporta come se fosse tensore vero e proprio; in particolare, l'esistenza di un asse di simmetria del ordine superiore al secondo conduce, come per un tensore simmetrico autentico del secondo ordine, all'isotropia totale nel piano perpendicolare all'asse. Quanto al comportamento dello pseudotensore G_{ik}, esso per riflessioni è caratterizzato dalla sua dualità a un tensore autentico del terzo ordine, vale a dire che per ogni riflessione che cambia il segno di una componente del tensore autentico del secondo ordine la stessa componente di G_{ik} resta immutata, e viceversa. Così, per riflessione nel piano yz le componenti G_{xx}, G_{zz}, G_{yz} cambiano di segno mentre le componenti G_{xy} e G_{xz} restano immutate.

Più avanti saranno indicate le componenti non nulle del tensore G_{ik} per tutte le classi cristalline che ammettono l'attività naturale. L'asse z è supposto coincidente con l'asse di simmetria del terzo, quarto o del sesto ordine oppure con l'unico asse del secondo ordine (nelle classi C_2, C_{2v}), mentre nella classe C_s esso è perpendicolare al piano di simmetria; se esistono tre assi di simmetria mutuamente perpendicolari con essi coincidono gli assi coordinati.

Classe C_1: tutte le componenti di G_{ik}.

Classe C_2: G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}, G_{xy}; con gli assi x, y diretti in modo appropriato si può annullare G_{xy}.

Classe C_s: G_{xz}, G_{yz}; con gli assi x, y diretti in modo appropriato si può annullare una di queste grandezze.

Classe C_{2v}: G_{xy} (piani xz e yz coincidono con i piani di simmetria).

Classe D_2: G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}.

Classi C_3, C_4, C_6, D_3, D_4, D_6 : $G_{xx} = G_{yy}$, G_{zz}.

Classe S_4 : $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy}; con gli assi x, y diretti in modo appropriato si può annullare una di queste grandezze.

Classe D_{2d} : G_{xy} (gli assi x, y giacciono nei piani verticali di simmetria).

Classi T, O: $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

È da notare che nei cristalli uniassici delle classi S_4 e D_{2d} lo scalare (104,15) si annulla se il vettore $\mathbf{n}$ è diretto lungo l'asse z poiché $G_{zz} = 0$. Ciò vuol dire che in questi cristalli non si verificano effetti di attività naturale lungo l'asse ottico.

Nei cristalli biassici della classe C_{2v} gli assi ottici appartengono a uno dei piani di simmetria. Ma per i vettori $\mathbf{n}$ giacenti nei piani xz o yz lo scalare (104,15) in questo caso si annulla anch'esso in modo che anche qui non si verificano effetti di attività naturale lungo gli assi ottici. L'unica classe cristallina a consentire il fenomeno di rotazione del piano di polarizzazione lungo l'asse ottico e a non ammettere al tempo stesso l'enantiomorfismo è la classe monoclina C_s.

§ 105. *Dispersione spaziale nei mezzi otticamente inattivi*

Nei cristalli la cui simmetria non consente l'attività ottica naturale i primi (dopo lo zero) termini di sviluppo della permettività $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ in potenze di $\mathbf{k}$ sono quadratici.

Come si suole fare nell'ottica dei cristalli, nel seguito è più comodo scrivere questo sviluppo per il tensore inverso $\eta_{ik} = \varepsilon_{ik}^{-1}$. Scriviamo questo tensore nella forma

$$\eta_{ik} = \eta_{ik}^{(0)}(\omega) + \beta_{iklm}(\omega)\, k_l k_m. \tag{105,1}$$

Si può supporre il tensore β_{iklm} simmetrico rispetto alla seconda coppia degli indici poiché esso si moltiplica per il prodotto simmetrico $k_l k_m$. In virtù dell'espressione (103,10) (con $\mathfrak{H} = 0$) il tensore β_{iklm} è simmetrico anche rispetto alla prima coppia degli indici:

$$\beta_{iklm} = \beta_{kilm} = \beta_{ikml}. \tag{105,2}$$

Tuttavia, esso non deve essere simmetrico rispetto alla permutazione di ambedue le coppie. Se non esiste assorbimento dal carattere hermitiano del tensore η_{ik} e dalla sua simmetria segue che il tensore β_{iklm} è reale, ciò che sarà supposto più avanti.

Nel mezzo isotropo il tensore β_{iklm} va espresso in funzione di tensore unitario, cioè ha la forma

$$\beta_{iklm} = \beta_1 \delta_{ik}\delta_{lm} + \frac{\beta_2}{2}(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{im});$$

esso contiene le sole due componenti indipendenti. Nel corpo isotropo si ha anche $\eta_{ik}^{(0)} = \eta^{(0)}\delta_{ik}$ e, quindi, il tensore (105,1) assume la forma

$$\eta_{ik} = (\eta^{(0)} + \beta_1 k^2)\,\delta_{ik} + \beta_2 k_i k_k \tag{105,3}$$

conformemente all'espressione generale (103,12) per il tensore dielettrico nel mezzo isotropo con dispersione spaziale. La propagazione delle onde nel mezzo è determinata dalle equazioni (97,21). Ma sostituendovi (105,3) il termine anisotropo con β_2 scompare per ortogonalità dei vettori **D** e **k** nell'onda piana, vale a dire che il mezzo rimane, come deve essere, otticamente isotropo.

Ma nei cristalli cubici il tensore β_{iklm} non si riduce a quello unitario; a seconda della classe cristallina esso ha per questi cristalli 3 e 4 componenti indipendenti. A prescindere dalla dispersione spaziale i cristalli cubici sono otticamente isotropi. Se si tiene conto della dispersione quadratica rispetto a **k**, ciò implica la comparsa in questi cristalli di una proprietà nuova, ossia dell'anisotropia ottica (*H.A.Lorentz*, 1878).

Nel cristallo cubico abbiamo $\eta_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}/\varepsilon^{(0)}$ e lo sviluppo (105,1) assume la forma

$$\eta_{ik} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\delta_{ik} + \beta_{iklm}k_l k_m. \tag{105,4}$$

Sostituendo questa espressione nelle equazioni (97,21) otteniamo

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta 33}\right] D_\beta = 0, \tag{105,5}$$

ove $n_0^2 = \varepsilon^{(0)}$ e l'asse x_3 del sistema di coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3 è diretto lungo il vettore d'onda. Secondo il significato dello sviluppo (105,4), il secondo termine tra parentesi quadre nella (105,5) si deve considerare come piccola correzione (per caso singolare di annullamento di $1/n_0^2$ si veda il § 106). Allora in questo termine si può sostituire n^2 con n_0^2:

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n_0^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta 33}\right] D_\beta = 0. \tag{105,6}$$

Queste equazioni hanno la stessa forma di quelle per le onde in cristalli non cubici a prescindere dalla dispersione spaziale. Il loro determinante rappresenta un'equazione quadratica rispetto a n^{-2} esprimente gli indici di rifrazione di due onde con una medesima direzione **k** ma con polarizzazioni diverse. Quindi, la dispersione spaziale nei cristalli cubici elimina la « degenerazione rispetto alla polarizzazione », vale a dire che le velocità delle due onde divengono distinte e dipendenti dalla direzione.

Alla fine del § 84 è stata indicata la possibilità di esistenza delle onde elettromagnetiche longitudinali nel mezzo isotropo trasparente. Una formulazione conseguente della condizione che determina il legame tra frequenza e vettore d'onda (legge di dispersione) di queste onde chiede che sia tenuto conto della dispersione spaziale, e cioè

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \tag{105,7}$$

Per k piccoli la soluzione di questa equazione ha la forma

$$\omega(k) = \omega_{l0} + \frac{1}{2}\alpha k^2, \tag{105,8}$$

ove α è costante e ω_{l0} il valore della frequenza che annulla la permettività $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega, 0)$. In questo caso la velocità di propagazione dell'onda

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\alpha\mathbf{k} \tag{105,9}$$

è proporzionale alla prima potenza del vettore d'onda.

Problema

Trovare le relazioni tra le componenti del tensore β_{iklm} nei cristalli non girotropi del sistema cubico.

Soluzione. La girotropia naturale non esiste nelle classi cristalline T_d, T_h, O_h.

Nelle classi T_d e T_h con gli assi x, y, z intendiamo i tre assi di simmetria del secondo ordine. Le componenti del tensore non nulle sono

$$\beta_1 \equiv \beta_{xxxx} = \beta_{yyyy} = \beta_{zzzz}, \quad \beta_2 \equiv \beta_{xxzz} = \beta_{yyxx} = \beta_{zzyy},$$
$$\beta_3 \equiv \beta_{xyxy} = \beta_{yzyz} = \beta_{zxzx}, \quad \beta_4 \equiv \beta_{zzxx} = \beta_{xxyy} = \beta_{yyzz}.$$

Nella classe O_h tre assi C_2 divengono assi C_4 per cui si ha in più $\beta_2 = \beta_4$.

§ 106. Dispersione spaziale in prossimità della linea di assorbimento

Nei due paragrafi precedenti abbiamo considerato effetti della dispersione spaziale come piccole correzioni, ciò che di solito si avvera. Tuttavia, la situazione cambia in prossimità di una stretta linea di assorbimento nei cristalli ove, secondo l'(84,7), $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ cresce bruscamente. La dispersione spaziale in questa regione cambia il quadro anche qualitativamente.

Infatti, se si associano alla permettività dielettrica termini di potenza di k aumenta l'ordine dell'equazione algebrica dispersiva che definisce la dipendenza funzionale $k(\omega)$. Perciò una sua soluzione formale implica la comparsa di radici addizionali. Lontano dalla linea di assorbimento queste radici giacciono nel dominio di grandi k, cioè al di fuori del dominio di applicabilità della teoria e perciò vanno omesse. Ma in prossimità della linea di assorbimento la permettività varia notevolmente già per k piccoli e possono comparire delle radici supplementari aventi significato fisico reale, cioè compaiono delle onde trasversali nuove.

Per semplicità, limitiamoci alla considerazione dei soli mezzi isotropi e cominciamo dal caso in cui il mezzo considerato non è girotropo, cioè non gode dell'attività ottica naturale (*S.I. Pekar*, 1957; *V.L. Ginsburg*, 1958).

Come è stato detto nel paragrafo precedente, ogni mezzo isotropo resta otticamente isotropo anche se si tiene conto della dispersione spaziale. Ciò vuol dire che la legge di dispersione delle onde elettromagnetiche trasversali in questo mezzo è data da un'equazione ordinaria $n^2 = \varepsilon$ in cui con ε si deve intendere la permettività trasversale ε_t, ossia

$$n^2 = \varepsilon_t(\omega, k). \tag{106,1}$$

È stato detto nel § 103 che $\varepsilon_t(\omega, k)$ e $\varepsilon_l(\omega, k)$ quali funzioni della frequenza verificano le stesse equazioni di Kramers-Kronig che la funzione $\varepsilon(\omega)$ senza dispersione spaziale. Perciò si può affermare che in prossimità della linea di assorbimento la funzione $\varepsilon_t(\omega, k)$ ha la stessa forma come nell'espressione (84,7) ma con costanti dipendenti da k; scriviamola nella forma

$$\varepsilon_t(\omega, k) = \frac{A(k)}{\omega_t(k) - \omega}, \quad A(k) > 0.$$

Se la grandezza A è relativamente piccola [1]), sarebbe opportuno tener conto, oltre al termine polare, anche del termine costante indipendente da ω in ε_t; indichiamolo con $a(k)$ e supponiamo che $a > 0$, cioè che lontano dalla linea di assorbimento il mezzo sia otticamente trasparente. L'ipotesi teorica di tener conto simultaneamente dei termini costante e polare in ε_t richiede che questi ultimi siano paragonati l'uno con l'altro nel dominio di frequenze $|\omega - \omega_t| \ll \omega_t$ in cui è applicabile l'espressione polare; in altre parole, deve essere $A \ll a\omega_t$.

Poiché k è sempre supposto piccolo, si può sviluppare le funzioni in sue potenze. In questo caso è sufficiente sostituire $a(k)$ e $A(k)$ con valori costanti $a \equiv a(0) > 0$, $A \equiv A(0) > 0$ lasciando il termine correttivo soltanto nello sviluppo della funzione $\omega_t(k)$ in piccola differenza $\omega_t - \omega$:

$$\omega_t(k) \approx \omega_0 + \nu k^2.$$

Allora la permettività è

$$\varepsilon_t(\omega, k) = a + \frac{A}{\omega_0 + \nu k^2 - \omega}. \tag{106,2}$$

È da notare che questa espressione quale funzione della frequenza attraversa lo zero nel dominio $\omega > \omega_t$. Per $k = 0$ ciò si verifica per $\omega = \omega_{l0} = \omega_0 + A/a$. Poiché per $k = 0$ le permettività ε_t e ε_l coincidono, allora ω_{l0} è la frequenza limite (per $k \to 0$) dell'onda longitudinale (cfr. la (105,8)). Quanto alla radice della funzione $\varepsilon_t(\omega, k)$, per $k \neq 0$ essa non ha significato fisico diretto.

[1]) Ad esempio, in virtù di certe regole di selezione approssimate che fanno diminuire gli elementi di matrice che determinano A.

Ora, l'equazione di dispersione (106,1) assume la forma

$$(n^2 - a)\,(\beta n^2 - \omega + \omega_0) = A, \qquad (106,3)$$

ove abbiamo introdotto la notazione $\beta = \nu\omega^2/c^2 \approx \nu\omega_0^2/c^2$; questa grandezza può avere i due segni. La soluzione di questa equazione si può considerare come risultato dell'intersezione di due rami dello spettro, ossia di un'onda luminosa ordinaria con $n^2 = a$ e di un'altra onda con $n^2 = (\omega - \omega_0)/\beta$ legata con il polo della permettività dielettrica; questi rami sono rappresentati nella fig. 58 con rette tratteggiate e punteggiate. L'« interazione » di questi rami, la cui forza è determinata dalla grandezza A, implica un allargamento delle linee spettrali [1]).

Nella fig. 58 con linee continue sono rappresentate schematicamente le dipendenze funzionali n^2 (ω) definite dalle radici dell'equa-

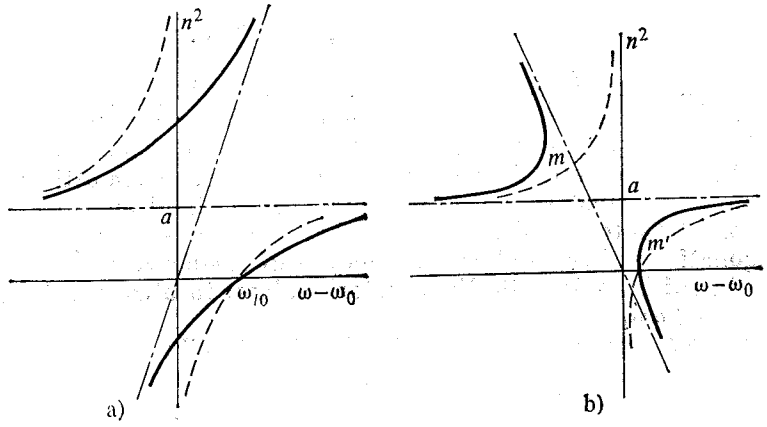


Fig. 58

zione (106,3); le linee tratteggiate sono le funzioni n^2 (ω) a prescindere dalla dispersione spaziale ($\beta = 0$). Alle onde propagantisi nel mezzo corrispondono, ovviamente, le sole radici positive [2]) di n^2. Per $\beta > 0$ (fig. 58, *a*) la curva continua superiore penetra nel dominio $\omega > \omega_0$ creando così un'onda supplementare che non esisterebbe

[1]) Nella teoria microscopica il polo della permettività dielettrica riflette l'esistenza delle eccitazioni elementari di Bose nel dielettrico, ossia di *eccitoni*; il segno della costante β coincide con il segno della massa efficace dell'eccitone (cfr. IX § 66). Il ramo corrispondente dello spettro di onde si chiama *eccitonico*. Il dominio dello spettro in prossimità dell'intersezione virtuale di ambedue i rami si chiama *polaritonico*.

[2]) Per evidenza maggiore nella figura sono rappresentate anche le radici negative. Ricordiamo che valori n puramente immaginari corrispondono a delle onde per cui il mezzo non è trasparente (sebbene in esso non esista assorbimento); si può dire che l'onda si riflette totalmente dal mezzo.

se non fosse tenuto conto della dispersione spaziale; per $\omega > \omega_{l0}$ nel mezzo è possibile la propagazione di due onde elettromagnetiche distinte. Nella fig. 58, *b* sono rappresentate le curve di dipendenza $n^2(\omega)$ per il caso $\beta < 0$. A sinistra del punto *m* di coordinate

$$n_m^2 = a + \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_m - \omega_0 = -|\beta| \left(a + 2\sqrt{\frac{A}{|\beta|}}\right)$$

(il punto in cui $dn^2/d\omega = \infty$ e le due radici si fondono) esistono due radici positive e nel mezzo possono propagarsi due onde diverse. Si può dire lo stesso del dominio tra i punti m' di coordinate

$$n_{m'}^2 = a - \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_{m'} - \omega_0 = -|\beta| \left(a - 2\sqrt{\frac{A}{|\beta|}}\right)$$

e il punto $\omega = \omega_{0l}$.

Se la grandezza A non è sufficientemente piccola, la conservazione del termine costante nella formula (106,2) non è a rigore conseguente. Omettendo questo termine (cioè ponendo nelle formule scritte $a = 0$) otteniamo un quadro differente dalla fig. 58 per il fatto che da asintoto orizzontale di tutte le curve funge l'asse delle ascisse stesso (al posto della linea $n^2 = a$). In questo caso il dominio $\omega \geqslant \omega_{l0}$ è fuori della considerazione.

Studiamo la situazione in prossimità della linea di assorbimento nel mezzo girotropo (*V.L. Ginsburg*, 1958).

A prescindere dalla dispersione spaziale rappresentiamo la permettività dielettrica $\varepsilon^{(0)}$ nella forma polare

$$\varepsilon^{(0)}(\omega) = \frac{A}{\omega_0 - \omega}. \tag{106,4}$$

Non supponiamo ora piccolezza speciale del coefficiente A e perciò non scriviamo termine costante. Per esprimere il legame tra **E** e **D** si deve usare una relazione della forma (104,13) espressa in funzione del tensore inverso $\eta_{ik} = \varepsilon_{ik}^{-1}$. Nel mezzo isotropo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\mathbf{D} + iF\,[\mathbf{Dn}], \tag{106,5}$$

ove il vettore dell'attività ottica è scritto nella forma $\mathbf{G} = F\mathbf{n}$. In prossimità della linea di assorbimento le componenti del tensore η_{ik} descrivono semplicemente lo zero e non ci sono ragioni di supporre che il suo sviluppo rispetto al vettore d'onda sia violato.

L'equazione di dispersione assume la forma

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)^2 = F^2 n^2, \tag{106,6}$$

ove $n_0^2 = \varepsilon^{(0)}$ (cfr. la (101,12)). Sostituendovi $\varepsilon^{(0)}$ dalla (106,4) otteniamo l'equazione

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\omega - \omega_0}{A}\right)^2 = F^2 n^2. \tag{106,7}$$

Nella fig. 59 le linee continue rappresentano schematicamente la dipendenza delle radici n^2 di questa equazione da $\omega - \omega_0$. Una di esse esiste sia per $\omega < \omega_0$ sia per $\omega > \omega_0$ ove, se non è tenuto conto della dispersione spaziale, non esistono valori reali di n (la linea tratteggiata nella fig. 59 rappresenta la funzione $n_0^2(\omega)$). Altre due esistono per $\omega < \omega_m$ a sinistra del punto m in cui

$$\omega_0 - \omega_m = 3A\left(\frac{F}{2}\right)^{2/3}, \quad n_m^2 = \left(\frac{2}{F}\right)^{2/3}.$$

Le curve delle funzioni $n_2^2(\omega)$ e $n_3^2(\omega)$ passano sopra la linea $n_0^2(\omega)$, e la curva della funzione $n_1^2(\omega)$ sotto quest'ultima. Perciò (come ciò risulta con chiarezza dalle equazioni (101,11) che determinano l'induzione **D** nell'onda) le onde *2* e *3* godono della polarizzazione circolare di un segno e l'onda *1* di un altro segno.

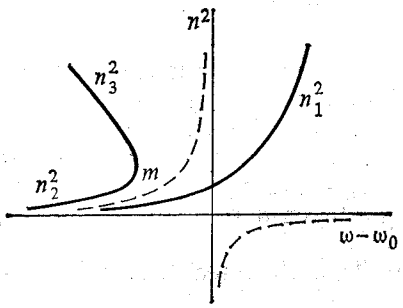


Fig. 59

Per concludere sottolineiamo che le formule (106,2) e (106,4) stesse per la permettività e perciò risultati basati su di esse si riferiscono alle sole frequenze sufficientemente lontane dal centro della linea: $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, ove γ è la larghezza della linea. Per $|\omega - \omega_0| \lesssim \gamma$ si deve tener conto dell'assorbimento, cioè della parte immaginaria della permettività, ciò che può cambiare notevolmente il quadro.

Capitolo XIII

OTTICA NON LINEARE

§ 107. Trasformazione delle frequenze nei mezzi non lineari

La teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi dielettrici, che è stata esposta nei capitoli precedenti, si basa sull'ipotesi che il legame tra induzione del campo elettrico **D** e sua intensità **E** sia lineare. Questa approssimazione è vera con sufficiente precisione se (come ciò infatti ha luogo) l'intensità **E** è piccola rispetto ai valori caratteristici per i campi atomici interni. Ma anche sotto queste condizioni le piccole correzioni non lineari esistenti da portare nella dipendenza funzionale **D** (**E**) implicano effetti qualitativamente nuovi e perciò possono essere notevoli.

Una particolarità più importante di un mezzo non lineare è la generazione in esso di oscillazioni con frequenze nuove. Così, se su questo mezzo incide un'onda monocromatica di frequenza ω_1, a misura della sua propagazione nel mezzo vanno generate delle onde con frequenze $m\omega_1$ (m sono degli interi); se inizialmente c'è l'insieme di segnali monocromatici di frequenze ω_1 e ω_2, allora con il passare del tempo compariranno anche delle frequenze combinatorie $m\omega_1 + n\omega_2$ e via di seguito.

Se il mezzo è senza dissipazione, il processo di trasformazione delle frequenze è retto da relazioni assai generali, oltre alla condizione evidente di conservazione dell'energia totale delle oscillazioni per tutte le frequenze. In questo caso è supposto che la non linearità sia debole; il significato della nozione di questa debolezza sarà precisato più avanti.

L'origine e il significato delle relazioni cercate sono particolarmente evidenti dal punto di vista quantistico dal quale partiremo. Per rendere più semplice il ragionamento supponiamo che tutte le frequenze del sistema possano essere rappresentate come combinazioni lineari di due frequenze fondamentali incommensurabili ω_1 e ω_2:

$$\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \tag{107,1}$$

ove m, n sono interi positivi o negativi.

L'energia totale della radiazione nel mezzo si può rappresentare come somma di energie di tutti i quanti:

$$\mathcal{U} = \sum_{m,n} N_{mn}\hbar\omega_{mn},$$

ove N_{mn} è il numero di quanti con frequenza ω_{mn}. La sommatoria è estesa a tutti i numeri m, n per i quali $\omega_{mn} > 0$ (poiché del significato fisico godono, ovviamente, le sole frequenze positive).

I processi di trasformazione delle frequenze implicano un cambiamento dei numeri N_{mn} con il tempo essendo conservata l'energia totale. Perciò

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \hbar\omega_1 \sum_{m,n} m \frac{dN_{mn}}{dt} + \hbar\omega_2 \sum_{m,n} n \frac{dN_{mn}}{dt} = 0.$$

Poiché abbiamo supposto che ω_1 e ω_2 siano incommensurabili e che il numero di quanti e loro variazioni siano numericamente interi, questa uguaglianza richiede che si annulli separatamente ciascuno dei due sistemi [1]):

$$\sum_{m,n} m \frac{dN_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{m,n} n \frac{dN_{mn}}{dt} = 0. \tag{107,2}$$

Al posto dei numeri di quanti introduciamo le intensità corrispondenti, ossia le energie totali $\overline{\mathcal{U}}_{mn}$ comprese nella radiazione delle frequenze corrispondenti:

$$\overline{\mathcal{U}}_{mn} = \hbar\omega_{mn} N_{mn}. \tag{107,3}$$

Allora le relazioni (107,2) assumono la forma

$$\sum_{m,n} \frac{m}{\omega_{mn}} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{m,n} \frac{n}{\omega_{mn}} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{mn}}{dt} = 0. \tag{107,4}$$

Qui si deve sottolineare una circostanza particolarmente chiara dal punto di vista del quadro classico delle oscillazioni. Parlando della variazione di $\mathcal{U}_{mn}$ con il tempo teniamo conto del solo andamento sistematico di questa variazione; in altre parole, consideriamo l'energia la cui media è calcolata rispetto ad intervalli di tempo superiori ai periodi $1/\omega_1$, $1/\omega_2$ (per cui abbiamo posto il trattino sopra $\mathcal{U}_{mn}$ nelle relazioni (107,4)). Proprio qui occorre che gli effetti non lineari siano deboli: il tempo caratteristico τ dell'aumento sistematico da essi causato delle oscillazioni eccitanti deve essere grande rispetto ai periodi suindicati. Soltanto sotto queste condizioni è opportuno trattare l'andamento temporale delle medie delle grandezze rispetto agli intervalli Δt tale che

$$1/\omega_1,\ 1/\omega_2 \ll \Delta t \ll \tau.$$

[1]) La scrittura delle velocità di variazione delle grandezze numeriche intere sotto forma delle derivate è, ovviamente, di carattere convenzionale.

Le uguaglianze (107,4) rappresentano le relazioni cercate note sotto il nome di *teorema di Manley-Rowe* (1956) [1]. Non resta altro che conferire ad esse una forma più determinata e liberarsi dalla condizione restrittiva $\omega_{mn} > 0$ per la sommatoria. Ciò è facile ottenere osservando che a ciascuna coppia dei numeri m, n per la quale $\omega_{mn} > 0$ corrisponde la coppia dei numeri $-m$, $-n$ per la quale la frequenza è negativa per lo stesso $|\omega_{mn}|$. Ponendo secondo la definizione

$$\overline{\mathcal{U}}_{-m,-n} = \overline{\mathcal{U}}_{mn} \tag{107,5}$$

ed estendendo la sommatoria a tutti gli interi da $-\infty$ a $+\infty$ raddoppiamo quindi le somme, ciò che non ne viola l'uguaglianza a zero. Inoltre, si può eseguire un'altra semplificazione. Nella prima uguaglianza (107,4) dividiamo la somma estesa a m in due somme: da 0 a ∞ e da $-\infty$ a 0, e nella seconda uguaglianza sostituiamo $m, n \to -m, -n$; la trasformazione analoga eseguiamo nella somma estesa a n nella seconda uguaglianza (107,4). Come risultato otteniamo infine

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m}{m\omega_1 + n\omega_2} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{mn}}{dt} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{n}{m\omega_1 + n\omega_2} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{mn}}{dt} = 0. \tag{107,6}$$

La generalizzazione del teorema per il caso di numero più grande di frequenze incommensurabili è immediata.

Proprietà concrete del sistema oscillatorio possono interdire questi o quelli processi di trasformazione delle frequenze. Le sommatorie nelle espressioni (107,6) sono estese infatti ai soli processi ammissibili.

Così, nel caso semplice di un sistema che consenta la sola generazione della frequenza combinatoria $\omega_1 + \omega_2$ i numeri m, n descrivono i valori 0, 1 e troviamo così

$$-\frac{1}{\omega_1} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{10}}{dt} = -\frac{1}{\omega_2} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{01}}{dt} = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \frac{d\overline{\mathcal{U}}_{11}}{dt}. \tag{107,7}$$

Il significato di queste uguaglianze è evidente: la decrescenza dei numeri quantici $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$ è uguale alla crescita del numero di quanti generati $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$.

---

[1]) L'interpretazione quantistica di questo teorema è stata data da *M.T. Weiss*, 1957.

§ 108. *Permettività non lineare*

Se la non linearità è debole, la prima correzione alla dipendenza lineare di **D** da **E** è quadratica rispetto al campo. Nel caso della dispersione temporale [1]) essa può essere rappresentata in un mezzo anisotropo qualsiasi dall'espressione

$$D_i^{(2)}(t) = \int\int_0^\infty f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2)\, E_k(t-\tau_1)\, E_l(t-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (108,1)$$

analoga a quella (77,3). È ovvio che l'esistenza di questo termine impone determinate limitazioni alla simmetria ammissibile del mezzo; in particolare, esso non esiste se il mezzo è invariante rispetto all'inversione.

Sebbene consideriamo più avanti come tipico proprio un termine quadratico rispetto a **E** della forma (108,1), è necessario osservare che nell'approssimazione quadratica l'induzione elettrica può contenere anche termini bilineari rispetto alle componenti **E** e **H** e quadratici rispetto a **H**; di solito, questi termini giocano ruolo minore e non li considereremo. Non discuteremo neanche la dipendenza non lineare dell'induzione magnetica **B** da **H** in quanto essa è analoga alla dipendenza funzionale **D** (**E**).

Introduciamo la grandezza

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) = \int\int_0^\infty e^{i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)} f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \qquad (108,2)$$

che sarebbe naturale chiamare *permettività non lineare* del secondo ordine (per analogia con la permettività lineare $\varepsilon_{ik}(\omega)$ definita dall'espressione (77,5)). Essa differisce per il solo fattore dalle grandezze $\chi_{ikl} = \varepsilon_{ikl}/4\pi$ dette *suscettività non lineare*. A causa della simmetria con la quale E_k e E_l figurano nella definizione (108,1) il tensore $f_{i,kl}$ è simmetrico rispetto agli indici kl per la permutazione simultanea dei suoi argomenti: $f_{i,kl}(\tau_1, \tau_2) = f_{i,lk}(\tau_2, \tau_1)$. Perciò della stessa simmetria gode anche il tensore $\varepsilon_{i,kl}$:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon_{i,lk}(\omega_2, \omega_1). \qquad (108,3)$$

In particolare, per $\omega_1 = \omega_2$ il tensore è simmetrico rispetto all'ultima coppia degli indici:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, \omega) = \varepsilon_{i,lk}(\omega, \omega). \qquad (108,4)$$

Inoltre, essendo reali le funzioni $f_{i,kl}$ (ciò che, a sua volta, deriva dalla definizione (108,1) con **E** e **D** reali) abbiamo

$$\varepsilon_{i,kl}(-\omega_1, -\omega_2) = \varepsilon^*_{i,kl}(\omega_1, \omega_2). \qquad (108,5)$$

---

[1]) In questo capitolo ovunque trascuriamo la dispersione spaziale.

La permettività (108,2) compare, naturalmente, considerando dei campi monocromatici e loro sovrapposizioni. Nelle espressioni non lineari questi campi devono essere rappresentati, ovviamente, nella forma reale. Così, se **E** è un campo monocromatico con una sola frequenza ω, si deve scrivere $\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\}$ e la sua sostituzione nella formula (108,1) conduce all'espressione

$$D_i^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\varepsilon_{i,kl}(\omega, \omega)\, e^{-2i\omega t} E_{0i} E_{0k} + \\ + \varepsilon_{i,kl}(\omega, -\omega)\, E_{0i} E_{0k}^*\}. \qquad (108,6)$$

Essa contiene oscillazioni con frequenza raddoppiata (accanto a un termine costante corrispondente alla differenza di frequenze $\omega - \omega = 0$). Nel caso generale $\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2)$ descrive un contributo nell'induzione proporzionale a $\exp(-i\omega_3 t)$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

Più avanti considereremo i soli mezzi senza dissipazione e li chiameremo trasparenti sebbene essi non siano tali nel senso letterale (per le onde di data frequenza) in quanto è possibile il passaggio dell'energia ad altre frequenze. Supporremo anche che il mezzo non goda di struttura magnetica.

Mostriamo, prima di tutto, che sotto queste condizioni la permettività non lineare è reale. Ciò si può vedere immediatamente esprimendo le componenti del tensore della suscettività non lineare in funzione degli elementi di matrice dell'interazione elettrica di dipolo del mezzo con il campo che gioca il ruolo di piccola perturbazione; la suscettività del secondo ordine compare nella terza approssimazione della teoria delle perturbazioni [1]). Comprendere il carattere reale del risultato di questo calcolo si può anche senza realizzarlo. Infatti, è possibile trovare un sistema completo di funzioni d'onda in base alle quali si calcolano gli elementi di matrice (per un mezzo senza struttura magnetica e perciò invariante rispetto all'inversione del tempo!) che sia reale. L'operatore di interazione del campo con il momento elettrico di dipolo del mezzo è anch'esso reale. Perciò i termini immaginari potrebbero comparire soltanto in seguito agli aggiramenti dei poli dei denominatori energetici nella teoria delle perturbazioni. Ma il fatto che la dissipazione nel mezzo non esiste significa che nessuna delle frequenze del campo coincide con la differenza di livelli energetici del sistema (oppure che i residui nei poli sono nulli in virtù di queste o quelle regole di selezione); perciò, di fatto, il polo non va aggirato.

La trasparenza del mezzo implica anche la comparsa di determinate relazioni di simmetria per il tensore $\varepsilon_{i,kl}$. Queste relazioni si

---

[1]) Questi calcoli sono analoghi (benché siano più complicati) al calcolo della suscettività generalizzata lineare nel secondo ordine della teoria delle perturbazioni (cfr. V § 126).

potrebbero dedurre anch'esse da espressioni concrete ottenute dalla teoria delle perturbazioni. Ma anche qui si può arrivare al risultato richiesto in un modo più semplice.

A tale scopo supponiamo che il campo nel mezzo sia la somma di tre campi quasi monocromatici con frequenze incommensurabili ω_1, ω_2, ω_3:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_{01}e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_{02}e^{-i\omega_2 t} + \mathbf{E}_{03}e^{-i\omega_3 t}\}, \qquad (108,7)$$

ove $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Supponiamo che i campi con le frequenze ω_1, ω_2, ω_3 siano stati creati da sorgenti in seguito escluse; essendo debole la non linearità del mezzo le loro ampiezze $\mathbf{E}_{01}$, . . . diventano funzioni del tempo lentamente variabili.

Questa lentezza permette di scrivere le equazioni di Maxwell per i campi dell'ognuna delle frequenze fondamentali separatamente. A sua volta, da queste equazioni deriva normalmente la legge di conservazione dell'energia sotto la forma

$$\frac{1}{4\pi}\,(\overline{\mathbf{E}_1\dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1}) + \mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\,[\overline{\mathbf{E}_1\mathbf{H}_1}] = 0$$

(e analogamente per le grandezze con gli indici 2 e 3); $\mathbf{D}_1$ indica la parte dell'induzione $\mathbf{D}$ contenente i fattori $e^{\pm i\omega_1 t}$ e il trattino orizzontale la media rispetto al tempo della quale avremo bisogno nel seguito. Integrando rispetto a tutto il volume del campo il termine con la divergenza scompare e resta

$$\frac{1}{4\pi}\int (\overline{\mathbf{E}_1\dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1})\,dV = 0.$$

Se ora in $\mathbf{D}_1$ separiamo i termini lineari e non lineari rispetto a $\mathbf{E}$

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1^{(1)} + \mathbf{D}_1^{(2)},$$

allora i primi, assieme a $\mathbf{H}_1\dot{\mathbf{H}}_1$ daranno $d_1\overline{\mathcal{U}}_1/dt$, ossia la variazione con il tempo dell'energia del campo sulla frequenza ω_1. Quindi, questa variazione è determinata dall'equazione

$$\frac{d\overline{\mathcal{U}}_1}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_{01}e^{-i\omega_1 t}\}\,\dot{\mathbf{D}}_1^{(2)}}\,dV. \qquad (108,8)$$

Qui si deve esprimere la derivata $\partial\mathbf{D}_1^{(2)}/\partial t$ in funzione dell'intensità del campo mediante le formule (108,1-2). Il calcolo della media rispetto al tempo annulla tutti i termini in cui i fattori esponenziali si riducono reciprocamente. Ripetendo i calcoli per le altre frequenze

troviamo infine:

$$\frac{d\overline{\mathcal{U}}_1}{dt} = -\frac{i\omega_1}{16\pi}\int \varepsilon_{k,\,il}(-\omega_3,\ \omega_2)E^*_{03i}E_{01k}E_{02l}dV + \text{c.c.},$$

$$\frac{d\overline{\mathcal{U}}_2}{dt} = -\frac{i\omega_2}{16\pi}\int \varepsilon_{l,\,ki}(\omega_1,\ -\omega_3)E^*_{03i}E_{01k}E_{02l}\,dV + \text{c.c.}, \qquad (108,9)$$

$$\frac{d\overline{\mathcal{U}}_3}{dt} = \frac{i\omega_3}{16\pi}\int \varepsilon_{i,\,kl}(\omega_1,\ \omega_2)E^*_{03i}E_{01k}E_{02l}\,dV + \text{c.c.},$$

ove c.c. significa un'espressione complessa coniugata. Per il calcolo è stata usata la proprietà (108,3).

La variazione totale dell'energia su tutte e tre le frequenze vale

$$\frac{d\overline{\mathcal{U}}}{dt} = \frac{d\overline{\mathcal{U}}_1}{dt} + \frac{d\overline{\mathcal{U}}_2}{dt} + \frac{d\overline{\mathcal{U}}_3}{dt}. \qquad (108,10)$$

Nel mezzo non lineare questa somma, in generale, non deve precisamente annullarsi in quanto è possibile la transizione dell'energia anche in altre frequenze combinatorie: $\omega_1 - \omega_2$, $\omega_3 + \omega_2$ e via di seguito. Ma il valore dei campi con frequenze ω_1, ω_2, ω_3 create da sorgenti esterne non ha niente a che vedere con il grado della non linearità; essa non deve essere piccola contrariamente ai campi con altre frequenze dovute esclusivamente alla non linearità del mezzo. Perciò il contributo di quest'ultime nel bilancio energetico si può supporre inesistente e chiedere che la somma (108,10) si annulli. Inoltre, siccome questo mezzo rappresenta un sistema non lineare con tre frequenze in tutto si può applicare ad esso il teorema di Manley-Rowe nella sua forma più semplice (107,7). Nelle notazioni qui usate queste relazioni hanno la forma

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{d\overline{\mathcal{U}}_1}{dt} + \frac{1}{\omega_3} = 0, \quad \frac{1}{\omega_2}\frac{d\overline{\mathcal{U}}_2}{dt} + \frac{1}{\omega_3}\frac{d\overline{\mathcal{U}}_3}{dt} = 0.$$

Sostituendovi le espressioni (108,9) troviamo che la permettività non lineare verifica le relazioni di simmetria importanti seguenti [1]):

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\ \omega_2) = \varepsilon_{k,il}(-\omega_3,\ \omega_2) = \varepsilon_{l,ki}(\omega_1,\ -\omega_3). \qquad (108,11)$$

(*J.A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, P.S. Pershan*, 1962). La simmetria espressa da queste uguaglianze diventa più evidente ancora se alle componenti del tensore attribuiamo un terzo argomento tale che la somma di tutti e tre sia nulla:

$$\varepsilon_{i,kl}(-\omega_3;\ \omega_1,\ \omega_2) = \varepsilon_{k,il}(\omega_1;\ -\omega_3,\ \omega_2) =$$
$$= \varepsilon_{l,ki}(\omega_2;\ \omega_1,\ -\omega_3) = \varepsilon_{i,lk}(-\omega_3;\ \omega_2,\ \omega_1)$$

[1]) È importante che le ampiezze complesse siano arbitrarie; perciò i termini complessi coniugati nelle espressioni (108,9-10) sono indipendenti e possono essere uguagliati separatamente.

(l'ultima uguaglianza è la (108,3)). Se conveniamo legare i tre argomenti conseguenti (frequenze) con i tre indici conseguenti del tensore, allora sarà possibile permutare in modo qualsiasi questi indici a condizione della stessa permutazione simultanea degli argomenti.

È da notare che di per se stessa la condizione della non esistenza della dissipazione implicherebbe un'altra condizione più debole, ossia la nullità della somma (108,10), cioè

$$\omega_3\varepsilon_{i,kl}(\omega_1, \omega_2) - \omega_1\varepsilon_{k,il}(-\omega_3, \omega_2) - \omega_2\varepsilon_{l,ki}(\omega_1, -\omega_3) = 0. \quad (108,12)$$

La deduzione esposta è inapplicabile se $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ in quanto le relazioni di Manley-Rowe si riducono in questo caso alla sola conservazione dell'energia totale. Quanto all'uguaglianza

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, \omega) = \varepsilon_{k,il}(-2\omega, \omega) = \varepsilon_{l,ki}(\omega, -2\omega) \quad (108,13)$$

essa si deduce semplicemente dalle (108,11) per ragioni di continuità nel passaggio al limite.

Se ambedue le frequenze ω_1 e ω_2 tendono a zero, il tensore $\varepsilon_{i,kl}$ è completamente simmetrico. Questa simmetria non esprime che il fatto che nel caso statico l'induzione **D** può essere ottenuta per derivazione dell'energia libera rispetto a **E**:

$$D_i = -4\pi \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial E_i},$$

in modo che

$$\frac{\partial D_i}{\partial E_k} = \frac{\partial D_k}{\partial E_i}.$$

Ne segue la simmetria del tensore $\varepsilon_{i,kl}$ rispetto agli indici *ik* e, quindi, rispetto a tutti e tre gli indici.

Se è nulla soltanto una delle frequenze, le relazioni (108,11) conducono all'uguaglianza

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, 0) = \varepsilon_{l,ki}(\omega, -\omega) \quad (108,14)$$

e anche a

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, 0) = \varepsilon_{k,il}(-\omega, 0) = \varepsilon_{k,il}(\omega, 0) \quad (108,15)$$

(in virtù della (108,5) le funzioni reali $\varepsilon_{k,il}(\omega, 0)$ sono pari rispetto a ω). Il tensore $\varepsilon_{i,kl}(\omega, 0)$ descrive un effetto elettro-ottico lineare, ossia la variazione della permettività del cristallo sotto influsso del campo elettrico costante, e, di conseguenza, coincide con il tensore α_{ikl} definito dall'espressione (100,4), cioè

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega, 0) = \alpha_{ikl}(\omega);$$

come deve essere, esso è simmetrico rispetto agli indici *ik* in virtù della (108,15). Quanto al tensore $\varepsilon_{l,ki}(\omega, -\omega)$ esso descrive un altro effetto, ossia la comparsa nel mezzo della polarizzazione dielettrica sta-

tica proporzionale al quadrato di un campo periodico variabile debole applicato (si veda il secondo termine nell'espressione (108,6)). Quindi, l'uguaglianza (108,14) stabilisce un legame tra questi due effetti.

Con considerazioni analoghe e usando la suscettività non lineare « incrociata » tra grandezze elettriche e magnetiche si potrebbe arrivare di nuovo al legame tra l'effetto magneto-ottico di Faraday e la magnetizzazione del mezzo da parte del campo elettrico rotante; questo legame si stabilisce mediante le formule (101,15) e (101,25).

Come è stato già detto, la non linearità del secondo ordine non esiste per mezzi invarianti rispetto all'inversione spaziale. In questi casi gli effetti non lineari cominciano dai termini cubici nello sviluppo della dipendenza **D** (**E**). La permettività non lineare corrispondente del terzo ordine è un tensore del quarto ordine dipendente da tre frequenze indipendenti, ossia

$$\varepsilon_{i\,klm}\,(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3).$$

Le sue proprietà di simmetria sono completamente analoghe a quelle del tensore di permettività del secondo ordine; se introduciamo ancora la quarta frequenza

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

e riscriviamo il tensore nella forma

$$\varepsilon_{i\,klm}\,(-\omega_4;\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)$$

si possono permutare in qualsiasi modo gli indici assieme alla stessa permutazione dei quattro argomenti.

La non linearità del terzo ordine può essere notevole anche se esiste la non linearità quadratica in virtù di carattere specifico di effetti da essa causati.

§ 109. *Autofocalizzazione*

In questo paragrafo saranno trattati effetti ottici legati alla variazione non lineare del campo sulla frequenza dell'onda iniziale. In altre parole, si considera il contributo non lineare in **D** della stessa frequenza ω che ha il campo monocromatico **E**. Nei termini quadratici questo contributo non esiste: essi contengono le sole frequenze 2ω e 0. Il primo effetto non nullo proviene dalla non linearità cubica ed è contenuto in termini della forma EEE^* (la frequenza $\omega + \omega - \omega = \omega$).

Più avanti in questo paragrafo supporremo isotropo il mezzo (liquido o gas). Allora i termini del terzo ordine nell'induzione che presentano interesse hanno nel caso generale la forma

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha\,(\omega)\,|\,\mathbf{E}\,|^2\,\mathbf{E} + \beta\,(\omega)\,\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*; \qquad (109,1)$$

essi contengono due coefficienti indipendenti; nel mezzo trasparente questi coefficienti sono funzioni reali pari della frequenza. Questo numero di coefficienti indipendenti si trova in accordo con le proprietà di simmetria del tensore seguente: $\varepsilon_{i,klm}(-\omega;\ -\omega,\ \omega,\ \omega)$. Per i valori indicati degli argomenti questo tensore è simmetrico rispetto alle coppie degli indici ik e lm; nel mezzo isotropo il siffatto tensore ha due componenti indipendenti. Nel limite di frequenze piccole, come è stato detto nel paragrafo precedente, il tensore deve essere simmetrico rispetto a tutti gli indici, cioè nel mezzo isotropo esso è proporzionale alla combinazione

$$\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}.$$

Ciò vuol dire che

$$\alpha(0) = 2\beta(0). \tag{109,2}$$

L'espressione (109,1) si semplifica per il campo polarizzato linearmente **E**. Per questa polarizzazione il vettore complesso **E** si riduce a un vettore reale moltiplicato per un fattore di fase comune; allora le espressioni $|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$ e $\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*$ coincidono e

$$\mathbf{D}^{(3)} = (\alpha + \beta)\,|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}. \tag{109,3}$$

La stessa semplificazione compare per la polarizzazione circolare del campo **E**; in questo caso $\mathbf{E}^2 = 0$ e l'espressione (109,1) diviene

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha\,|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}. \tag{109,4}$$

In entrambi i casi l'induzione è polarizzata così come **E**. Nel caso generale della polarizzazione ellittica le direzioni e i rapporti tra gli assi principali delle ellissi **E** e $\mathbf{D}^{(3)}$ non coincidono.

Il legame

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(3)} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{D}^{(3)},$$

(ove $\varepsilon(\omega)$ è permettività lineare ordinaria) deve essere sostituito nelle equazioni di Maxwell le quali, in questo caso (escludendo da esse il campo magnetico **H**), devono essere scritte nella forma

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \tag{109,5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0. \tag{109,6}$$

È importante che questo sistema di equazioni non lineare consenta una soluzione esatta sotto forma di un'onda monocromatica piana

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \tag{109,7}$$

con la polarizzazione lineare o circolare. Infatti, per tali onde $|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_0|^2$ in modo che le formule (109,3) o (109,4) hanno lo

stesso carattere che nel caso lineare con permettività dipendente dall'ampiezza del campo; perciò si può considerare la parte reale dopo aver risolto le equazioni. Il legame tra **D** e **E** in questi casi scriveremo sotto la forma

$$\mathbf{D} = \left(\varepsilon + \frac{2c^2}{\omega^2}\eta|\mathbf{E}_0|^2\right)\mathbf{E} \tag{109,8}$$

introducendo la comoda notazione seguente della quale avremo bisogno nel seguito: $\eta = \omega^2(\alpha + \beta)/2c^2$ per un'onda polarizzata linearmente o $\eta = \omega^2\alpha/2c^2$ per quella polarizzata circolarmente.

La sostituzione della (109,8) nella (109,6) dà div $\mathbf{E} = 0$, vale a dire che il campo resta trasversale come nella teoria lineare. Tenendone conto la sostituzione della (109,7) nella (109,5) conduce alla relazione di dispersione seguente:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon + 2\eta|\mathbf{E}_0|^2. \tag{109,9}$$

La velocità di fase ω/k si trova ora dipendente non soltanto dalla frequenza ma anche dall'ampiezza dell'onda. Se $\eta > 0$ la velocità di fase decresce all'aumentare dell'ampiezza; questo mezzo si dice *focalizzante* (il significato di questo nome sarà precisato più avanti). Se, invece, $\eta < 0$ la velocità di fase cresce al crescere dell'ampiezza e il mezzo si dice *defocalizzante*.

L'uso del legame non lineare (109,1) suppone, ovviamente, la sola non linearità debole, vale a dire che i termini di ordine superiore devono essere piccoli rispetto ai termini $\mathbf{D}^{(3)}$. In questo caso possono comparire fenomeni qualitativamente nuovi in seguito all'« accumularsi » degli effetti di non linearità in grandi intervalli di tempo e a grandi distanze. Allora è naturale considerare un'onda quasi monocromatica della forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})\, e^{i(k_0 x - \omega t)}, \tag{109,10}$$

ove $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ è una funzione del tempo e delle coordinate lentamente variabile (la sua variazione è piccolo negli intervalli di tempo $\sim 1/\omega$ e a distanze $\sim 1/k_0$). I vettori d'onda che figurano nello sviluppo di Fourier di questo campo sono distribuiti in un piccolo intervallo di valori attorno al vettore $\mathbf{k}_0$ diretto lungo l'asse x; conveniamo che il suo modulo è legato con ω mediante l'uguaglianza

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega) \tag{109,11}$$

corrispondente alla teoria lineare. Introduciamo l'equazione descrivente la funzione $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$.

Osserviamo prima di tutto che nel termine

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$$

dell'equazione (109,5) si può trascurare la piccola grandezza grad div **E**. Infatti, in virtù dell'equazione (109,6) la divergenza dell'intensità è

$$\operatorname{div}\mathbf{E} \approx -\eta \frac{2c^2}{\varepsilon\omega^2}\mathbf{E}_0 \operatorname{grad}|\mathbf{E}_0|^2$$

vale a dire che essa è non nulla soltanto per conto delle derivate lentamente variabili della funzione $\mathbf{E}_0$ e per giunta piccola in virtù della piccolezza dei termini non lineari; questi termini trascuriamo. In tal modo abbiamo

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \approx -\Delta\mathbf{E} \approx \left[k_0^2\mathbf{E}_0 - 2ik_0\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial x} - \Delta_\perp\mathbf{E}_0\right] e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)},$$

ove $\Delta_\perp = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ (è omesso il termine contenente la derivata seconda $\partial^2\mathbf{E}_0/\partial x^2$ non avente grande fattore k_0; quanto alle derivate trasversali, esse possono essere grandi rispetto a quelle longitudinali).

Il calcolo della derivata $\partial^2\mathbf{D}^{(1)}/\partial t^2$ si esegue analogamente alla deduzione della formula (80,10) e dà [1])

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} \approx -\frac{1}{c^2}\left(\omega^2\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 + i\frac{\partial(\omega^2\varepsilon)}{\partial\omega}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}\right)e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)} =$$
$$= -\left(k_0^2\mathbf{E}_0 + 2i\frac{k_0}{u}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}\right)e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r}-\omega t)},$$

ove è stata introdotta la velocità di gruppo u secondo la definizione

$$\frac{1}{u} = \frac{dk_0}{d\omega} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\omega\sqrt{\varepsilon})}{\partial\omega}. \qquad (109,12)$$

Nella derivata di $\mathbf{D}^{(3)}$, invece, è sufficiente lasciare il termine

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -2\eta(\omega)|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E},$$

trascurando qui il termine con la piccola derivata $\partial\mathbf{E}_0/\partial t$.

Portando le espressioni ottenute nella formula (109,5) otteniamo infine la seguente equazione:

$$ik_0\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_\perp\mathbf{E}_0 - \eta(\omega)|\mathbf{E}_0|^2\mathbf{E}_0. \qquad (109,13)$$

La combinazione delle derivate a primo membro dell'uguaglianza esprime il fatto che le perturbazioni dell'ampiezza si estendono nella direzione della propagazione dell'onda con la velocità di gruppo.

Mediante questa equazione è possibile studiare la stabilità di un'onda piana illimitata descritta dalla soluzione esatta (109,7-8)

---

[1]) L'unica differenza dalla deduzione della formula (80,10) sta nel fatto che ora abbiamo $\hat{f} = \partial^2\hat{\varepsilon}/\partial t^2$ e $f(\omega) = -\omega^2\varepsilon(\omega)$.

(*V.I. Bespalov, V.I. Talanov*, 1966). Vedremo che nel mezzo focalizzante l'onda è instabile [1]).

In accordo con la formula (109,9) nella soluzione esatta (109,7)

$$k \approx k_0 + \frac{\eta E_0^2}{k_0}$$

con k_0 dalla (109,11); in un'onda polarizzata linearmente l'ampiezza $\mathbf{E}_0$ può essere definita come vettore reale. Perciò se scriviamo l'onda (109,7) nella forma (109,10), nell'ultima espressione bisogna porre

$$\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{E}_0 \exp\left(ix\frac{\eta E_0^2}{k_0}\right).$$

Questa espressione funge da ampiezza di un'onda imperturbata. Studieremo il problema stazionario dell'estensione spaziale delle perturbazioni lungo la direzione della propagazione dell'onda. Ciò premesso, l'ampiezza di un'onda soggetta a una piccola perturbazione scriviamo nella forma

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \{\mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r})\} \exp\left(ix\frac{\eta E_0^2}{k_0}\right). \qquad (109,14)$$

Supponiamo che $\delta\mathbf{E}$ sia diretto lungo $\mathbf{E}_0$.

La sostituzione della (109,14) nella (109,13) conduce all'equazione

$$ik_0 \frac{\partial \delta E}{\partial x} = -\frac{1}{2}\Delta_\perp \delta E - \eta E_0^2 (\delta E + \delta E^*). \qquad (109,15)$$

Poniamo

$$\delta E = Ae^{i(\mathbf{qr}+\gamma x)} + B^* e^{-i(\mathbf{qr}+\gamma x)}, \qquad (109,16)$$

ove $\mathbf{q}$ è un vettore nel piano yz. Sostituendo questa espressione nella (109,15) e riunendo separatamente i termini contenenti $\exp\{\pm i(\mathbf{qr} + \gamma x)\}$ otteniamo due equazioni

$$\left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 + k_0\gamma\right) A - \eta E_0^2 B = 0,$$

$$-\eta E_0^2 A + \left(\frac{q^2}{2} - \eta E_0^2 - k_0\gamma)\right) B = 0.$$

La condizione di nullità del loro determinante dà

$$\gamma = \pm \frac{q}{2k_0}\sqrt{q^2 - 4\eta E_0^2}.$$

Per $\eta > 0$ e

$$q^2 < 4\eta E_0^2, \qquad (109,17)$$

[1]) Questa circostanza è stata notata ancora prima da *R.V. Chochlov* (1965).

γ è immaginaria in modo che δE nella (109,16) contiene un termine crescente esponenzialmente, vale a dire che l'onda è instabile. È da notare che l'incremento massimo dell'instabilità è dell'ordine di una correzione non lineare al vettore d'onda.

Una delle manifestazioni di questa instabilità consiste nell'*autofocalizzazione* del fascio luminoso di larghezza limitata propagantesi nel mezzo focalizzante. L'origine di questo fenomeno è dovuta a quanto segue: se l'ampiezza del campo decresce dall'asse del fascio verso la sua periferia, la permettività dielettrica del mezzo dipendente da questa ampiezza decresce (per $\eta > 0$) nella stessa direzione e il mezzo si comporta come una lente di focalizzazione (*G.A. Askarjan*, 1962). L'andamento del fascio è determinato dal gioco di due tendenze opposte, ossia da questa focalizzazione e dall'allargarsi del fascio per diffrazione.

Mostriamo anzitutto che queste tendenze si possono compensare mutuamente nel senso che l'equazione (109,13) consente (per $\eta > 0$) una soluzione sotto forma di un fascio stazionario non allargantesi. Questa *autocanalizzazione* è un effetto specificamente non lineare. Nella teoria lineare ogni fascio a sezione limitata diverge per diffrazione. Ci limitiamo al caso unidimensionale quando il campo **E** dipende dalla sola coordinata trasversale y essendo polarizzato lungo l'asse z; l'onda si propaga lungo l'asse x [1]). In questo caso si può ottenere una soluzione analitica del problema (*V.I. Talanov*, 1965). Ma ci astraiamo dalla circostanza che il fascio di larghezza indefinita (nella direzione dell'asse z) è instabile a priori poiché in esso sono possibili perturbazioni con piccoli valori q_z instabili secondo la (109,17).

Poniamo

$$E_{0z} = F(y)\, e^{i\varkappa x} \tag{109,18}$$

con piccola grandezza $\varkappa$ che funge da correzione al vettore d'onda k_0; la funzione $F(y)$ è reale. La sostituzione nella (109,13) dà per questa funzione l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dy^2} = k_0\varkappa F - \eta F^3. \tag{109,19}$$

Essa ha l'integrale primo

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 - k_0\varkappa F^2 + \frac{\eta}{2}F^4 = \text{costante}.$$

Presenta interesse la soluzione in cui F e dF/dy tendono a zero per $|y| \to \infty$. Ciò premesso, poniamo costante $= 0$ e in seguito una semplice integrazione dà

$$F = \left(\frac{2k_0\varkappa}{\eta}\right)^{1/2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left[(2k_0\varkappa)^{1/2}y\right]} \tag{109,20}$$

[1]) È da notare che sotto queste condizioni il termine grad div **E** trascurato precedentemente come piccolo si annulla identicamente.

(il centro del fascio serve di origine per y). La larghezza del fascio lungo l'asse y è

$$\delta \sim (k_0 \varkappa)^{-1/2} \sim 1/\sqrt{\eta} F(0).$$

Poiché il flusso di energia propagantesi lungo il fascio è $W \sim E^2(0)\,\delta$, allora δ è proporzionale a $1/W$, vale a dire che il fascio è più stretto quanto più grande è la potenza da esso trasportata.

Così un fascio autocanalizzato presenta un caso particolare quando le proprietà di focalizzazione del mezzo vanno compensate precisamente dalla diffrazione. Altri fasci saranno ora divergenti ora convergenti. Prima di tutto, scriviamo il criterio qualitativo di autofocalizzazione per un fascio reale a sezione limitata (*R.Y. Chiao*, *E. Garmire*, *C.H. Townes*, 1964). Ciò è possibile fare immediatamente partendo dalla condizione di instabilità (109,17). Nel fascio con raggio caratteristico R sono possibili delle perturbazioni a lunghezze d'onda trasversali rispetto all'asse del fascio e minori di R, cioè con $q \gtrsim 1/R$. La condizione (109,17), invece, determina il limite superiore dei valori q che implicano l'instabilità. Perciò il fascio sarà instabile rispetto alla focalizzazione per

$$E_0^2 R^2 \eta \gtrsim 1. \tag{109,21}$$

La potenza trasportata lungo il fascio è determinata dal prodotto $E_0^2 R^2$. Osserviamo che il valore critico di questa potenza, oltre il quale comincia l'autofocalizzazione, è indipendente dall'area della sezione del fascio.

Si trova anche possibile stabilire un criterio sufficientemente preciso (indipendente dall'ordine di grandezza) di autofocalizzazione del fascio (*S.N. Vlasov*, *V.A. Petriščev*, *V.I. Talanov*, 1971).

Per un fascio luminoso stazionario polarizzato linearmente, ma senza ipotesi preliminare sul carattere della dipendenza da x, l'equazione descrivente la funzione $E_0(x, \boldsymbol{\rho})$ ha la forma

$$ik_0 \frac{\partial E_0}{\partial x} = -\frac{1}{2}\Delta_\perp E_0 - \eta |E_0|^2 E_0 \tag{109,22}$$

($\boldsymbol{\rho}$ è raggio vettore bidimensionale nel piano yz; nello stesso piano agiscono due operatori differenziali $\Delta_\perp$ e $\nabla_\perp$). È facile provare che da questa equazione deriva l'uguaglianza

$$\frac{\partial |E_0|^2}{\partial x} + \operatorname{div}_\perp \mathbf{j} = 0, \tag{109,23}$$

ove

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2k_0}(E_0 \nabla_\perp E_0^* - E_0^* \nabla_\perp E_0).$$

Ne deriva, a sua volta, la « conservazione » (cioè l'indipendenza da x) dell'integrale

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |E_0|^2 d^2\rho. \tag{109,24}$$

Si conserva anche l'integrale

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \{|\nabla_\perp E_0|^2 - \eta |E_0|^4\} \, d^2\rho, \tag{109,25}$$

che si verifica facilmente per diretta derivazione rispetto a x usando l'equazione (109,22). È supposto, ovviamente, che E_0 decresca in modo sufficientemente rapido per $\rho \to \infty$ in modo che ambedue gli integrali (così come quello (109,26) trattato più avanti) siano convergenti [1]).

Mostriamo che il comportamento del fascio è determinato dal segno dell'integrale $\mathscr{E}$: per $\mathscr{E} > 0$ il fascio in media diverge e per $\mathscr{E} < 0$ si focalizza. La dimostrazione è basata su una semplice equazione che si può ottenere per il raggio medio R del fascio definito secondo la formula

$$R^2(x) = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 |E_0|^2 \, d^2\rho. \tag{109,26}$$

Per dedurre questa equazione scriviamo, usando la formula (109,23):

$$\frac{d}{dx} \int |E_0|^2 \rho^2 d^2\rho = -\int \operatorname{div}_\perp \mathbf{j} \cdot \rho^2 d^2\rho = 2 \int \mathbf{j}\rho d^2\rho.$$

Derivando ancora una volta rispetto a x, sostituendovi $\partial E_0/\partial x$ dalla formula (109,22) e integrando due volte per parti otteniamo come risultato l'equazione

$$N \frac{d^2}{dx^2} R^2 = 4\mathscr{E}.$$

Di qui

$$R^2(x) = \frac{2\mathscr{E}}{N} (x - x_0)^2 + R_0^2, \tag{109,27}$$

---

[1]) Per carattere delle derivate che figurano nell'equazione (109,22) quest'ultima è analoga all'equazione di Schrödinger bidimensionale (ove la coordinata x funge da tempo). In questa analogia gli integrali N e $\mathscr{E}$ fungono da « numero di particelle » e da « energia »; il carattere non lineare dell'equazione non incide sulla deduzione di queste leggi di conservazione.

ove x_0, R_0 sono costanti. Si vede che per $\mathscr{E} < 0$ a distanza finita lungo la direzione di propagazione si ottiene la focalizzazione totale del fascio, ossia il suo raggio R si annulla [1]).

Questo risultato ottenuto nei limiti dell'equazione approssimata (109,13) non può avere significato fisico letterale nell'intorno del fuoco stesso ove va violata l'ipotesi fatta per la deduzione dell'equazione. È sufficiente dire che all'aumentare indefinito della densità di energia del campo per una focalizzazione precisa non è più opportuno limitarsi al grado più basso della non linearità, cioè cubica. Ma è già importante la possibilità stessa di autofocalizzazione del fascio in modo tale che la non linearità cessa di essere piccola. Sottolineiamo che il criterio stabilito è di carattere sufficiente ma non necessario. Il fascio con $\mathscr{E} < 0$ si focalizza completamente a priori, ma la divergenza del fascio in media per $\mathscr{E} \geqslant 0$ non contraddice il fatto che una sua parte interna si focalizzi.

§ 110. *Generazione della seconda armonica*

Nel § 107 abbiamo considerato alcune relazioni generali che si riferiscono a processi di trasformazione delle frequenze caratteristici per l'ottica non lineare. Ora trattiamo la teoria quantitativa di uno di questi processi tipici, ossia la generazione della seconda armonica, cioè il processo di eccitazione del campo elettromagnetico di frequenza 2ω da un altro campo di frequenza ω (*R.V. Chochlov*, 1960; *J.A. Armstrong*, *N. Bloembergen*, *J. Ducuing*, *M.S. Pershan*, 1962).

La generazione della seconda armonica è un effetto non lineare del secondo ordine. Esso è contenuto nel tensore di suscettività non lineare

$$\varepsilon_{i,kl}(-2\omega;\ \omega,\ \omega) \tag{110,1}$$

e perciò non esiste nei mezzi che ammettono l'inversione spaziale. Il tensore (110,1) è simmetrico rispetto agli indici kl; le sue proprietà di simmetria in diversi cristalli sono le stesse che nel tensore piezoelettrico (§ 17). Supponiamo il mezzo non assorbente in modo che $\varepsilon_{i,kl}$ siano grandezze reali.

Il problema della seconda armonica può essere impostato nel seguente modo. Supponiamo che su una superficie piana del mezzo cristallino incida un'onda monocromatica piana di frequenza ω. Accanto all'onda riflessa e alle due onde rifratte (nel cristallo birifrangente) della stessa frequenza compaiono inoltre onde riflessa e rifratte di frequenza 2ω. Le onde di questa frequenza nel cristallo rappresentano soluzione delle equazioni (109,5-6) nelle quali il termine

[1]) È da notare che se la distribuzione $|E_0|^2$ nella sezione del fascio non varia lungo la sua lunghezza, allora $R^2 =$ costante e $\mathscr{E} = 0$. L'inverso, tuttavia, non è necessariamente obbligatorio, vale a dire che possono esistere delle soluzioni in cui $\mathscr{E} = 0$ in modo che $R =$ costante ma la distribuzione è dipendente da x.

non lineare nell'induzione, $\mathbf{D}^{(2)}$, deve essere espresso in funzione del campo dell'onda principale. Le ampiezze di tutte queste onde si esprimono in funzione dell'ampiezza dell'onda incidente mediante le condizioni di frontiera sulle quali qui non ci soffermiamo. È ovvio che l'ampiezza delle onde di frequenza 2ω sarà piccola per piccolezza della suscettività non lineare [1]).

Le onde rifratte si propagano in seguito nell'interno del cristallo come in un mezzo illimitato. A misura della loro propagazione gli effetti non lineari si accumulano e l'intensità delle armoniche può raggiungere grandi valori, vale a dire si verifica un pompaggio dell'energia della frequenza fondamentale nell'armonica. È questo processo a presentare qui interesse. Quanto alle condizioni sulla superficie del cristallo, in questo caso esse fungono da condizioni « iniziali » che assegnano una piccola ma non nulla ampiezza del campo della seconda armonica. Le stesse condizioni assegnano (per una data direzione dell'onda incidente) i vettori d'onda della prima armonica nel cristallo $\mathbf{k}_1$ e della seconda armonica $\mathbf{k}_2$.

Come si vedrà nel seguito, il pompaggio efficace dell'energia si realizza esclusivamente se si verifica la *condizione di sincronismo* dell'onda fondamentale dell'armonica [2]):

$$\mathbf{k}_2 \approx 2\mathbf{k}_1. \tag{110,2}$$

Sottolineiamo che per l'impostazione stessa del problema della generazione della sola seconda armonica ha un'importanza di principio l'esistenza della dispersione. Se la dispersione non esiste la condizione (110,2) si verifica per rifrazione automaticamente assieme con condizioni analoghe per le armoniche di ordine superiore ($\mathbf{k}_3 \approx \approx 3\mathbf{k}_1$ ecc.). Se la dispersione esiste, le cose stanno altrimenti e si può supporre che la condizione di sincronismo verificata per la seconda armonica non si verifichi per le altre. Sottolineiamo che la condizione stessa (110,2) può essere verificata infatti a condizione che l'onda fondamentale e l'armonica si riferiscano a tipi diversi di polarizzazione e, quindi, abbiano leggi diverse di dispersione.

Scriviamo il campo nel mezzo come sovrapposizione di due onde:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathrm{Re}\,[\mathbf{e}_1 E_{10} e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{e}_2 E_{20} e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r} - 2\omega t)}], \tag{110,3}$$

ove, in virtù della condizione (110,2) si ha

$$\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1 + \mathbf{q} \tag{110,4}$$

con $q \ll k_1$. Le ampiezze delle onde sono rappresentate nella forma dei prodotti $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}E_0$ ove $\mathbf{e}$ è un vettore di polarizzazione unitario

[1]) Per calcolo delle condizioni di riflessione e rifrazione sulla frontiera del mezzo non lineare per alcuni casi particolari si veda l'articolo di *Bloembergen N.*, *Pershan P.S.* in Phys. Rev., 1962, v. 128, p. 606.

[2]) La natura di questa condizione è particolarmente evidente dal punto di vista quantistico quando la generazione della seconda armonica va considerata come « confluenza » di due fotoni in uno. L'uguaglianza $\hbar\mathbf{k}_2 = 2\hbar\mathbf{k}_1$ esprime la conservazione dell'impulso in questo processo.

($\mathbf{ee}^* = 1$). Nell'approssimazione lineare queste ampiezze sarebbero costanti e, tenuto conto della non linearità, funzioni delle coordinate variabili lentamente (cioè variabili poco a distanze $\sim 1/k_1$).

Le equazioni per le ampiezze di ambedue le onde si ottengono mediante la sostituzione della (110,3) nelle equazioni di Maxwell (109,5-6) e la separazione in esse dei termini con la stessa dipendenza dal tempo. Non ci soffermiamo qui in dettaglio su questi calcoli semplici ma molto ingombranti e ci limitiamo ad alcune indicazioni di principio.

Cercheremo le soluzioni delle equazioni descriventi la generazione stazionaria della seconda armonica nel cristallo dall'onda fondamentale corrente; queste soluzioni sono indipendenti dal tempo. Per sincronismo corretto ($\mathbf{q} = 0$) le equazioni per le ampiezze non avrebbero le coordinate nella forma esplicita; per il sincronismo scorretto le coordinate figurano nell'equazione soltanto nella combinazione $\mathbf{qr}$ (nel fattore $\exp(-i\mathbf{qr})$). Considerando la direzione del vettore $\mathbf{q}$ come asse z si possono cercare perciò le soluzioni delle equazioni dipendenti unicamente da z. Se partire da impostazione suindicata dell'incidenza dell'onda ω sulla superficie cristallina il problema è uniforme nei piani paralleli a questa superficie. Perciò l'asse z le è perpendicolare (la perpendicolarità del vettore $\mathbf{q}$ alla superficie del cristallo si verifica automaticamente in virtù delle condizioni di frontiera).

Nell'approssimazione lineare le onde nel mezzo anisotropo (non girotropo) sono polarizzate linearmente (cfr. § 97); per esse $\mathbf{e}$ può essere definito come vettore reale, e più avanti con $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ intenderemo questi valori per ambedue le onde. Se sviluppiamo l'ampiezza $\mathbf{E}_0$ di ciascuna onda nelle direzioni $\mathbf{e}$, $\mathbf{k}$, $[\mathbf{ek}]$ le componenti lungo le due ultime direzioni saranno piccole a causa della piccolezza delle derivate dE_0/dz che compaiono come effetto della non linearità. Le componenti lungo la direzione $\mathbf{e}$ coincidono approssimativamente con le grandezze assolute E_0 dei vettori $\mathbf{E}_0$. Le equazioni per esse si ottengono moltiplicando l'equazione (109,5) per il vettore $\mathbf{e}_1$ o $\mathbf{e}_2$. Poiché le onde con E_0 = costante sono supposte quali soluzioni esatte delle equazioni di Maxwell nell'approssimazione lineare, tutti i termini lineari nelle equazioni, non contenenti derivate rispetto a z, si riducono mutuamente. I termini con le componenti di $\mathbf{E}_0$ lungo le direzioni $\mathbf{k}$ e $[\mathbf{ek}]$ (che potrebbero essere dello stesso ordine che i termini con le derivate dE_0/dz), come risulta, scompaiono per la moltiplicazione suindicata; questa circostanza è dovuta all'ortogonalità dell'induzione $\mathbf{D}$ sia alla direzione $\mathbf{k}$ che a quella $[\mathbf{ek}]$ (cfr. la formula (97,3)).

Per la supposta lentezza della dipendenza delle ampiezze dalle coordinate nelle equazioni si possono trascurare le derivate seconde di $\mathbf{E}_0$ rispetto a z. Perciò, ad esempio, l'espressione

$$e_{2i}\left\{(\mathrm{rot\ rot})_{ik} - \frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ik}(2\omega)\right\} e_{2k}E_{20}e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}}$$

nell'equazione per $\mathbf{E}_2$ (moltiplicata per $\mathbf{e}_2$) in accordo con quanto detto precedentemente si riduce a

$$2i\mathbf{e}_2\,[\mathbf{k}_2\,[\mathbf{l}\mathbf{e}_2]]\,\frac{dE_{20}}{dz}$$

(ove $\mathbf{l}$ è un vettore unitario dell'asse z), e analogamente per $\mathbf{E}_1$.

Le equazioni definitive ottenute in seguito alle operazioni summenzionate sono

$$\begin{aligned} \alpha_2\,\frac{dE_{20}}{dz} &= -\,i\eta e^{-iqz}E_{10}^2, \\ \alpha_1\,\frac{dE_{10}^*}{dz} &= i\eta e^{-iqz}E_{10}E_{20}^* \end{aligned} \tag{110,5}$$

nelle quali abbiamo introdotto le seguenti notazioni [1]):

$$\eta = \frac{\omega^2}{2c^2}\,\varepsilon_{i,\,kl}\,(\omega,\,\omega)\,e_{2i}e_{1k}e_{1l}, \tag{110,6}$$

$$\alpha_1 = \mathbf{l}\,[\mathbf{e}_1\,[\mathbf{k}_1\mathbf{e}_1]],\quad \alpha_2 = {}^1/_2\mathbf{l}\,[\mathbf{e}_2\,(\mathbf{k}_2\mathbf{e}_2]] \approx \mathbf{l}\,[\mathbf{e}_2\,[\mathbf{k}_1\mathbf{e}_2]]. \tag{110,7}$$

Moltiplicando la prima equazione (110,5) per E_{20}^* e la seconda per E_{10} e sommandole, troviamo il primo integrale di questo sistema

$$\alpha_1\,|\,E_{10}\,|^2 + \alpha_2\,|\,E_{20}\,|^2 = \text{costante} \equiv P. \tag{110,8}$$

Esso esprime la costanza del flusso di energia totale (in ambedue le onde) lungo l'asse z [2]).

È comodo passare dalle grandezze complesse a quelle reali, ossia ai valori assoluti e alle fasi delle grandezze E_{10} e E_{20}. Per rendere le equazioni semplici al massimo, introduciamo le nuove incognite ρ_1, ρ_2, φ_1, φ_2 come grandezze adimensionali e definiamole secondo

$$E_{10} = \sqrt{\frac{P}{\alpha_1}}\,\rho_1 e^{i\varphi_1},\quad E_{20} = \sqrt{\frac{P}{\alpha_2}}\,\rho_2 e^{i\varphi_2}. \tag{110,9}$$

Il sistema di equazioni (110,5) è invariante rispetto alle trasformazioni

$$\varphi_1 \to \varphi_1 + c,\quad \varphi_2 \to \varphi_2 + 2c.$$

---

[1]) La prima delle equazioni (110,5) si ottiene dai termini contenenti $e^{-2i\omega t}$ e la seconda dai termini contenenti $e^{i\omega t}$. Nei secondi membri di queste equazioni sono state usate le relazioni (108,13).

[2]) La media rispetto al tempo della densità del flusso di energia nell'onda $\mathbf{E}_1$ è

$$\bar{S}_{1z} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}\,\mathbf{l}\,[\mathbf{E}_{10}^*\mathbf{H}_{10}] = \frac{c^2}{8\pi\omega}\,\mathbf{l}\,[\mathbf{E}_{10}^*\,[\mathbf{k}_1\mathbf{E}_{10}]] = \frac{c^2\alpha_1}{8\pi\omega}\,|E_{10}|^2$$

e analogamente per l'onda $\mathbf{E}_2$.

Infatti, in esso si separano le equazioni per le funzioni ρ_1, ρ_2 e per la combinazione invariante $2\varphi_1 - \varphi_2$ che costituiscono nel loro insieme il seguente sistema di equazioni chiuso:

$$\frac{d\rho_1}{d\zeta} = -\rho_1\rho_2 \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{d\rho_2}{d\zeta} = \rho_1^2 \operatorname{sen}\theta, \tag{110,10}$$

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = -s - \left(2\rho_2 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2}\right)\cos\theta, \tag{110,11}$$

ove

$$\theta = 2\varphi_1 - \varphi_2 - s\zeta \tag{110,12}$$

e sono introdotti la variabile adimensionale

$$\zeta = z\eta\sqrt{\frac{P}{\alpha_1^2\alpha_2}} \tag{110,13}$$

e il parametro adimensionale

$$s = \frac{q}{\eta}\sqrt{\frac{\alpha_1^2\alpha_2}{P}}. \tag{110,14}$$

Il primo integrale (110,8) con queste variabili assume la forma

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1. \tag{110,15}$$

Consideriamo il caso del sincronismo preciso: $q = 0$, cioè $s = 0$. Allora, le equazioni (110,10-11) hanno un altro integrale primo, cioè

$$\rho_1^2\rho_2 \cos\theta = \text{costante} \equiv \delta \tag{110,16}$$

(ove la costante $\delta^2 \ll 4/27$; ciò deriva, come è facile provare, dalle uguaglianze (110,15-16) in virtù della condizione $|\cos\theta| \leqslant 1$). Mediante entrambi questi integrali la soluzione dell'equazione (110,10) si riduce a quadrature, ossia all'integrale ellittico

$$\zeta = \pm\frac{1}{2}\int_{\rho_2^2(0)}^{\rho_2^2(\zeta)} \frac{du}{[u(1-u)^2 - \delta^2]^{1/2}}; \tag{110,17}$$

il segno dell'integrale è determinato dal segno del valore iniziale (per $\zeta = 0$) di $\operatorname{sen}\theta$. L'equazione cubica

$$u(1-u)^2 - \delta^2 = 0 \tag{110,18}$$

ha tre radici reali positive (per $\delta^2 \leqslant 4/27$) delle quali due sono minori dell'uno; indichiamo queste ultime con ρ_a^2 e ρ_b^2, fra l'altro, $\rho_a^2 < \rho_b^2$ [1]). La funzione $\rho_2^2(\zeta)$ definita dalla formula (110,17) varia

[1]) Fra queste radici il polinomio a primo membro dell'espressione (110,18) ha un massimo nel punto $u = 1/3$ uguale a $4/27 - \delta^2$; per $\delta^2 = 4/27$ questo massimo si annulla, le due radici si fondono e in seguito scompaiono.

periodicamente tra questi valori con un periodo uguale all'integrale

$$\int_{\rho_a^2}^{\rho_b^2} \frac{du}{[u(1-u)^2-\delta^2]^{1/2}}. \tag{110,19}$$

Analogamente varia anche la funzione $\rho_1^2(\zeta) = 1 - \rho_2^2(\zeta)$ e, fra l'altro, una di queste funzioni è massima e l'altra minima.

La grandezza ρ_a^2 va identificata con il valore dell'intensità della seconda armonica, $\rho_2^2(0)$, assegnata dalle condizioni di frontiera sulla superficie del cristallo ($z = 0$). Si vede che nella direzione dell'asse z nell'interno del cristallo si verifica un pompaggio periodico dell'energia dalla frequenza fondamentale nella seconda armonica e viceversa. Alla diminuzione di $\rho_2(0)$ il periodo di questo processo aumenta e per $\rho_2(0) \to 0$ tende all'infinito secondo una legge logaritmica. Al valore limite $\rho_2(0) = \rho_a = 0$ corrisponde la soluzione

$$\rho_1 = 1/\mathrm{ch}\,\zeta, \quad \rho_2 = \mathrm{th}\,\zeta, \tag{110,20}$$

che si ottiene dalla (110,17) per $\delta = 0$ con una integrazione elementare; in essa l'ampiezza della seconda armonica cresce monotonamente e asintoticamente per $\zeta \to \infty$ tutta l'energia passa dalla frequenza fondamentale nell'armonica.

Consideriamo ora il caso inverso quando l'ampiezza ρ_2 resta ovunque piccola rispetto a ρ_1. Si vedrà in seguito che questo caso significa notevole violazione del sincronismo delle onde.

Per $\rho_2 \ll \rho_1$ si può supporre ρ_1 costante nella prima approssimazione ($\rho_1 = \rho_1(0)$) e scrivere le equazioni per ρ_2 e θ nella forma

$$\frac{d\rho_2}{d\zeta} = \rho_1^2(0)\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad \frac{d\theta}{d\zeta} = -s + \frac{\rho_1^2(0)}{\rho_2}\cos\theta.$$

La soluzione di queste equazioni nulla nel punto iniziale $\zeta = 0$ è

$$\rho_2(\zeta) = \frac{2}{s}\rho_1^2(0)\,\mathrm{sen}\,\frac{s\zeta}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{s\zeta}{2}. \tag{110,21}$$

Queste formule determinano la variazione del campo lungo un intervallo $0 \leqslant \zeta \leqslant 2\pi/s$ (cioè $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/q$) e in seguito il processo si ripete periodicamente [1]). La condizione $\rho_2 \ll \rho_1$ significa che deve essere $\rho_1^2(0)/s \ll \rho_1(0)$, cioè $s \gg \rho_1(0)$ ossia

$$qz_0 \gg 1, \quad z_0 \sim 1/\eta\rho_1(0)\sqrt{P}.$$

Questa è la condizione di violazione relativamente grande del sincronismo. In generale, il valore del parametro q determina quale

[1]) In ogni periodo successivo al termine costante nella variabile di fase θ si deve aggiungere un π. Nel punto in cui $\rho_2 = 0$ la fase φ_2 perde significato e la differenza di fasi θ può avere un balzo.

effetto limita la generazione dell'armonica (cioè l'aumento dell'ampiezza ρ_2): effetto lineare di violazione del sincronismo per $qz_0 \gg 1$ o effetti non lineari per $qz_0 \ll 1$ [1]).

Precedentemente in questo paragrafo abbiamo parlato ovunque della generazione della seconda armonica per conto della frequenza fondamentale. Ma le equazioni considerate descrivono anche il fenomeno inverso, ossia il rafforzamento (detto *parametrico*) del segnale debole di frequenza ω nel campo della radiazione intensa di frequenza 2ω; questo processo rappresenta un caso elementare del fenomeno più generale, ossia del rafforzamento dei segnali con frequenze diverse ω_2 e $\omega_1 - \omega_2$ nel campo dell'onda intensa di frequenza ω_1 (*S.A. Achmanov*, *R.V. Chochlov*, 1962; *R.H. Kingston*, 1962).

Prima di tutto sottolineiamo le seguenti distinzioni di questo processo dalla generazione della seconda armonica. Questa ultima potrebbe cominciare dell'intensità zero dell'armonica. La possibilità di rafforzamento della frequenza fondamentale chiede comunque che essa abbia almeno piccola intensità iniziale: se nel punto iniziale $\rho_1(0) = 0$ così resta ovunque; si vede dalle equazioni (110,10) che con ρ_1 si annullano anche le derivate di tutti gli ordini di ρ_1 e ρ_2.

Consideriamo di nuovo il caso di sincronismo preciso e supponiamo, inoltre, che il valore iniziale della variabile di fase sia $\theta(0) = -\pi/2$; per sincronismo preciso questo valore si conserva. Allora il parametro $\delta = 0$ in virtù dell'uguaglianza $\cos\theta = 0$ benché i valori iniziali di ρ_1 e ρ_2 siano non nulli. In questo caso la soluzione delle equazioni (110,10) è

$$\rho_1 = 1/\mathrm{ch}\,(\zeta - \zeta_0), \quad \rho_2 = -\,\mathrm{th}\,(\zeta - \zeta_0), \tag{110,22}$$

ove $\zeta_0 > 0$ è una costante. Per grande valore di questa costante il valore iniziale $\rho_1(0) = 1/\mathrm{ch}\,\zeta_0$ è piccolo. Si vede che lungo l'asse z in profondità del cristallo si rafforza l'onda della frequenza fondamentale per conto dell'intensità dell'armonica. Quest'ultima decresce fino a zero (per $\zeta = \zeta_0$) e di nuovo cresce finché tutta l'intensità non sarà concentrata asintoticamente in essa [2]).

§ 111. *Onde elettromagnetiche forti*

La possibilità dell'impostazione del problema studiato nel paragrafo precedente sulla generazione di una sola armonica dipende dalla dispersione. Studiamo ora il caso inverso quando in tut-

[1]) Ricordiamo che tutti i ragionamenti sono basati sull'ipotesi che $q \ll k_1$. Questa condizione è stata completamente usata nel dedurre le equazioni (110,5) dalle quali è scomparso il piccolo parametro q/k_1. Parlando del caso $qz_0 \gg 1$ supponiamo, ovviamente, che esso sia compatibile con la condizione $q \ll k_1$.

[2]) Per $\zeta > \zeta_0$ alla variabile di fase si deve attribuire il valore $\theta = \pi/2$ e cambiare il segno di th in $\rho_2(\zeta)$.

to l'intervallo notevole di frequenze si può supporre inesistente la dispersione in modo che l'induzione **D** (t) in ogni punto è determinata dal valore **E** (t) allo stesso istante [1]). Supponiamo ovunque il mezzo isotropo; allora le direzioni **D** e **E** coincidono. La non linearità non è supposta piccola in questo paragrafo, cosicché la dipendenza D (E) è una funzione qualsiasi.

Il fatto che trascuriamo l'assorbimento e la dispersione ha un'importanza di principio in quanto, come risultato, dalle equazioni scompaiono parametri dimensionali della frequenza (o, quindi, della lunghezza). Questa circostanza rende possibile la costruzione di una soluzione precisa che generalizzi un'onda piana unidimensionale ordinaria dell'approssimazione lineare (*A.B. Gaponov, G.I. Freidman*, 1959) [2]).

Supponiamo che l'onda si propaghi nella direzione dell'asse x, il campo elettrico sia diretto lungo l'asse y e il campo magnetico lungo l'asse z (indichiamo E_y e H_z semplicemente con E e H). Le equazioni di Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

assumono la forma

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \quad -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{111,1}$$

ove per definizione

$$\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE} \tag{111,2}$$

(per $E \to 0$ la funzione ε (E) tende al valore ε_0, ossia alla permettività dielettrica ordinaria).

Cerchiamo la soluzione in cui le funzioni E (t, x) e H (t, x) possono essere espresse come funzione di una dell'altra: $H = H$ (E). In questo caso le equazioni (111,1) si possono riscrivere così:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{dH}{dE}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \tag{111,3}$$

Affinché queste due equazioni possano essere soddisfatte da valori non nulli delle incognite $\partial E/\partial t$ e $\partial E/\partial x$, deve essere nullo il loro determinante. Questa condizione dà

$$\left(\frac{dH}{dE}\right)^2 = \varepsilon(E),$$

---

[1]) Per ragioni di uniformità in questo capitolo anche qui parleremo del legame non lineare fra **D** e **E** supponendo il mezzo non magnetico. In realtà i fenomeni considerati si riferiscono a mezzi con una dipendenza non lineare di **B** da **H**.

[2]) Questa soluzione è analoga alle cosiddette *onde semplici* dell'idrodinamica unidimensionale del fluido incompressibile perfetto (cfr. VI § 94).

da qui

$$H = \pm \int_0^E \sqrt{\varepsilon(E)}\, dE. \qquad (111,4)$$

Sostituendo ora dH/dE dalla (111,4) in una delle equazioni (111,3) abbiamo

$$-\frac{(\partial E/\partial t)_x}{(\partial E/\partial x)_t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_E = \pm \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Di qui risulta che

$$x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\, t$$

può essere funzione qualsiasi di E. Indichiamo la funzione inversa con f; abbiamo

$$E = f\left(x \mp \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(E)}}\, t\right); \qquad (111,5)$$

i due segni qui corrispondono alle due direzioni di propagazione dell'onda. Dopo aver definito la funzione f la formula (111,5) determina in forma implicita la dipendenza $E(t, x)$. Nei campi deboli, in cui si può porre $\varepsilon = \varepsilon_0$, la (111,5) si trasforma in un'onda piana ordinaria con velocità di fase $c/\sqrt{\varepsilon_0}$. È da notare che la soluzione così ottenuta esiste unicamente per $\varepsilon > 0$, ossia conformemente alla condizione di stabilità (18,8) [1].

A misura della propagazione dell'onda il suo profilo assegnato all'istante iniziale va deformato in quanto i suoi tratti diversi si

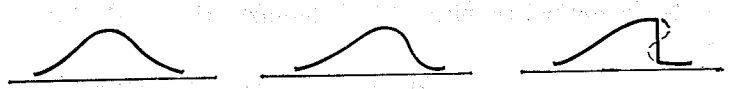


Fig. 60

propagano con velocità diverse. Di solito $\varepsilon(E)$ decresce all'aumentare di E (la funzione $\varepsilon(E)$ tende ad essere satura). In questo caso i punti del profilo con valori E più grandi si muovono con velocità più grandi per cui aumenta la ripidezza del fronte anteriore del profilo (come ciò risulta dalla fig. 60 nella quale è rappresentata la forma del profilo in alcuni istanti successivi). In un certo istante si verifica un flesso del profilo per cui esso dovrebbe essere non uniforme. Ma in realtà in questo istante nell'onda compare *un'onda*

[1]) Nella deduzione esposta si s ppone che la densità, temperatura ecc. del mezzo non subiscano oscillazioni del campo. Ciò è dovuto sia a piccoli effetti di strizione sia a una grande velocità (rispetto a quella del suono) di propagazione delle onde.

d'urto elettromagnetica, ossia il distacco fra le grandezze E e H. Le condizioni di frontiera nel punto di discontinuità hanno la stessa forma (76,13) come in qualsiasi superficie in moto. Per un'onda piana trasversale queste condizioni sono

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= -\frac{v}{c}(D_2 - D_1), \\ E_2 - E_1 &= \frac{v}{c}(H_2 - H_1), \end{aligned} \tag{111,6}$$

ove gli indici 1 e 2 sono riferiti ai valori delle grandezze davanti e dietro il fronte d'onda, rispettivamente. Moltiplicando queste due uguaglianze troviamo la velocità dell'onda d'urto:

$$v^2 = c^2 \frac{E_2 - E_1}{D_2 - D_1}. \tag{111,7}$$

Nell'onda d'urto si verifica la dissipazione dell'energia. Sia Q la velocità di dissipazione riferita all'unità d'area della superficie di discontinuità. Per il suo calcolo scriviamo la legge di conservazione dell'energia applicata a un elemento di volume cilindrico del mezzo l'una base del quale si trova dietro la discontinuità e l'altra base davanti:

$$\frac{c}{4\pi}(E_2 H_2 - E_1 H_1) = v(U_2 - U_1) + Q. \tag{111,8}$$

A primo membro figura la differenza di flussi di energia attraverso le due basi, a secondo membro la somma di velocità di variazione dell'energia per conto dello spostamento della frontiera tra i domini *1* e *2* e dell'energia dissipata. La differenza di energie interne (per densità e temperatura immutate) è

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{D_1}^{D_2} E\,dD + \frac{1}{8\pi}(H_2^2 - H_1^2).$$

Tramite le uguaglianze (111,6-7) si può ridurre l'espressione (111,8) alla forma

$$Q = \frac{v}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}(D_2 - D_1)(E_2 + E_1) - \int_{D_1}^{D_2} E\,dD\right\}.$$

Se l'onda d'urto è debole (cioè variazione dei valori in essa è piccola), allora per il calcolo di Q si può rappresentare il legame fra D e E sotto la forma dello sviluppo

$$D(E) = D_1 + \varepsilon(E_1)(E - E_1) + \frac{1}{2}\varepsilon'(E_1)(E - E_1)^2,$$

ove $\varepsilon'(E) = d^2D/dE^2$. Un semplice calcolo conduce al seguente risultato:

$$Q = -\frac{1}{48\pi} v\varepsilon'(E_1)(E_2 - E_1)^3. \qquad (111,9)$$

Quindi, la dissipazione dell'energia in un'onda elettromagnetica d'urto debole è del terzo ordine di grandezza del balzo del campo in essa. Poiché deve essere $Q > 0$, allora per $\varepsilon' < 0$ sarà $E_2 > E_1$ in accordo con la fig. 60.

La comparsa dell'onda d'urto viola l'applicabilità della soluzione ottenuta: le espressioni (111,4-5) per il campo contraddicono le condizioni di frontiera (111,6). Quel che più importa, tuttavia, è che l'onda resta ordinaria approssimativamente (a meno delle grandezze del secondo ordine comprese) finché si può supporre debole l'onda d'urto [1]). Con questa approssimazione l'espressione per la velocità di discontinuità si può rappresentare nella forma

$$v = c\left[\varepsilon\left(\frac{E_1 + E_2}{2}\right)\right]^{-1/2}. \qquad (111,10)$$

La posizione della discontinuità sul profilo dell'onda in questa approssimazione è determinata dalla condizione di uguaglianza di due aree tra la retta verticale e la curva tratteggiata nella fig. 60.

Problema

Sulla frontiera di un mezzo incide dal vuoto un'onda piana della forma $E = f_i(t - x/c)$. Determinare l'onda riflessa (*L.J. Broer*, 1963).

Soluzione. Il campo nel vuoto (semispazio $x < 0$) è composto delle onde incidente e riflessa (indice r):

$$E = f_i(t - x/c) + f_r(t + x/c),$$
$$H = f_i(t - x/c) - f_r(t + x/c)$$

(nel vuoto le equazioni del campo sono lineari e due soluzioni si possono sommare!). Nel mezzo, $x > 0$, esiste la sola onda passata in cui

$$E = f_t\left(t - \frac{\sqrt{\varepsilon(E)}}{c}x\right), \quad H = \int_0^E \sqrt{\varepsilon}\, dE.$$

Dalla condizione di continuità del campo elettrico per $x = 0$ abbiamo

$$f_t(t) = f_i(t) + f_r(t).$$

La condizione di continuità di H sulla stessa frontiera dà in seguito la seguente relazione:

$$f_i(t) - f_r(t) = \int_0^{f_i(t)+f_r(t)} \sqrt{\varepsilon(E)}\, dE$$

la quale definisce in forma implicita la funzione f_r.

[1]) La situazione qui è del tutto analoga alla comparsa nelle onde idrodinamiche d'urto in un'onda acustica forte (cfr. VI § 95), perciò non ripetiamo tutte le co siderazioni corrispondenti.

§ 112. *Diffusione combinatoria forzata*

Al novero di effetti non lineari del terzo ordine si riferisce l'influsso esercitato dalla radiazione di una frequenza ω_1 (*onda di pompaggio*) sulla propagazione nello stesso mezzo dell'onda di un'altra frequenza ω_2. Questi effetti sono contenuti nella permettività non lineare

$$\varepsilon_{i,klm}(\omega_2, \omega_1, -\omega_1) \tag{112,1}$$

che dà contributo nell'induzione con la frequenza ω_2 [1]).

Nel mezzo isotropo l'induzione $\mathbf{D}_2$ sulla frequenza ω_2, tenuto conto del contributo suindicato, è data dall'espressione

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2\mathbf{E}_2 + \alpha_2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1^*)\mathbf{E}_2 + \beta_2\mathbf{E}_1(\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_2) + \gamma_2\mathbf{E}_1^*(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2), \tag{112,2}$$

ove

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10}e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20}e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}-\omega_2 t)}. \tag{112,3}$$

Nel primo termine della (112,2) $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega_2)$ è la permettività lineare ordinaria; negli altri termini α_2, β_2 e γ_2 sono tre componenti indipendenti del tensore (112,1) (il loro numero è evidente dalla costruzione stessa dell'espressione (112,2) composta di tre vettori $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_1^*$, $\mathbf{E}_2$). Si vede che l'influsso non lineare del campo $\mathbf{E}_1$ su un campo di frequenza ω_2 può essere descritto mediante l'introduzione della permettività dielettrica anisotropa

$$\varepsilon_{2ik} = (\varepsilon_2 + \alpha_2\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1^*)\,\delta_{ik} + \beta_2 E_{1i}E_{1k}^* + \gamma_2 E_{1i}^*E_{1k}. \tag{112,4}$$

Nel mezzo non dissipativo i coefficienti α_2, β_2, γ_2 (così come ε_2) sono reali ed il tensore (112,4) è hermitiano. Come caso particolare, per $\omega_1 \to 0$ e rispettivamente per $\mathbf{E}_1$ reale, esso contiene in sé la birifrangenza nel campo elettrico statico descritto dalla formula (100,1). Per $\omega_1 \neq 0$ l'espressione (112,4) descrive la girotropia del mezzo anch'essa indotta dal campo $\mathbf{E}_1$. Confrontando la (112,2) con la (101,8) troviamo il vettore di girazione

$$\mathbf{g} = \frac{i}{2}(\beta_2 - \gamma_2)\,[\mathbf{E}_1^*\mathbf{E}_1]. \tag{112,5}$$

Esso si annulla se il campo $\mathbf{E}_1$ è polarizzato linearmente.

---

[1]) La condizione di realtà della permettività del terzo ordine $\varepsilon_{i,klm} \times \times (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ richiede che con le differenze di livelli energetici del sistema non coincidano né le frequenze ω_1, ω_2, ω_3, né la loro somma ω_4 e neanche le loro somme a due a due; per la suscettività (112,1) queste ultime sono $\omega_1 + \omega_2$ e $|\omega_1 - \omega_2|$. Ciò è facile provare seguendo l'origine dei denominatori energetici nell'espressione per la suscettività non lineare (pag. 539) data in funzione degli elementi di matrice dell'interazione del mezzo con il campo; quest'espressione è data nell'articolo di *Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S.*— Phys. Rev., 1962, v. 127, p. 1918.

Fenomeni più disparati si possono produrre se le interazioni non lineari del campo con il mezzo vanno accompagnate dalla dissipazione. In questo caso i coefficienti α_2, β_2, γ_2 sono complessi (mentre la permettività lineare supponiamo reale come prima). Si trova che questa dissipazione può implicare sia indebolimento sia rafforzamento del campo $\mathbf{E}_2$. Nell'ultimo caso si parla della *diffusione combinatoria forzata* [1]).

Ciò che le permettività lineari $\varepsilon(\omega_1)$ e $\varepsilon(\omega_2)$ sono reali significa che sulle frequenze stesse ω_1 e ω_2 nel mezzo non esiste dissipazione: i quanti $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$ di per se stessi non vanno assorbiti dal mezzo. Supponiamo che nel dominio di frequenze in cui il mezzo è capace di assorbire si trovi la differenza $\omega_1 - \omega_2$ e non la somma $\omega_1 + \omega_2$. La dissipazione si realizza esclusivamente per trasformazione dei quanti di energia più grande in quelli di energia più piccola con la trasmissione dell'eccesso di energia al mezzo. In tal modo, per $\omega_1 > \omega_2$ l'onda di pompaggio rafforza l'onda di frequenza più piccola ω_2. La media dell'energia rispetto al tempo che il campo $\mathbf{E}_2$ riceve (nell'unità di tempo in unità di volume) per conto di effetti non lineari deboli, è data direttamente dall'espressione (96,5) con segno opposto:

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt} = -\frac{i\omega_2}{8\pi}(\varepsilon^*_{2ik} - \varepsilon_{2ik})\, E_{2i}E^*_{2k} =$$
$$= -\frac{\omega_2}{4\pi}\{\alpha''_2|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2 + \beta''_2|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2|^2 + \gamma''_2|\mathbf{E}_1\mathbf{E}^*_2|^2\} \qquad (112,6)$$

(cfr. la deduzione delle formule (108,9)). Un'espressione analoga descrive la variazione dell'energia del campo $\mathbf{E}_1$:

$$\frac{d\overline{U}_1}{dt} = -\frac{\omega_1}{4\pi}\{\alpha''_1|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2 + \beta''_1|\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2|^2 + \gamma''_1|\mathbf{E}_1\mathbf{E}^*_2|^2\}, \qquad (112,7)$$

ove α_1, β_1, γ_1 sono componenti indipendenti del tensore di permettività

$$\varepsilon_{iklm}(\omega_1, \omega_2, -\omega_2),$$

descrivente l'influsso del campo della frequenza ω_2 sul campo della frequenza ω_1.

Le considerazioni applicate nel § 107 alla deduzione del teorema di Manley-Rowe consentono di affermare che

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{d\overline{U}_1}{dt} = -\frac{1}{\omega_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt} \qquad (112,8)$$

[1]) Dal punto di vista microscopico quantistico si tratta dell'emissione del fotone $\hbar\omega_2$ per incidenza del fotone $\hbar\omega_1$ sugli atomi siti nel campo dei fotoni $\hbar\omega_2$. In questo caso l'energia $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$ si trasmette al mezzo, ossia si produce un'eccitazione elementare del mezzo di tipo determinato (fonone, eccitone, ecc.). Nella letteratura specializzata si danno nomi particolari ai processi di diffusione di tipo diverso. Nella nostra descrizione puramente fenomenologica usiamo il termine nel testo come nome convenzionale generale.

ossia per ogni quanto $\hbar\omega_2$ nascente c'è un quanto $\hbar\omega_1$ scomparente. Ne segue che

$$\alpha_1'' = -\alpha_2'', \ \beta_1'' = -\beta_2'', \ \gamma_1'' = -\gamma_2''. \tag{112,9}$$

L'energia dissipata è determinata dalla decrescenza dell'energia totale di ambedue i campi:

$$Q = -\frac{d\overline{U}_1}{dt} - \frac{d\overline{U}_2}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt}. \tag{112,10}$$

Per $\omega_1 > \omega_2$ dalla condizione $Q > 0$ segue che $d\overline{U}_2/dt > 0$, vale a dire che l'onda di frequenza minore si rafforza in accordo con quanto detto prima. La condizione di positività dell'espressione (112,6) è data dalle disuguaglianze [1])

$$\alpha_2'' < 0, \ \alpha_2'' + \beta_2'' < 0, \ \alpha_2'' + \gamma_2'' < 0, \ \alpha_2'' + \beta_2'' + \gamma_2'' < 0. \tag{112,11}$$

È da sottolineare che l'effetto considerato è indipendente dalle relazioni di fase tra i campi. Ciò è dovuto al fatto che il campo dell'onda di pompaggio figura nell'equazione sotto forma di espressioni bilineari rispetto a $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_1^*$ dalle quali scompaiono i fattori di fase. In fin dei conti ciò fa sì che per il rafforzamento del campo ω_2 non occorre il sincronismo dei campi, ossia contrariamente ai fenomeni di generazione dell'armonica e di rafforzamento parametrico del segnale, studiati nel § 110.

Si trova possibile legare le caratteristiche della diffusione combinatoria forzata con le caratteristiche della diffusione ordinaria (spontanea) che sarà trattata nel cap. XV. I calcoli corrispondenti sono dati nel problema del § 118.

Le relazioni scritte precedentemente sono valide, come è stato già detto, se l'assorbimento dell'energia dal mezzo si produce esclusivamente per la differenza di frequenza $\omega_1 - \omega_2$. Si verifica un'altra situazione se nel dominio dell'assorbimento si trova non la differenza, bensì la somma di frequenze $\omega_1 + \omega_2$. In questo caso su ogni quanto assorbito $\hbar\omega_2$ va assorbito anche il quanto $\hbar\omega_1$ e al mezzo si trasmette l'energia $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ (*assorbimento bifotonico*). È naturale che in questo caso si indeboliscono le onde di ambedue le frequenze.

---

[1]) Ciò è facile provare considerando valori dell'espressione (112,6) per diverse polarizzazioni dei campi $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_1$ e $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_2$: polarizzazioni lineari delle direzioni coincidenti o mutuamente perpendicolari, polarizzazioni circolari di segno uguale o diverso Nei primi due casi $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono reali, fra l'altro, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1$ o $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$. Nei secondi due casi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ sono complessi e $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* = 1$ o $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 1$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^* = 0$.

Capitolo XIV

PASSAGGIO DI PARTICELLE VELOCI ATTRAVERSO LA MATERIA

§ 113. Perdite per ionizzazione di particelle veloci nella materia. Caso non relativistico

La particella carica veloce attraversando una sostanza ne ionizza gli atomi e quindi perde sua energia [1]). Nei gas le perdite per ionizzazione possono essere determinate come risultato di collisioni della particella veloce con singoli atomi. Nel mezzo condensato, invece, all'interazione con la particella in moto possono partecipare contemporaneamente più atomi. L'influenza di questa circostanza sulla perdita di energia da parte della particella è, dal punto di vista macroscopico, risultato della polarizzazione dielettrica del mezzo dalla sua carica. Dapprima consideriamo questo effetto per il caso di velocità non relativistiche della particella. Come risulta dai dati ottenuti, in questo caso la polarizzazione del mezzo incide poco sulla grandezza delle perdite. Tuttavia, una conclusione corrispondente presenta interesse metodologico per applicazioni ulteriori del metodo analogo.

Precisiamo soprattutto le condizioni che consentono lo studio macroscopico di questo fenomeno. Nello sviluppo spettrale del campo creato dalla particella in moto (con velocità v) a distanza r dal suo cammino figurano principalmente frequenze dell'ordine di v/r (« tempo d'urto » inverso). Quanto alla ionizzazione dell'atomo, la possono eseguire le componenti del campo con frequenze $\omega \gtrsim \omega_0$, ove ω_0 è una frequenza media corrispondente al moto della maggioranza degli elettroni nell'atomo. Perciò la particella interagisce contemporaneamente con più atomi se la lunghezza v/ω_0 è grande rispetto alle distanze interatomiche; nei corpi condensati quest'ultime coincidono (per ordine di grandezza) con le dimensioni a degli atomi stessi. In tal modo, arriviamo alla condizione $v \gg a\omega_0$, vale a dire che la velocità della particella ionizzante deve essere grande rispetto alle velocità degli elettroni atomici (o almeno rispetto alla maggioranza di esse) [2]).

---

[1]) Parliamo qui, come si suole, delle perdite « per ionizzazione », ma esse includono, ovviamente, anche perdite per eccitazione dei livelli atomici discreti.

[2]) Per l'energia E di qui si deduce la condizione $E \gg IM/m$ ove M è la massa della particella, m la massa dell'elettrone, I un'energia media di ionizzazione per la maggioranza degli elettroni nell'atomo.

Troviamo il campo creato dalla particella carica che si muove in un mezzo materiale. Nel caso non relativistico è sufficiente considerare il solo campo elettrico determinato esclusivamente dal potenziale scalare φ. Quest'ultimo verifica l'equazione di Poisson

$$\hat{\varepsilon}\,\Delta\varphi = -4\pi e\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \tag{113,1}$$

nella quale la permettività dielettrica va intesa nel senso operatoriale e l'espressione $e\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ a secondo membro dell'uguaglianza rappresenta la densità creata dalla carica puntiforme e che si muove con velocità costante $\mathbf{v}$ [1]).

Sviluppiamo φ in integrale di Fourier rispetto alle coordinate:

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{113,2}$$

Applicando ai due membri di questa uguaglianza l'operatore di Laplace troviamo che la componente di Fourier di $\Delta\varphi$ vale

$$(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -k^2\varphi_{\mathbf{k}}.$$

D'altra parte, calcolando la componente di Fourier di ambedue i membri dell'equazione (113,1) abbiamo

$$\hat{\varepsilon}\,(\Delta\varphi)_{\mathbf{k}} = -\int 4\pi e\delta\,(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,e^{-i\mathbf{kr}}\,dV = -4\pi e e^{-it\mathbf{vk}}.$$

Confrontando ambedue le formule otteniamo

$$\hat{\varepsilon}\,\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2}\,e^{-it\mathbf{vk}}.$$

Si vede di qui che $\varphi_{\mathbf{k}}$ dipende dal tempo mediante il fattore $\exp(-it\mathbf{vk})$. Ma l'operatore $\hat{\varepsilon}$, agendo sulla funzione $\exp(-i\omega t)$, la moltiplica per $\varepsilon(\omega)$. Perciò otteniamo infine per $\varphi_{\mathbf{k}}$ la seguente espressione:

$$\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2\varepsilon\,(\mathbf{kv})}\,e^{-it\mathbf{vk}}.$$

La componente di Fourier dell'intensità del campo è legata con la componente di Fourier del potenziale mediante

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} = -\operatorname{grad}(\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}) = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}}.$$

Quindi,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi i e\mathbf{k}}{k^2\varepsilon\,(\mathbf{kv})}\,e^{-it\mathbf{kv}}. \tag{113,3}$$

---

[1]) Supponendo rettilineo il moto della particella trascuriamo con ciò la diffusione, ciò che è sempre legittimo nel problema considerato.

Se la particella ha la carica ze, tutte le formule per il frenamento qui e nei paragrafi seguenti devono essere moltiplicate per z^2.

L'intensità totale del campo si ottiene per sommatoria inversa delle sue componenti di Fourier:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \qquad (113,4)$$

La perdita di energia da parte della particella in moto non rappresenta altro che il lavoro compiuto dalla forza inversa di frenamento $e\mathbf{E}$ agente sulla particella da parte del campo da essa creato. Considerando il valore del campo nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ in cui si trova la particella, otteniamo nell'espressione integranda della formula (113,4) il fattore exp $(it\mathbf{vk})$ che si riduce con il fattore exp $(-it\mathbf{vk})$ nell'espressione (113,3) per $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$. Perciò la forza di frenamento $\mathbf{F}$ è data dal seguente integrale:

$$\mathbf{F} = -4\pi i e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon (\mathbf{kv})} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

È evidente a priori che la forza $\mathbf{F}$ è diretta contro la velocità $\mathbf{v}$; la direzione di quest'ultima facciamo coincidere con l'asse x. Introducendo le notazioni $k_x v = \omega$, $q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ e sostituendo $dk_y\, dk_z$ con $2\pi q\, dq$, riscriviamo il valore assoluto F nella forma

$$F = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{q_0} \frac{q\omega\, dq\, d\omega}{\varepsilon(\omega)(q^2 v^2 + \omega^2)} \qquad (113,5)$$

(per limite superiore di integrazione rispetto a q si veda più avanti).

È necessario fare la seguente osservazione inerente all'integrazione rispetto a $d\omega$ nella formula (113,5). Per $\omega \to \infty$ la funzione $\varepsilon(\omega) \to 1$ e l'integrale diverge (logaritmicamente). Questa circostanza è dovuta al fatto che in realtà dal campo $\mathbf{E}$ si dovrebbe escludere il campo che esisterebbe per il moto della particella nel vuoto (cioè per $\varepsilon = 1$); è chiaro che questo campo ha niente a che vedere con il frenamento della particella nella sostanza. Questa sottrazione implicherebbe la sostituzione di $1/\varepsilon$ nell'espressione integranda (113,5) con $1/\varepsilon - 1$ dopo di che l'integrale diviene convergente. Tuttavia, si può ottenere lo stesso risultato senza la sostituzione indicata se conveniamo intendere con integrazione nei limiti da $-\infty$ a $+\infty$ l'integrazione nei limiti simmetrici da $-\Omega$ a Ω dopo di che $\Omega \to \infty$. Essendo pari la funzione $\varepsilon'(\omega)$ la parte reale dell'espressione integranda è una funzione dispari della frequenza e per l'integrazione suindicata dà zero; quanto all'integrale della parte immaginaria dell'espressione integranda, esso è convergente.

Sarà più comodo nel seguito ricorrere alla notazione

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'', \tag{113,6}$$

ove $\eta'(\omega)$ e $\eta''(\omega)$ sono rispettivamente funzioni pari e dispari e, fra l'altro $\eta'' = -\varepsilon''/|\varepsilon|^2 < 0$. La formula (113,5) si può riscrivere nella forma esplicitamente reale:

$$F = \frac{2e^2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{q_0} \frac{q\omega\,|\eta''(\omega)|}{(q^2v^2+\omega^2)}\,dq\,d\omega. \tag{113,7}$$

La perdita dell'energia sull'unità di lunghezza del cammino percorso dalla particella è il lavoro della forza di frenamento su questo cammino, cioè coincidente esattamente con la grandezza F.

In accordo con le regole generali della meccanica quantistica la componente di Fourier del campo con il vettore d'onda $\mathbf{k}$ trasmette all'elettrone di ionizzazione (elettrone δ) l'impulso $\hbar\mathbf{k}$. Per valori q sufficientemente grandi ($q \gg \omega_0/v$) abbiamo $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2 \approx q^2$ in modo che l'impulso trasmesso coincide approssimativamente con $\hbar\mathbf{q}$. Al valore $\mathbf{q}$ assegnato corrispondono collisioni con parametro d'urto $\sim 1/q$. Perciò la condizione di applicabilità del metodo macroscopico in esame chiede che $1/q \gg a$. Ciò premesso, consideriamo come limite di integrazione superiore il valore q_0 soddisfacente alla condizione $\omega_0/v \ll q_0 \ll 1/a$; la grandezza $F(q_0)$ è il frenamento della particella veloce con la trasmissione all'elettrone atomico di un impulso non superiore a $\hbar q_0$.

Integrando nella (113,7) rispetto a dq otteniamo

$$F(q_0) = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\,\ln\frac{q_0 v}{\omega}\,d\omega. \tag{113,8}$$

Questa formula in generale non può essere più trasformata, ma la si può riscrivere in una forma più comoda mediante introduzione di notazioni appropriate.

Calcoliamo preliminarmente l'integrale

$$\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\,d\omega = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{\varepsilon}\,d\omega.$$

A tale scopo osserviamo quanto segue: se l'integrazione si fa nel piano complesso ω rispetto a un contorno composto dell'asse reale e della semicirconferenza superiore σ indefinitamente lontana l'integrale si annulla poiché l'espressione integranda non ha poli nel se-

mipiano superiore. Per grandi valori dell'argomento la funzione $\varepsilon(\omega)$ è definita dalla formula (78,1):

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}. \qquad (113,9)$$

L'integrazione estesa alla semicirconferenza σ indefinitamente lontana si fa mediante questa formula e come risultato si ottiene [1])

$$-\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\, d\omega = -i\frac{2\pi N e^2}{m}\int_\sigma \frac{d\omega}{\omega} = \frac{2\pi^2 N e^2}{m}. \qquad (113,10)$$

Introduciamo una media per la frequenza del moto degli elettroni atomici determinata dall'uguaglianza

$$\ln\bar{\omega} = \int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\ln\omega\, d\omega \Big/ \int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{m}{2\pi^2 N e^2}\int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\ln\omega\, d\omega. \qquad (113,11)$$

Questa notazione consente di riscrivere la formula (113,8) nel seguente modo:

$$F(q_0) = \frac{4\pi N e^4}{mv^2}\ln\frac{q_0 v}{\bar{\omega}}. \qquad (113,12)$$

Facciamo qui la seguente osservazione. A giudicare dalla forma dell'espressione (113,7) o (113,11) si potrebbe pensare che un contributo notevole nel frenamento per ionizzazione (113,12) provenga dai domini di frequenze in cui esiste notevole assorbimento. Tuttavia, ciò non è indispensabile e nelle formule suindicate può figurare un contributo notevole proveniente anche dai domini in cui ε'' è trascurabile. Infatti, in questi domini la funzione $\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega)$ può passare attraverso zero e gli zeri di $\varepsilon(\omega)$ sono poli dell'espressione integranda nella formula (113,5). È ovvio che in realtà la $\varepsilon''(\omega)$ non è nulla a rigore, quindi lo zero della funzione $\varepsilon(\omega)$ si trova non sull'asse reale stesso ma un po' in basso. Ciò significa che nell'usare l'espressione reale di $\varepsilon(\omega)$ passante per zero il polo nell'espressione integranda va aggirato dall'alto il che fornisce un contributo corrispondente all'integrale. Così, se la funzione $\varepsilon(\omega)$ è data dalla formula (84,5), il contributo nel frenamento (113,12), proveniente dall'ag-

[1]) Questo risultato coincide con l'espressione (82,12), come deve essere, poiché per $|\omega| \to \infty$ abbiamo $|\varepsilon| \to 1$ e perciò $\eta'' \to -\varepsilon''$.

giramento dei poli $\pm\omega_1$ (ove $\varepsilon(\omega_1) = 0$), vale, come è facile provare eseguendo un calcolo diretto mediante la formula (113,7),

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2a^2} \ln \frac{q_0 v}{\omega_1}.$$

Per trovare il frenamento $F(q_1)$ con la trasmissione di un impulso non superiore a $q_1 > q_0$, bisogna « raccordare » la formula (113,12) con quella della teoria quantistica delle collisioni corrispondente al frenamento per collisioni con atomi separati. Ciò è possibile grazie al fatto che i domini di applicabilità di queste due formule si sovrappongono reciprocamente. Come è noto dalla teoria delle collisioni, il frenamento con trasmissione di impulso nell'intervallo $\hbar dq$ è

$$dF = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \frac{dq}{q}, \tag{113,13}$$

fra l'altro, questa formula è applicabile (nel caso non relativistico) qualunque siano i valori $q \gg \omega_0/v$ ammissibili dalle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia a sola condizione che l'energia trasmessa sia piccola rispetto all'energia iniziale della particella veloce [1]). Il frenamento con tutti i valori q compresi tra q_0 e q_1 è, rispettivamente,

$$\frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_1}{q_0}.$$

Aggiungendo questo valore alla formula (113,12) q_0 in questa ultima va sostituito semplicemente con q_1 in modo che

$$F(q_1) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{q_1 v}{\bar{\omega}}. \tag{113,14}$$

Se all'elettrone atomico si trasmette impulso $\hbar q_1$ grande (rispetto alle dimensioni atomiche), l'energia da esso acquisita vale $E_1 = \hbar^2 q_1^2/2m$. Introducendo questa grandezza scriviamo

$$F(E_1) = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \ln \frac{2mv^2E_1}{\hbar^2\bar{\omega}^2}. \tag{113,15}$$

Le formule (113,14-15) determinano il frenamento della particella veloce mediante ionizzazione con trasmissione di energia non superiore a E_1, valore piccolo rispetto all'energia iniziale della particella. Sottolineiamo che sotto questa condizione le formule sono cor-

[1]) Cfr. III § 149; la grandezza F differisce dal « frenamento efficace » che là è stato introdotto per il fattore $N_a = N/Z$ che esprime la densità del numero di atomi. La formula (113,13) corrisponde alle collisioni con elettroni liberi. Tuttavia il suo dominio di applicabilità ($q \gg \omega_0/v$) comincia da q tali per cui gli elettroni atomici non si possono ancora considerare come liberi. Quest'ultimo chiederebbe che $q \gg \omega_0/v_0$ (v_0 è l'ordine di grandezza delle velocità della maggioranza degli elettroni atomici) quando l'energia $\hbar^2q^2/2m$ dell'elettrone δ sarebbe grande rispetto alle energie atomiche.

rette in misura uguale sia per elettroni veloci che per particelle pesanti veloci.

La formula (113,15) differisce dal risultato della teoria microscopica che non tiene conto dell'interazione tra atomi (cfr. III § 149, la formula (149,14)) per sola definizione di « energia di ionizzazione » I il ruolo della quale ora è giocato da $\hbar\bar{\omega}$. Tuttavia l'energia di ionizzazione media (rispetto agli elettroni) dell'atomo, in generale, dipende poco dalla sua interazione con gli altri atomi in quanto il ruolo principale in essa giocano gli elettroni dei gusci interni quasi non toccati da questa interazione. Per di più, nel caso considerato questa grandezza si trova sotto il segno di logaritmo e perciò il modo della sua definizione incide debolmente sulla grandezza del frenamento.

Per collisione fra particella pesante e elettrone persino l'impulso trasmesso massimo $\hbar q_{\max}$ è piccolo rispetto all'impulso della particella Mv. Perciò il cambiamento dell'energia della particella pesante vale $\mathbf{v}\cdot\hbar\mathbf{q}$; uguagliando questa grandezza all'energia dell'elettrone otteniamo

$$\hbar^2 q^2/2m = \hbar\mathbf{q}\mathbf{v} \leqslant \hbar q v$$

di qui $\hbar q_{\max} = 2\,mv$ e in seguito $E_{1\,\max} = 2mv^2$. Sostituendo questo valore al posto di E_1 nella formula (113,15), otteniamo il frenamento per ionizzazione totale della particella pesante:

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{\hbar\bar{\omega}}. \qquad (113,16)$$

Questa formula differisce da quella che di solito si usa (cfr. III, la formula (150,10)) per la sola definizione dell'energia di ionizzazione $\hbar\bar{\omega}$.

Vediamo in che modo la grandezza $\hbar\bar{\omega}$ definita dalla formula (113,11) nel mezzo rarefatto si trasforma in energia di ionizzazione media di un singolo atomo definita dalla formula (149,11) del volume III. A tale scopo osserviamo che nel gas rarefatto (che per semplicità supponiamo composto di atomi identici) la permettività dielettrica è

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N_a \alpha(\omega),$$

ove N_a è il numero di atomi nell'unità di volume, $\alpha(\omega)$ la polarizzabilità di un atomo; in questo caso $|\varepsilon - 1| \ll 1$. Per la parte immaginaria della grandezza $\eta = 1/\varepsilon$ abbiamo

$$|\eta''| \approx 4\pi N_a \alpha''(\omega).$$

La polarizzabilità dell'atomo è data dalla formula (85,13) del volume IV; separandovi la parte immaginaria (mediante la formula (75,19) del volume IV) otteniamo per $\omega > 0$:

$$|\eta''| = \frac{4\pi}{3} N_a \sum_n |\mathbf{d}_{0n}|^2 \delta (E_n - E_0 - \hbar\omega),$$

ove E_0 e E_n sono le energie degli stati fondamentale e eccitato dell'atomo. Sostituendo questa espressione nella (113,11), integrando e portandovi $N = N_a Z$, riotteniamo la definizione (149,11) del volume III.

§ 114. *Perdite per ionizzazione di particelle veloci nella materia. Caso relativistico*

Per velocità confrontabili con le velocità della luce l'influsso della polarizzazione del mezzo sul frenamento della particella veloce può essere molto sensibile, come vedremo più avanti, e non soltanto nelle sostanze condensate, ma persino nei gas [1]).

Per dedurre le formule corrispondenti ricorriamo a un metodo analogo a quello usato nel paragrafo precedente. In questo caso, tuttavia, occorre partire dalle equazioni di Maxwell complete. Se esistono cariche esterne (con la densità spaziale ρ_{est}) e correnti esterne (con la densità $\mathbf{j}_{est}$) queste equazioni sono [2])

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{114,1}$$

$$\operatorname{div} \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 4\pi\rho_{est}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\varepsilon}\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{est}. \tag{114,2}$$

Nel caso considerato la distribuzione delle cariche e correnti esterne è data dalle formule

$$\rho_{est} = e\delta (\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_{est} = e\mathbf{v}\delta (\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \tag{114,3}$$

Introduciamo i potenziali scalare e vettore secondo le definizioni ordinarie:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \tag{114,4}$$

---

[1]) Questo effetto è stato scoperto da *E. Fermi* (1940) e da esso calcolato per un modello speciale di gas composto di atomi considerati come oscillatori armonici. La deduzione generale che segue appartiene a *L. Landau*.

[2]) Poniamo ovunque $\mu(\omega) = 1$ poiché per frequenze importanti nel caso di perdite di ionizzazione la sostanza si comporta come non magnetica.

con i quali le equazioni (114,1) si verificano identicamente. Ai potenziali **A** e φ poniamo la condizione complementare seguente

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\varepsilon} \varphi}{\partial t} = 0 \tag{114,5}$$

che generalizza le *condizioni di Lorentz* usate nella teoria della radiazione. Allora la sostituzione della (114,4) nella (114,2) conduce alle equazioni seguenti per i potenziali:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} - \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \\ \hat{\varepsilon}\left(\Delta\varphi - \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) &= -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \end{aligned} \tag{114,6}$$

Sviluppiamo **A** e φ in integrali di Fourier rispetto alle coordinate. Considerando le componenti di Fourier da entrambi i membri delle equazioni (114,6), otteniamo

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} e\mathbf{v} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}, \\ \hat{\varepsilon}\left(k^2 \varphi_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}\right) &= 4\pi e e^{-i\mathbf{k}\mathbf{v}t}. \end{aligned}$$

Di qui si vede che la dipendenza di $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ e $\varphi_{\mathbf{k}}$ dal tempo è determinata dal fattore $\exp(-it\mathbf{k}\mathbf{v})$. Introducendo di nuovo la notazione $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v} = k_x v$ otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} &= \frac{4\pi e}{c} \frac{\mathbf{v}}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}, \\ \varphi_{\mathbf{k}} &= \frac{4\pi e}{\varepsilon(\omega)} \frac{1}{k^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)/c^2} e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{114,7}$$

La componente di Fourier dell'intensità del campo elettrico è

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} - i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}. \tag{114,8}$$

La forza di frenamento $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ [1]) agente sulla particella si trova mediante le formule ottenute allo stesso modo come nel paragrafo precedente. Con le stesse notazioni otteniamo ora la seguente for-

[1]) Quanto alla forza magnetica $e\,[\mathbf{v}\mathbf{H}]/c$, dalle considerazioni di simmetria è evidente che essa si annulla (per di più, essendo perpendicolare alla velocità della particella questa forza, in generale, non produrrebbe nessun lavoro su questa particella).

mula esprimente il valore di questa forza:

$$F=\frac{ie^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{q_0}\frac{\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\omega q\,dq\,d\omega}{\varepsilon\left[q^2+\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\right]} \qquad (114,9)$$

(per $c\to\infty$ questa formula diviene, ovviamente, la (113,5)).

Cominciamo dall'integrazione per parti. Avendo intenzione di integrare nel piano complesso ω, precisiamo preliminarmente in quali punti del semipiano superiore l'espressione integranda ha dei poli. La funzione $\varepsilon(\omega)$ non ha in questo dominio né punti singolari né zeri; perciò i poli cercati possono essere soltanto gli zeri dell'espressione

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)-q^2.$$

Mostriamo che per qualsiasi valore del numero reale positivo q^2 questa espressione si annulla per un solo valore ω.

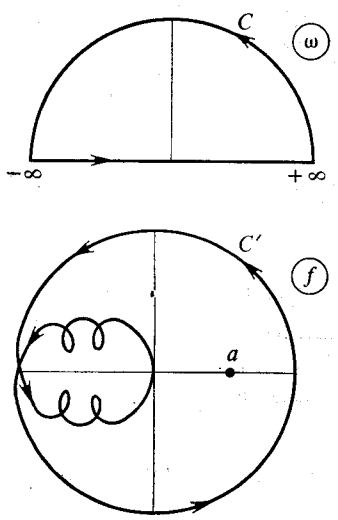


Fig. 61

Per la dimostrazione [1]) ricorriamo a un noto teorema della teoria delle funzioni di variabile complessa secondo il quale l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{df(\omega)}{d\omega}\,\frac{d\omega}{f(\omega)-a}, \qquad (114,10)$$

esteso a un contorno chiuso C è uguale alla differenza fra numero di zeri e numero di poli della funzione $f(\omega)-a$ nel dominio delimitato dal contorno C. Siano

$$f(\omega)=\omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right),$$

$a=q^2$ un numero reale positivo, e con C intendiamo un contorno composto dell'asse reale e della semicirconferenza infinitamente lontana (fig. 61). La funzione $f(\omega)$ non ha poli in nessun punto del semipiano superiore (e sull'asse reale stesso [2]); perciò l'integrale (114,10) fornisce direttamente il numero di zeri della funzione $f(\omega)-$

[1]) Le considerazioni che seguono sono analoghe alla dimostrazione della non esistenza di zeri della funzione $\varepsilon(\omega)$ nel semipiano superiore, data in V § 123.

[2]) Nei metalli $\varepsilon(\omega)$ ha polo per $\omega=0$, ma $\omega^2\varepsilon$ tende a zero.

$-a$ nel semipiano superiore. Per il calcolo scriviamo questo integrale nella forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{df}{f-a} \tag{114,11}$$

e integriamo lungo il contorno C' nel piano della variabile complessa f, che è la trasformazione del contorno C dal piano ω. Per $\omega = 0$ la funzione $f = 0$. Per ω reali positivi abbiamo $\operatorname{Im} f > 0$ e per negativi $\operatorname{Im} f < 0$. All'infinito, invece, $f \to -\omega^2 (v^{-2} - c^{-2})$; perciò f descrive una circonferenza infinitamente lontana quando ω descrive una semicirconferenza. Ne risulta che il contorno di integrazione C' nel piano f ha la forma rappresentata schematicamente nella fig. 61. Per a reale positivo (come nella fig. 61) l'argomento del numero complesso $f - a$ descrivendo C' va sostituito con 2π e l'integrale (114,11) vale 1, come si doveva dimostrare [1].

Per di più, è facile vedere che l'unica radice dell'equazione $f(\omega) - q^2 = 0$ giace sull'asse immaginario ω. Infatti, per valori ω puramente immaginari la funzione $f(\omega)$ (assieme alla funzione $\varepsilon(\omega)$) è reale e assume tutti i valori da 0 a ∞, compresi tutti i valori positivi di q^2.

Torniamo all'integrale rispetto $d\omega$ nell'espressione (114,9):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\omega\, d\omega}{q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}.$$

Lo si può rappresentare nella forma di differenza fra integrale esteso al contorno C e integrale esteso a una semicirconferenza indefinitamente lontana. Il secondo di questi integrali vale

$$\int\frac{d\omega}{\omega} = i\pi$$

e il primo è uguale al moltiplicato per $2\pi i$ risultato della sottrazione dell'espressione integranda rispetto al suo unico polo. Con $\omega(q)$ intendiamo una funzione definita dall'uguaglianza

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right) = q^2. \tag{114,12}$$

Allora secondo la nota regola per il calcolo dei residui[2])

---

[1]) Se invece a è un numero negativo, allora nel descrivere il contorno C' l'argomento $f - a$ va sostituito con 4π cosicché l'integrale (114,11) è uguale a 2; in altre parole, l'equazione $f(\omega) = -|a|$ ha due zeri nel semipiano superiore.

[2]) Il residuo dell'espressione $f(z)/\varphi(z)$ rispetto al polo $z = z_0$ vale $f(z_0)/\varphi'(z_0)$.

troviamo che l'integrale esteso a C vale

$$2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)\right]} = 2\pi i \frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{dq^2}{d\omega}}.$$

Riunendo le espressioni così ottenute e sostituendole nella (114,9) troviamo

$$F = e^2 \int_0^{q_0} \left[\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{q\, dq/d\omega} + 1\right] q\, dq$$

oppure, sostituendo nel primo termine l'integrazione rispetto a dq con quella rispetto a $d\omega$,

$$F = e^2 \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left[\frac{1}{v^2\varepsilon(\omega)} - \frac{1}{c^2}\right] \omega\, d\omega + \frac{1}{2} e^2 q_0^2 =$$

$$= \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)} \left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1\right) \omega\, d\omega + \frac{e^2 q_0^2}{2} + \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right) \times$$

$$\times [\omega^2(q_0 - \omega^2(0)]. \qquad (114,13)$$

A q grandi corrispondono grandi in valore assoluto le radici dell'equazione (114,12). Ciò premesso, usando l'espressione (113,9) per $\varepsilon(\omega)$ troviamo

$$\omega^2(q_0) = -v^2\gamma^2\left(q_0^2 + \frac{4\pi N e^2}{mc^2}\right),$$

ove è stata introdotta la notazione

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Sostituendo nella formula (114,13) otteniamo

$$F = \frac{e^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{ivq_0\gamma} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)} - 1\right] \omega\, d\omega - \frac{2\pi N e^4}{mc^2} - \frac{e^2\omega^2(0)}{2v^2\gamma^2} \qquad (114,14)$$

(nell'integrale è sufficiente lasciare in $\omega(q_0)$ il termine principale $ivq_0\gamma$).

L'integrazione nella (114,14) si fa rispetto a ω immaginari. Introduciamo la variabile reale secondo $\omega = i\omega''$, indichiamo con

$\omega(0) = i\xi$ il limite inferiore dell'integrale e introduciamo di nuovo la notazione (113,6) $1/\varepsilon = \eta$. Dobbiamo calcolare l'integrale

$$-\int_{\xi}^{vq_0\gamma} [\eta(i\omega'') - 1]\,\omega''\,d\omega''.$$

I valori della funzione $\eta(\omega)$ sull'asse immaginario si possono esprimere in funzione del valore della sua parte immaginaria sull'asse reale in base alla formula

$$\eta(i\omega'') - 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x\eta''(x)}{x^2+\omega''^2}\,dx$$

(cfr. la formula (82,15)). Perciò (trascurando x rispetto a $vq_0\gamma$) otteniamo per l'integrale considerato

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\xi}^{vq_0\gamma} \frac{x\,|\eta''(x)|\,\omega''\,d\omega''\,dx}{x^2+\omega''^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} x\,|\eta''(x)|\,\ln\frac{v^2q_0^2\gamma^2}{x^2+\xi^2}\,dx.$$

Sostituendo questo risultato nella formula (114,14) e per rendere più semplice la scrittura introduciamo la notazione

$$\ln\Omega = \frac{1}{2}\,\overline{\ln(\omega^2+\xi^2)}, \qquad (114,15)$$

ove il trattino orizzontale significa la media di peso $\omega\,|\eta''(\omega)|$ come è stato fatto nella formula (113,11). Allora otteniamo

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\ln\frac{q_0v\gamma}{\Omega} - \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} + \frac{e^2\xi^2}{2v^2\gamma^2}. \qquad (114,16)$$

Lo studio ulteriore di questa formula chiede di considerare separatamente due casi. Supponiamo dapprima che il mezzo sia un dielettrico e che la velocità della particella verifichi la condizione

$$v^2 < c^2/\varepsilon_0, \qquad (114,17)$$

ove $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ è il valore elettrostatico della permettività dielettrica. Sull'asse immaginario la funzione $\varepsilon(\omega)$ decresce monotonamente da $\varepsilon_0 > 1$ per $\omega = 0$ a 1 per $\omega = i\infty$. In questo caso l'espressione a primo membro dell'equazione (114,12) cresce monotonamente da 0 a ∞. Perciò per $q = 0$ l'equazione (114,12) dà anche $\omega = 0$. In tal modo, nella (114,16) si deve porre $\xi = 0$; allora Ω si trasforma nella frequenza media atomica $\bar{\omega}$ definita dalla formula (113,11):

$$F(q_0) = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\left[\ln\frac{q_0v\gamma}{\bar{\omega}} - \frac{v^2}{2c^2}\right] \qquad (114,18)$$

(per $v \ll c$ questa formula, come deve essere, si trasforma in quella (113,12)).

Il valore q_0 verifica la condizione $q_0 \ll 1/a$, ove a è l'ordine delle distanze interatomiche (nel mezzo condensato delle dimensioni atomiche). Per estrapolare questa formula al dominio di più grandi valori dell'impulso e dell'energia trasmessi bisogna eseguirne il « raccordo » alle formule della teoria delle collisioni ordinaria, così come è stato fatto nel paragrafo precedente. Qui, tuttavia, il raccordo si fa in due tappe. Dapprima mediante la formula (113,13) passiamo al dominio dei valori q corrispondenti alle trasmissioni di energia grandi rispetto alle energie atomiche ma sempre ancora non relativistiche. In questo caso la formula (114,18) non cambia ma in essa si può introdurre l'energia del elettrone δ come $\hbar^2 q_1^2/2m$. Indicandola con E_1 otteniamo

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left[\ln \frac{2mE_1 v^2 \gamma^2}{\hbar^2 \bar{\omega}^2} - \frac{v^2}{c^2} \right]. \qquad (114,19)$$

In seguito, si può passare al dominio dei valori E_1 relativistici mediante la formula della teoria relativistica delle collisioni secondo la quale il frenamento con la trasmissione di energia nell'intervallo fra E' e $E' + dE'$ vale

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \frac{dE'}{E'} \qquad (114,20)$$

se E' è piccolo rispetto alla trasmissione massima $E_{1\,\max}$ ammissibile dalle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia per collisione di una particella veloce con elettrone libero [1]). Poiché l'espressione (114,20) per integrazione dà $\ln E'$, è chiaro che la forma dell'espressione (114,19) non varia in modo che questa formula è relativa a tutti i valori $E_1 \ll E_{1\,\max}$.

Per frenamento di una particella pesante veloce (di massa $M \gg m$ e di energia E anche se relativistica ma tale che $E \ll M^2c^2/m$) la trasmissione massima di energia all'elettrone costituisce $E_{1\,\max} \approx \approx 2mv^2\gamma^2$ ed è ancora piccola rispetto a E (cfr. IV, § 82, la formula (82,23)). Per queste particelle l'espressione differenziale del frenamento su elettroni liberi ha la forma

$$\frac{2\pi N e^4}{m v^2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{2mc^2\gamma^2} \right) dE'$$

[1]) Cfr. IV, le formule (81,15) e (82,24). Il frenamento F si ottiene per moltiplicazione di queste espressioni della sezione di diffusione per la perdita di energia $m\Delta$ e per N.

qualunque siano E' (cfr. IV § 82, la formula (82,24)). Il frenamento supplementare (relativamente alla (114,19)) con la trasmissione dell'energia da E_1 a $E_{1\,\max}$ (ove $E_1 \ll E_{1\,\max}$) in questo caso vale

$$\frac{2\pi Ne^4}{mv^2}\left(\ln\frac{E_{1\,\max}}{E_1}-\frac{E_{1\,\max}}{2mc^2\gamma^2}\right)=\frac{2\pi Ne^4}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2\gamma^2}{E_1}-\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (114,21)$$

Sommando questa espressione alla formula (114,19) troviamo il frenamento totale della particella pesante veloce:

$$F=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\left(\ln\frac{2mv^2\gamma^2}{\hbar\bar{\omega}}-\frac{v^2}{c^2}\right). \qquad (114,22)$$

Questa formula differisce dal risultato della teoria ordinaria per la sola definizione di « energia di ionizzazione » $\hbar\bar{\omega}$ (cfr. IV, la formula (82,26)).

Passiamo ora al secondo caso quando la velocità della particella verifica la condizione

$$v^2 > c^2/\varepsilon_0 \qquad (114,23)$$

(questo caso, in particolare, si verifica sempre per i metalli poiché in essi $\varepsilon(0) = \infty$). L'espressione $\omega^2(\varepsilon/c^2 - 1/v^2)$ a primo membro dell'equazione (114,12) in questo caso passa (sull'asse immaginario ω) due volte per zero: per $\omega = 0$ e per $\omega = i\xi$, ove ξ è definita dall'uguaglianza

$$\varepsilon(i\xi) = c^2/v^2. \qquad (114,24)$$

Nell'intervallo tra 0 e $i\xi$ questa espressione è negativa, mentre per $|\omega| > \xi$ essa assume tutti i valori positivi da 0 a ∞. Quindi per $q \to 0$ la radice dell'equazione (114,12) tende in questo caso al valore ξ che deve essere sostituito nelle espressioni (114,15) e (114,16).

Qui si possono distinguere due casi limite. Se il valore ξ è piccolo rispetto alle frequenze atomiche ω_0, allora nella formula (114,16) si può trascurare l'ultimo termine e $\Omega \approx \bar{\omega}$. Come risultato riotteniamo la formula (114,18). Particolare interesse presenta il caso limite inverso in cui $\xi \gg \omega_0$. Poiché per grandi valori di ξ la funzione $\varepsilon(i\xi)$ tende a 1, dalla formula (114,24) risulta con evidenza che questo caso corrisponde alle velocità ultrarelativistiche della particella. Usando per la funzione $\varepsilon(\omega)$ la formula (113,9) ricaviamo dalla (114,24):

$$\xi^2=\frac{4\pi Ne^2v^2\gamma^2}{mc^2}\approx\frac{4\pi Ne^2\gamma^2}{m}.$$

All'aumentare della velocità della particella la condizione $\xi \gg \omega_0$ in fin dei conti sarà soddisfatta in qualsiasi mezzo, cioè per ogni valore della densità elettronica N (anche nel gas). Tuttavia le velocità necessarie sono tanto più grandi quanto più piccolo è il valore di N, cioè quanto più rarefatto è il mezzo.

Dalla formula (114,15) ora abbiamo semplicemente $\Omega \approx \xi$; ponendo anche $v \approx c$ troviamo che gli ultimi due termini nella formula (114,16) si riducono reciprocamente e resta

$$F(q_0) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln \frac{mc^2 q_0^2}{4\pi N e^2}.$$

Estrapolando questa formula al dominio di grandi valori della trasmissione dell'impulso e dell'energia allo stesso modo come precedentemente, troviamo la seguente espressione per il frenamento della particella ultrarelativistica con trasmissione di energia non superiore a E_1 (fra l'altro, $E_1 \ll E_{1\,\max}$):

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln \frac{m^2 c^2 E_1}{2\pi N e^2 \hbar^2}. \qquad (114,25)$$

Questo risultato differisce notevolmente da quello dato dalla teoria ordinaria che non tiene conto della polarizzazione del mezzo. Secondo quest'ultima (cfr. IV § 82) nel caso ultrarelativistico il frenamento $F(E_1)$ continua a crescere all'aumentare dell'energia della particella, anche se in modo relativamente lento, secondo una legge logaritmica [1])

$$F(E_1) = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \ln \left(\frac{2mc^2 \gamma^2 E_1}{I^2} - 2 \right).$$

La polarizzazione del mezzo, invece, implica uno schermaggio tale della carica per cui la crescita del frenamento cessa in fin dei conti e tende a un limite finito dato dalla formula (114,25) non contenente γ.

Per le particelle pesanti si può scrivere una formula esprimente anche il frenamento totale con qualsiasi trasmissione di energia fino a $E_{1\,\max}$ (a condizione che $E_{1\,\max}$ sia piccola rispetto all'energia della particella stessa). Usando di nuovo l'espressione (114,21) (nella quale ora si può porre $v = c$) troviamo

$$F = \frac{2\pi N e^4}{mc^2} \left[\ln \frac{m^2 c^4 \gamma^2}{\pi N e^2 \hbar^2} - 1 \right]. \qquad (114,26)$$

Vediamo che ciononostante il frenamento totale continua a crescere con la velocità della particella per conto di collisioni vicine con grande trasmissione di energia durante le quali non si rivela effetto di schermaggio della polarizzazione del mezzo. Questa crescita, tuttavia, è un po' più lenta che nella teoria che non tiene conto della polarizzazione. Secondo quest'ultima

$$F = \frac{4\pi N e^4}{mc^2} \left[\ln \frac{2mc^2 \gamma^2}{I} - 1 \right]$$

[1]) Questa formula si ottiene sommando le espressioni (82,20) e (82,25) del volume IV; nell'ultima espressione con $m\Delta_{\max}$ si deve intendere E_1. Ricordiamo che per piccola trasmissione di energia E_1 le formule si riferiscono già agli elettroni veloci che alle particelle pesanti veloci.

(cfr. IV, la formula (82,28)); il coefficiente nel termine contenente $\ln \gamma$ qui costituisce il doppio che nella formula (114,26).

Sottolineiamo anche che l'esistenza della densità elettronica N nell'argomento del logaritmo nelle formule (114,25-26) conduce alla seguente proprietà di frenamento delle particelle ultrarelativistiche: quando questa particella attraversa strati di sostanze diverse, contenenti numero identico di elettroni (su un cm^2 della loro superficie), il frenamento è più piccolo nella sostanza con N più grande.

§ 115. *Radiazione Čerenkov*

Una particella carica che si muove nel mezzo trasparente, sotto determinate condizioni emette un'originale radiazione osservata per la prima volta da *S.I. Vavilov* e *P.A. Čerenkov* e teoricamente interpretata e calcolata da *I.E. Tamm* e *I.M. Frank* (1937). Sottolineiamo che questa radiazione non ha niente a che vedere con la radiazione di frenamento che infatti ha sempre luogo (per moto dell'elettrone veloce). Quest'ultima va emessa dall'elettrone stesso in moto per sue collisioni con gli atomi. Nel fenomeno scoperto da Čerenkov abbiamo a che fare con la radiazione emessa dal mezzo sotto influsso del campo creato dalla particella che si muove in questo mezzo. La differenza tra ambedue i tipi di radiazione si verifica in modo particolarmente evidente nel passare al limite della massa grande a piacere della particella: in questo caso la radiazione di frenamento scompare assolutamente, mentre la radiazione Čerenkov in generale non cambia.

Il vettore d'onda e la frequenza dell'onda elettromagnetica propagantesi nel mezzo trasparente sono legati dalla relazione $k = n\omega/c$, ove $n = \sqrt{\varepsilon}$ è l'indice di rifrazione reale; come prima, supponiamo il mezzo non magnetico e isotropo. D'altra parte, abbiamo visto che la frequenza della componente di Fourier del campo di una particella animata da un moto uniforme nel mezzo è legata con la componente x del vettore d'onda (l'asse x coincide con la direzione della velocità della particella) mediante la relazione $\omega = k_x v$. Affinché questa componente rappresenti un'onda propagantesi liberamente, le relazioni $k = n\omega/c$ e $k_x = \omega/v$ non devono contraddire l'una l'altra. Poiché deve essere $k > k_x$ è necessario che sia soddisfatta la condizione

$$v > c/n\,(\omega). \tag{115,1}$$

In tal modo, la radiazione con frequenza ω si produce se la velocità della particella supera la velocità di fase delle onde di questa stessa frequenza nel mezzo considerato [1]).

[1]) Prima della comparsa della teoria della relatività il problema formale della radiazione da elettrone che si muove uniformemente nel vuoto con la velocità $v > c$ è stato studiato da *A. Sommerfeld* (1904).

Sia θ l'angolo formato dalla direzione del moto della particella e dalla direzione della radiazione. Abbiamo $k_x = k \cos\theta = (n\omega/c) \times \times \cos\theta$ e, confrontando con l'uguaglianza $k_x = \omega/v$, troviamo che

$$\cos\theta = c/nv. \tag{115,2}$$

Quindi, la radiazione di una data frequenza corrisponde completamente a un determinato valore dell'angolo θ. In altre parole, la radiazione di ogni frequenza viene emessa in avanti nella direzione del moto della particella a va distribuita sulla superficie conica con angolo di apertura θ definito dalla formula (115,2). La condizione di distribuzione della radiazione e la sua distribuzione secondo le frequenze sono, quindi, connesse in un determinato modo.

La radiazione delle onde elettromagnetiche (qualora esista) è legata con determinata perdita di energia da parte della particella in moto. Questa perdita costituisce parte, anche se trascurabile, di quel frenamento totale che è stato calcolato nel paragrafo precedente (in esso non entra la radiazione di frenamento). In questo senso il nome di perdite « di ionizzazione » totali nel caso considerato non è corretto. Separiamo ora questa parte delle perdite complete; con ciò definiremo l'intensità della radiazione Čerenkov.

In accordo con la formula (114,9) la perdita di energia nell'intervallo di frequenze $d\omega$ è data dall'espressione

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2\varepsilon}\right) \int \frac{q\,dq}{q^2 - \omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right)},$$

ove il segno $\sum$ significa che si deve calcolare la somma delle espressioni contenenti $\omega = \pm\,|\,\omega\,|$. Introduciamo la nuova variabile

$$\xi = q^2 - \omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right).$$

Allora

$$dF = -d\omega \frac{ie^2}{2\pi} \sum \omega \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2\varepsilon}\right) \int \frac{d\xi}{\xi}.$$

Per integrazione lungo l'asse reale ξ il punto singolare $\xi = 0$ (corrispondente esattamente al soddisfacimento della relazione $q^2 + k_x^2 = k^2$) deve essere aggirato in determinato modo. La direzione dell'aggiramento è determinata dal fatto che la grandezza $\varepsilon(\omega)$, benché supposta reale (il mezzo è trasparente!), gode in effetti di una parte immaginaria, anche se piccola, che è positiva per $\omega > 0$ e negativa per $\omega < 0$. Conformemente a ciò ξ gode di piccola parte immaginaria negativa (positiva), e si deve integrare seguendo un cammino passante sotto (sopra) l'asse reale. Ciò significa che spostando il cammino di integrazione sull'asse reale il punto singolare deve essere aggirato inferiormente (superiormente). Son questi aggiramenti a dare contributo in dF, mentre le parti reali si annullano completamen-

te nel calcolare la somma. Eseguendo aggiramenti lungo semicirconferenze infinitesime otteniamo

$$\sum \omega \int \frac{d\xi}{\xi} = \omega \left\{ \int_{\smile} \frac{d\xi}{\xi} - \int_{\frown} \frac{d\xi}{\xi} \right\} = 2i\pi\omega.$$

Infine abbiamo così la formula

$$dF = \frac{e^2}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \omega \, d\omega \qquad (115,3)$$

che definisce l'intensità della radiazione nell'intervallo di frequenze $d\omega$. Secondo la formula (115,2) questa radiazione è concentrata nell'intervallo degli angoli

$$d\theta = \frac{c}{vn^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{dn}{d\omega} d\omega. \qquad (115,4)$$

L'intensità totale della radiazione è data dall'integrale dell'espressione (115,3) calcolato rispetto a tutte le frequenze nel dominio del mezzo trasparente.

È altrettanto facile precisare la questione sulla polarizzazione della radiazione Čerenkov. Come si vede dalla formula (114,7), il potenziale vettore del campo della radiazione è diretto lungo la velocità **v**. Il campo magnetico $\mathbf{H}_\mathbf{k} = i\,[\mathbf{k}\mathbf{A}_\mathbf{k}]$ è diretto, quindi, perpendicolarmente al piano passante per **v** nella direzione della semiretta **k**. Il campo elettrico, invece (nella zona d'onda della radiazione), è perpendicolare al campo magnetico e perciò giace nella zona suindicata.

Problema

Trovare il cono dei vettori d'onda della radiazione di Čerenkov da parte di una particella che si muove nel cristallo uniassico non magnetico a) nella direzione dell'asse ottico e b) perpendicolarmente all'esse ottico (*V.L. Ginzburg*, 1940).

Soluzione. a) Per il moto della carica nel cristallo uniassico la radiazione Čerenkov, in generale, si produce secondo due coni corrispondenti all'onda ordinaria e a quella straordinaria. Ma per il moto lungo l'asse ottico l'onda ordinaria non va emessa (benché una condizione della forma (115,1) potrebbe essere soddisfatta!): l'onda ordinaria è sempre polarizzata linearmente con il vettore **E** perpendicolarmente alla sezione principale (cioè al piano passante per l'asse ottico, ossia l'asse z, e la direzione data **k**); l'impossibilità di emissione di un'onda di questo tipo è evidente già nel caso considerato dal fatto che il lavoro $e\mathbf{E}\mathbf{v} = 0$, vale a dire che non esiste perdita di energia da parte della particella. Il cono della radiazione straordinaria si ottiene sostituendo il valore di n dall'uguaglianza (115,2) nella formula (98,5); la legittimità di questa sostituzione non è legata con l'isotropia del mezzo (l'angolo θ fra **k** e **v** coincide in questo caso con l'angolo formato da **k** e dall'asse ottico). Troviamo che

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp} \left(\frac{v^2}{c^2} \varepsilon_\perp - 1\right)$$

ove dev'essere $v > c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Questo cono è circolare con distribuzione uniforme dell'intensità secondo le sue generatrici (come ciò è evidente a priori per ragioni di simmetria). L'apertura ϑ del cono dei vettori radiali è legata con θ mediante l'uguaglianza $\operatorname{tg}\vartheta = \varepsilon_\perp \operatorname{tg}\theta/\varepsilon_\parallel$.

b) In questo caso esistono due coni Čerenkov. Consideriamo la direzione **v** come asse x e l'asse ottico come asse z; θ è l'angolo fra **k** e l'asse x, φ l'azimut della direzione **k** calcolato dal piano xy (fig. 62). L'appertura del cono delle onde ordinarie è data dall'uguaglianza

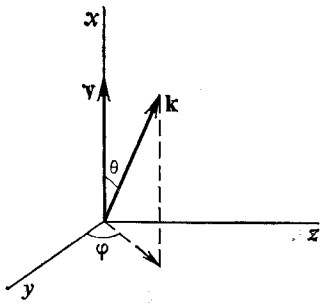


Fig. 62

$$\cos\theta = c/v\sqrt{\varepsilon_\perp},$$

ove deve essere $v > c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$. Questo cono è circolare, ma l'intensità della radiazione dipende dall'azimut [1]); in particolare, la radiazione non esiste nel piano xz, $\varphi = \pi/2$ (in virtù dell'uguaglianza $\mathbf{vE} = 0$). Il cono delle onde straordinarie non è circolare e la sua apertura dipende da φ:

$$\cos^2\theta = \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\operatorname{sen}^2\varphi + \varepsilon_\perp}{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)\operatorname{sen}^2\varphi + \varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel v^2/c^2},$$

ove deve essere $v > c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$. La radiazione straordinaria è polarizzata con il vettore **D** nella sezione principale perpendicolarmente a **k**. Se **k** giace nel piano xy ($\varphi = 0$), il vettore **D** e con esso anche **E** sono diretti lungo l'asse z; in questo caso $\mathbf{vE} = 0$ in modo che l'intensità della radiazione straordinaria nel piano xy si annulla.

§ 116. *Radiazione di transizione*

La radiazione Čerenkov è caratterizzata dal fatto che si produce per moto uniforme della particella carica (mentre la carica animata da un moto uniforme nel vuoto non produce radiazione). Un'altra categoria di fenomeni analoghi in questo senso rappresenta la *radiazione di transizione*, ossia la radiazione per moto uniforme della particella carica in un mezzo spazialmente non omogeneo e anche per transizione da un mezzo a un altro (*V.L. Ginsburg, I.M. Frank*, 1945). Essa differisce in linea di massima dalla radiazione Čerenkov in quanto si produce per qualsiasi velocità della particella e non soltanto per velocità superiori alla velocità di fase della luce nel mezzo. Così come la radiazione Čerenkov, essa non ha niente a che vedere con la radiazione di frenamento (la quale si produce anch'essa per incidenza delle particelle cariche sulla superficie di separazione fra due mezzi). Come nel caso della radiazione

[1]) Il ritrovamento della distribuzione dell'intensità chiederebbe il calcolo della forza di frenamento, come è stato fatto nel § 114 per il mezzo isotropo. Per questi calcoli (e per altre questioni legate alla radiazione Čerenkov) si vedano articoli riassuntivi di *B.M. Bolotovskij* — Uspechi fisičeskich nauk (UFN, edizione russa), 1957, v. 62, p. 201; 1961, v. 75, p. 295.

Čerenkov, la differenza è particolarmente evidente per il passaggio al limite di massa grande al piacere delle particelle; in questo caso la radiazione di frenamento scompare e quella di transizione resta.

Consideriamo la radiazione di transizione per il passaggio della particella carica (con velocità costante $\mathbf{v}$) attraverso la frontiera tra il vuoto e un mezzo dielettrico (non magnetico) con permettività complessa ε. Il moto si produce lungo l'asse x perpendicolarmente al piano di separazione (piano $x = 0$; fig. 63).

Il campo elettrico è definito dalle equazioni (114,1-3) o da quelle equivalenti (114,6). Tutte le grandezze nelle equazioni sviluppiamo in integrali di Fourier rispetto al tempo e alle coordinate y, z secondo le quali il mezzo è omogeneo:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\, e^{i(\mathbf{qr}-\omega t)} \frac{d\omega\, d^2q}{(2\pi)^3} \qquad (116,1)$$

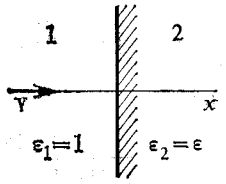


Fig. 63

ecc., ove $\mathbf{q}$ è un vettore d'onda nel piano yz. In ciascuno dei due semispazi cerchiamo il campo sotto la forma della somma della soluzione particolare delle equazioni non omogenee (114,6) (campo della carica con l'indice (e)) e della soluzione generale delle equazioni uniformi ossia delle equazioni (114,6) senza secondi membri (campo della radiazione libera con l'indice (r)). La prima soluzione è data da formule analoghe a quella (114,7):

$$\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = \frac{4\pi e}{\varepsilon v}\left[q^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right]^{-1} e^{i\omega x/v},$$
$$\mathbf{A}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = \frac{\varepsilon\mathbf{v}}{c}\,\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}. \qquad (116,2)$$

Di qui ricaviamo l'intensità del campo elettrico

$$\mathbf{E}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = i\left[\omega\mathbf{v}\left(\frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right) - \mathbf{q}\right]\varphi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} \qquad (116,3)$$

(non avremo bisogno dell'espressione per $\mathbf{H}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}$ e non la scriviamo).

La seconda parte della soluzione corrispondente al campo della radiazione libera scriviamo immediatamente sotto la forma dell'intensità. Scriviamo la componente longitudinale dell'intensità $\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}}$ nella forma

$$(\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}})_x = iae^{\pm ik_x x}$$

con il coefficiente a per il momento incognito; per k_x ora abbiamo

$$k_x^2 + q = \varepsilon\omega^2/c^2. \qquad (116,4)$$

La componente trasversale (della quale sappiamo a priori che è diretta lungo $\mathbf{q}$, ossia lungo l'unica direzione individuata in questo piano)

sarà definita in seguito dall'equazione div $\mathbf{D} = 0$, cioè da $\varepsilon(\mathbf{q} \pm k_x\mathbf{n})\,\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}} = 0$ ($\mathbf{n}$ è il vettore unitario dell'asse x):

$$\mathbf{E}^{(T)}_{\omega\mathbf{q}} = ia\left[\mathbf{n} \mp \frac{\mathbf{q}}{q^2}\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - q^2}\right]\exp\left[\pm ix\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - q^2}\right]. \qquad (116,5)$$

I segni « + » e « — » negli esponenti si riferiscono ai semispazi $x > 0$ e $x < 0$, rispettivamente, vale a dire che le onde si propagano nelle direzioni dalla frontiera di separazione [1]).

Le costanti a_1 e a_2 in ambedue i semispazi vanno determinate dalla condizione di continuità sulla frontiera di separazione delle componenti normali dell'induzione, $\varepsilon\mathbf{n}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$, e delle componenti tangenziali dell'intensità del campo elettrico, $\mathbf{q}\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ (quanto alla condizione di continuità dell'intensità del campo magnetico, essa, ovviamente, non fornisce niente di nuovo). Scriviamo il risultato per il coefficiente nel dominio $x < 0$ (vuoto):

$$a_1 = \frac{4\pi e\beta\varkappa^2(\varepsilon - 1)\left(1 - \beta^2 + \beta\sqrt{\varepsilon - \varkappa^2}\right)}{\omega\left(1 - \beta^2 + \beta^2\varkappa^2\right)\left(1 + \beta\sqrt{\varepsilon - \varkappa^2}\right)\left(\sqrt{\varepsilon - \varkappa^2} + \varepsilon\sqrt{1 - \varkappa^2}\right)}, \qquad (116,6)$$

ove $\beta = v/c$, $\varkappa = qc/\omega$.

Calcoliamo ora l'energia totale $\mathcal{U}_1$ irradiata dalla particella nel vuoto, cioè nella direzione opposta al moto dell'elettrone. A tale scopo esiste un procedimento semplice che consiste nella considerazione del treno d'onda irradiato per grandi tempi t quando esso è già spostato lontano a sinistra; il campo della radiazione e il campo della carica in questo caso risultano di essere separati. L'energia $\mathcal{U}_1$ si ottiene per integrazione della densità dell'energia del campo della radiazione rispetto a tutto lo spazio. Se l'origine delle coordinate sarà spostata lungo l'asse x nel dominio del treno d'onda, allora per smorzamento del suo campo in ambedue le direzioni da x si può estendere l'integrazione rispetto a questa coordinata da $-\infty$ a $+\infty$.

Nella zona d'onda le densità delle energie elettrica e magnetica sono uguali. Perciò

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int dy\,dz\int_{-\infty}^{\infty} dx\cdot\mathbf{E}_1^2.$$

Sostituendovi $\mathbf{E}_1$ sotto la forma dello sviluppo (116,1), scriviamo il quadrato dell'integrale come integrale doppio:

$$\mathbf{E}^2(t,\ \mathbf{r}) =$$

$$= \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\,\mathbf{E}^*_{\omega'\mathbf{q}'}(x)\exp\{i[\mathbf{r}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') - t(\omega - \omega')]\}\,\frac{d\omega\,d\omega'\,d^2q\,d^2q'}{(2\pi)^6}.$$

[1]) Nelle formule (116,2-5) con ε si deve intendere $\varepsilon_1 = 1$ nel dominio $x < 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$ nel dominio $x > 0$. Nelle formule successive si avrà ovunque $\varepsilon \equiv \varepsilon_2$.

L'integrazione di questa espressione rispetto a $dy\,dz$ dà la funzione $\delta\,(2\pi)^2\,\delta\,(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$ che in seguito si elimina integrando rispetto a d^2q'. In tal modo,

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\,\mathbf{E}^*_{\omega'\mathbf{q}}(x)\,e^{-it(\omega-\omega')}\,\frac{d\omega\,d\omega'\,d^2q}{(2\pi)^4}. \qquad (116,7)$$

Sostituendovi $\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ espressa dalla formula (116,5) (con $\varepsilon = 1$, $a = a_1$) e integrando rispetto a x, otteniamo

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{2}\int |a_1|^2\,\frac{\omega^2}{q^2c^2}\,\delta\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-q^2}-\sqrt{\frac{\omega'^2}{c^2}-q^2}\right]\frac{d^2q\,d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^4};$$

qui abbiamo tenuto conto che a causa dell'esistenza della funzione δ si ha $\omega = \omega'$; per questa stessa ragione nel prodotto $a_1\,(\omega,\ \mathbf{q})\,a_1^*\,(\omega',\ \mathbf{q})$ scompaiono fattori di fase che compaiono in a_1 per spostamento dell'origine delle coordinate nella formula (116,5). L'integrazione rispetto a ω e ω' si fa da $-\infty$ a ∞; eliminando la funzione δ per integrazione rispetto a ω', otteniamo

$$\mathcal{U}_1 \int_0^{\infty}\int |a_1(\omega,\ \mathbf{q})|^2\,\frac{\omega^2}{cq^2}\sqrt{1-\frac{c^2q^2}{\omega^2}}\,\frac{d^2q\,d\omega}{(2\pi)^4}; \qquad (116,8)$$

essendo pari l'espressione integranda rispetto a ω, l'integrale rispetto a ω è rappresentato come doppio esteso da 0 a ∞.

L'integrazione rispetto a d^2q è estesa al dominio $q^2 < \omega^2/c^2$ nel quale k_x è reale in modo che il campo (116,5) descrive in effetti un'onda propagantesi [1]). Introduciamo l'angolo θ fra il vettore d'onda della radiazione $\mathbf{k} = (k_x,\ \mathbf{q})$ e la direzione del vettore $-\mathbf{v}$ (cosicché $\theta = 0$ corrisponde alla radiazione indietro a rigore rispetto alla direzione del moto della particella). Allora $q = (\omega/c)$ sen θ; passando dall'integrazione rispetto a d^2q a quella rispetto a $2\pi q dq = (2\pi \times \omega^2/c^2)$ sen θ cos $\theta\,d\theta$, abbiamo

$$\mathcal{U}_1 = \frac{1}{c\,(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} |a_1|^2\,\omega^2\,\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}\,d\theta\,d\omega \equiv \int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} \mathcal{U}_1(\omega,\ \theta)\,2\pi\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\omega.$$

---

[1]) Per $q^2 > \omega^2/c^2$ i fattori esponenziali nell'espressione (116,5) vanno scritti così: $\exp\left(\pm x\sqrt{q^2-\omega^2/c^2}\right)$, il che corrisponde alle onde superficiali che si smorzano dalla frontiera. Queste onde esistono necessariamente per radiazione di transizione, ma qui non le consideriamo.

La funzione $\mathcal{U}_1(\omega, \theta)$ dà la distribuzione spettrale e angolare della radiazione. Considerando a_1 dell'espressione (116,6) otteniamo infine

$$\mathcal{U}_1(\omega, \theta) = \frac{e^2\beta^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta}{\pi^2 c\,(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \times$$
$$\times \left| \frac{(\varepsilon-1)\,(1-\beta^2+\beta\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})}{(1+\beta\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})\,(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})} \right|^2 \qquad (116,9)$$

(*V.L. Ginsburg, I.M. Frank*, 1945). La radiazione di transizione è polarizzata linearmente e, inoltre, il vettore elettrico giace (come si vede dalla formula (116,5)) nel piano passante per **k** e **v**. Per le velocità non relativistiche l'intensità della radiazione è proporzionale a v^2, cioè all'energia della particella.

Sulla frontiera con il conduttore perfetto ($\varepsilon = \infty$) la formula (116,9) diviene

$$\mathcal{U}_1(\omega, \theta) = \frac{e^2 v^2}{\pi^2 c^3} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}.$$

Nel caso ultrarelativistico ($\beta \approx 1$) la radiazione ha un massimo nel dominio di angoli piccoli $\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$. Infatti qui la formula (116,9) diviene

$$\mathcal{U}_1(\omega, \theta) = \frac{e^2}{\pi^2 c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1} \right|^2 \frac{\theta^2}{[\theta^2+(1-\beta^2)]^2}.$$

Di qui ricaviamo con precisione logaritmica la seguente espressione per la densità spettrale della radiazione:

$$\mathcal{U}_1(\omega) \approx \int_0^{-1} \mathcal{U}_1(\omega, \theta)\, 2\pi\theta\, d\theta \approx \frac{e^2}{\pi c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1} \right|^2 \ln \frac{1}{1-\beta^2}. \qquad (116,10)$$

Se per frequenze sufficientemente grandi ricorriamo all'espressione limite (78,1) per la permettività dielettrica

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}, \qquad (116,11)$$

troviamo così che per $\omega \gg \omega_0$ la distribuzione spettrale della radiazione decresce come ω^{-4}. Ciò vuol dire che sono in effetti le frequenze $\omega \lesssim \omega_0$ a dare un contributo fondamentale nella radiazione di transizione (nella direzione indietro).

Infine, soffermiamoci sulla radiazione di transizione per il passaggio della particella dal mezzo al vuoto. Questo problema differisce da quello precedente per il solo cambiamento di segno nella velocità **v**. Perciò l'intensità differenziale della radiazione nel vuoto all'uscire della particella carica dal mezzo è data da una formula che si ricava dalla (116,9) mediante la sostituzione $v \to -v$ e, inoltre,

θ ora sarà l'angolo fra le direzioni **k** e **v** (cosicché $\theta = 0$ corrisponde alla radiazione a rigore in avanti nella direzione del moto della particella [1]):

$$\mathcal{U}_1(\omega, \theta) = \frac{e^2\beta^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta}{\pi^2 c\,(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \times$$
$$\times \left| \frac{(\varepsilon-1)\,(1-\beta^2-\beta\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})}{(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})\,(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta})} \right|^2. \qquad (116,12)$$

Nel caso ultrarelativistico la radiazione ha un massimo dell'intensità nel dominio di piccoli angoli, $\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$. Qui la formula (116,12) diviene

$$\mathcal{U}_1(\omega, \theta) = \frac{e^2\theta^2}{\pi^2 c} \frac{|\sqrt{\varepsilon}-1|^2}{(1-\beta^2+\theta^2)^2\,|1-\beta\sqrt{\varepsilon-\theta^2}|^2}. \qquad (116,13)$$

Se ε non è troppo vicino ad uno, l'ultimo fattore a denominatore va sostituito con $|1-\sqrt{\varepsilon}|^2$ e con precisione logaritmica otteniamo la seguente espressione per la distribuzione spettrale:

$$\mathcal{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c} \ln \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Per grandi frequenze ricorriamo di nuovo all'espressione (116,11) e nella formula (116,13) facciamo la sostituzione

$$1-\beta\sqrt{\varepsilon-\theta^2} \approx \frac{1}{2}\left(1-\beta^2+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\theta^2\right), \quad \sqrt{\varepsilon}-1 \approx -\frac{\omega_0^2}{2\omega^2}.$$

L'integrazione rispetto agli angoli dà

$$\mathcal{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c} \ln \frac{\omega_0^2}{\omega^2(1-\beta^2)} \quad \text{per} \quad \omega_0 \ll \omega \ll \omega_0/\sqrt{1-\beta^2},$$
$$\mathcal{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{6\pi c}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \frac{1}{(1-\beta^2)^2} \quad \text{per} \quad \omega \gg \omega_0/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Da queste formule si vede che il contributo fondamentale nella radiazione in avanti proviene dalle alte frequenze: $\omega \sim \omega_0/\sqrt{1-\beta^2}$

---

[1]) Per il mezzo trasparente (ε si può supporre reale) ci limitiamo alle velocità $v < c/\sqrt{\varepsilon}$. In caso contrario si deve risolvere il problema della separazione del contributo portato dalla radiazione Čerenkov emessa dalla particella nel mezzo in avanti nella direzione del suo moto e uscente attraverso la frontiera nel vuoto. A questa uscita corrisponde il polo dell'intensità (116,12) nel punto in cui $\beta\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\theta} = 1$. L'angolo θ definito da questa uguaglianza è l'angolo d'uscita del raggio rifratto sulla frontiera del cono Čerenkov nel mezzo.

(*G.M. Garibjan*, 1959). In questo caso l'energia della radiazione integrale rispetto alle frequenze è proporzionale all'energia della particella [1]):

$$\mathcal{U}_1 = \frac{e^2\omega_0}{3c\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (116,14)$$

[1]) Considerazioni più dettagliate inerenti alla radiazione di transizione si possono trovare in articoli riassuntivi: *Bass F.G.*, *Jakovlenko V.M.* — Uspechi fisičeskich nauk (UFN, edizione russa) 1965, v. 86, p. 189; *Ginzburg V.L.*, *Zytovič V.N.*— UFN, 1978, v. 126, p. 553; Physics Reports, 1979, v. 49, p. 1, e nella monografia di questi autori — Radiazione di transizione e diffusione di transizione, Mosca, Nauka, 1984 (ed. russa).

Capitolo XV

DIFFUSIONE DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE

§ 117. *Teoria generale della diffusione nei mezzi isotropi*

Nei capitoli precedenti abbiamo trattato la teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi trasparenti a prescindere da un fenomeno relativamente debole, ma al tempo stesso di grande importanza che è la *diffusione*. Questo fenomeno consiste nella comparsa di onde deboli (diffuse) con frequenze e direzioni che differiscono dalla frequenza e dalla direzione dell'onda principale.

L'origine della diffusione si riduce al cambiamento del moto delle cariche facenti parte della composizione del mezzo sotto influsso del campo dell'onda incidente; questo cambiamento implica la emissione di onde nuove, ossia diffuse. Lo studio del meccanismo microscopico della diffusione deve essere eseguito sulla base della meccanica quantistica. Tuttavia, esso non è indispensabile per la teoria macroscopica che sarà esposta più avanti. Perciò ci limitiamo a brevi osservazioni sul carattere dei processi che implicano un cambiamento della frequenza delle onde per diffusione.

Il tipo fondamentale degli atti di diffusione elementari consiste nell'assorbimento del quanto iniziale $\hbar\omega$ dal sistema diffondente con la contemporanea emissione da questo sistema di un altro quanto $\hbar\omega'$. La frequenza ω' del quanto diffuso può essere minore o maggiore della frequenza ω (questi casi si chiamano, rispettivamente, *stokes* e *antistokes*). Nel primo caso l'energia $\hbar(\omega - \omega')$ va assorbita dal sistema, e nel secondo caso l'energia $\hbar(\omega' - \omega)$ è ceduta da esso per conto di transizione in uno stato energeticamente più basso. Così, nel caso elementare del gas la diffusione si produce su molecole separate e la frequenza può cambiare sia per conto della transizione della molecola in un altro livello energetico sia per conto della variazione dell'energia cinetica del suo moto come un tutt'uno.

Un altro tipo dell'atto elementare consiste in quanto segue: il quanto iniziale $\hbar\omega$ resta immutato ma sotto il suo influsso il sistema diffondente emette immediatamente due quanti, ossia un altro quanto $\hbar\omega$ con frequenza e direzione immutate e un quanto « diffuso » $\hbar\omega'$. In questo caso l'energia $\hbar(\omega + \omega')$ va prelevata al si-

stema diffondente. Tuttavia, processi di questo tipo sono estremamente rari rispetto a quelli del primo tipo [1]).

Passando alla considerazione della teoria macroscopica della diffusione è necessario, soprattutto, precisare il significato delle medie da calcolare. Il calcolo delle medie nell'elettrodinamica macroscopica si può rappresentare come l'insieme di due operazioni. Se per ragioni di intuitività si parte dal punto di vista classico, si può distinguere la media rispetto a un volume fisicamente infinitesimo per una data disposizione di tutte le particelle in esso e in seguito la media della grandezza ottenuta rispetto al moto delle particelle. Nella teoria della diffusione, tuttavia, questa media non può essere calcolata fin dall'inizio poiché il suo calcolo rispetto al moto delle particelle implicherà la scomparsa del fenomeno stesso in esame. Perciò, ad esempio, l'intensità e l'induzione del campo dell'onda diffusa che figurano nella teoria della diffusione vanno intese come risultato della sola prima tappa del calcolo delle medie.

Bisogna osservare che nella considerazione quantistica si può parlare della media rispetto al volume non per la grandezza fisica stessa, ovviamente, ma per il suo operatore; la seconda tappa del calcolo della media consiste nella determinazione del valore di aspettazione di questo operatore mediante le probabilità quantistiche. Perciò, parlando a rigore, le grandezze elettromagnetiche che figurano più avanti devono essere intese come operatori quantistici. Questa circostanza, tuttavia, non incide sui risultati finali della teoria trattata in questo paragrafo, e per rendere più semplice la scrittura delle formule consideriamo tutte le grandezze come classiche.

Le componenti monocromatiche delle grandezze del campo dell'onda diffusa, intese nel senso suindicato, indichiamo per il momento con $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{B}'$. Per quanto riguarda il campo dell'onda incidente qui usiamo le lettere $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ senza apice. In questo capitolo l'onda incidente è supposta ovunque monocromatica di frequenza ω.

Per il processo stesso di propagazione dell'onda diffusa avrebbe luogo la relazione $\mathbf{D}' = \varepsilon(\omega')\,\mathbf{E}'$ fra induzione e intensità del campo elettrico (il mezzo diffondente è supposto isotropo). Questa relazione, tuttavia, non include in sé fenomeni di diffusione, cioè la comparsa dell'onda diffusa sotto influsso dell'onda incidente. Per la sua descrizione nell'espressione per $\mathbf{D}'$ si deve tener conto di termini addizionali piccoli. Nella prima approssimazione questi termini devono essere lineari rispetto al campo dell'onda incidente;

---

[1]) Vedremo più avanti (§ 118) che l'effetto dell'emissione stimolata è troppo piccolo per tutte le temperature per le quali $T \ll \hbar(\omega + \omega')$. Esso può divenire sensibile nel dominio delle frequenze radio.

la forma più generale di questa dipendenza è

$$D'_i = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k + \beta_{ik} E^*_k. \qquad (117,1)$$

Qui ε' indica $\varepsilon(\omega')$, e α_{ik} e β_{ik} sono tensori che caratterizzano le proprietà diffondenti del mezzo. Nel caso generale essi non godono di nessuna proprietà di simmetria e le loro componenti sono funzioni sia della frequenza dell'onda diffusa che della frequenza iniziale ω. Sottolineiamo che il carattere tensoriale delle grandezze α e β non contraddice, ovviamente, l'isotropia supposta del mezzo. Sono isotropi le sole medie totali delle proprietà del mezzo; le deviazioni locali dalle proprietà medie, cui riferiscono i termini addizionali nella formula (117,1), non devono essere necessariamente isotrope.

L'ultimo termine nella formula (117,1) è legato con quella parte della diffusione che si realizza mediante atti elementari di emissione stimolata. Infatti, tutti i termini a secondo membro dell'uguaglianza (117,1) devono corrispondere alla stessa frequenza ω', come anche $\mathbf{D}'$ a primo membro dell'uguaglianza. Poiché $\mathbf{E}^*$ ha la frequenza $-\omega$, le grandezze β_{ik} devono avere la frequenza $\omega + \omega'$ affinché la frequenza dei prodotti $\beta_{ik} E^*_k$ sia ω'. Ma $\omega + \omega'$ è una frequenza che caratterizza gli atti di emissione stimolata. In virtù della piccolezza suindicata di questo effetto trascuriamo i termini corrispondenti nell'espressione (117,1) e scriviamo semplicemente

$$D'_i = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k. \qquad (117,2)$$

Con formule analoghe si esprime anche il legame fra $\mathbf{B}'$ e $\mathbf{H}'$. Tuttavia, trascureremo le proprietà magnetiche del mezzo che di solito sono inessenziali per il fenomeno di diffusione della luce; perciò poniamo $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$.

Le equazioni di Maxwell per il campo dell'onda diffusa sono

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = i \frac{\omega'}{c} \mathbf{H}', \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}' = -i \frac{\omega'}{c} \mathbf{D}'.$$

Escludendo $\mathbf{H}'$ da queste equazioni, troviamo

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}' = \frac{\omega'^2}{c^2} \mathbf{D}'.$$

Sostituendovi in accordo con la formula (117,2)

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon'} \mathbf{D}' - \frac{1}{\varepsilon'} (\alpha \mathbf{E})$$

(ove $(\alpha \mathbf{E})$ è un vettore con $\alpha_{ik} E_k$ come componenti) e tenendo conto che $\operatorname{div} \mathbf{D}' = 0$, otteniamo la seguente equazione esprimente $\mathbf{D}'$:

$$\Delta \mathbf{D}' + k'^2 \mathbf{D}' = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\alpha \mathbf{E}), \qquad (117,3)$$

ove $k' = \omega' \sqrt{\varepsilon'}/c$ è il vettore d'onda dell'onda diffusa.

Per trovare formulazione esatta delle condizioni in cui può essere risolta l'equazione (117,3), dividiamo il mezzo diffondente in piccoli tratti (le cui dimensioni, tuttavia, sono grandi rispetto alle distanze molecolari). In virtù del carattere molecolare dei processi di diffusione la correlazione fra questi processi in diversi punti del mezzo (non cristallino!) si estende, in generale, a distanza dell'ordine di grandezze molecolari [1]). Perciò la luce diffusa, uscente da diversi tratti del mezzo, è incoerente. Di conseguenza, possiamo considerare la diffusione da uno dei tratti come se nel volume restante del mezzo la luce si propagasse senza diffusione. Procedendo in questo modo, calcoliamo il campo dell'onda diffusa a grande distanza dal tratto diffondente del mezzo. Ricorrendo alla nota espressione approssimata per i potenziali di ritardo a grande distanza dalla sorgente (cfr. II § 66), si può scrivere immediatamente la soluzione richiesta dell'equazione (117,3):

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{e^{ik'R_0}}{R_0} \int (\alpha \mathbf{E})\, e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\, dV. \qquad (117,4)$$

Qui $\mathbf{R}_0$ è il raggio vettore da un punto interno del volume diffondente (rispetto al quale si integra) fino al punto di osservazione del campo, mentre il vettore $\mathbf{k}'$ ha la direzione $\mathbf{R}_0$. L'integrale che figura in questa espressione è indipendente dalle coordinate del punto di osservazione; derivando e conservando, come si suole, i soli termini con $1/R_0$, otteniamo

$$\mathbf{D}' = -\frac{e^{ik'R_0}}{4\pi R_0} \left[\mathbf{k}' \left[\mathbf{k}' \int (\alpha \mathbf{E})\, e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\, dV\right]\right].$$

Poiché nei punti da osservazione consideriamo il mezzo come non diffondente, il legame fra $\mathbf{D}'$ e $\mathbf{E}'$ in questo punto è dato semplicemente dalla relazione $\mathbf{D}' = \varepsilon' \mathbf{E}'$. Nel campo dell'onda incidente individuiamo il fattore periodico spaziale rappresentando l'intensità nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = E_0 \mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}; \qquad (117,5)$$

nella seconda espressione l'ampiezza complessa $\mathbf{E}_0$ è scritta come $E_0\mathbf{e}$, ove E_0 è una grandezza reale ($E_0^2 \equiv |\mathbf{E}_0|^2$) e $\mathbf{e}$ il vettore complesso unitario ($\mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1$) determinante la polarizzazione dell'onda. Introducendo in seguito la notazione

$$\mathbf{G} = \int (\alpha \mathbf{e})\, e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\, dV, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \qquad (117,6)$$

[1]) Fanno eccezione casi singolari della diffusione dei quali parleremo nel § 120. In questi casi le dimensioni dei tratti diffondenti devono essere supposte grandi rispetto alla lunghezza d'onda della luce o più grandi ancora.

scriviamo

$$\mathbf{E}' = -e^{ik'R_0}\frac{E_0}{4\pi R_0\varepsilon'}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{G}]] = e^{ik'R_0}\frac{E_0 k'^2}{4\pi R_0\varepsilon'}\mathbf{G}_\perp. \qquad (117,7)$$

Il vettore $\mathbf{E}'$ è perpendicolare alla direzione $\mathbf{k}'$ dell'onda diffusa e definito dalla proiezione $\mathbf{G}_\perp$ perpendicolare a $\mathbf{k}'$.

Determinando così il campo senza media dell'onda diffusa, possiamo ora passare allo studio dell'intensità e della polarizzazione della luce diffusa. A tale scopo bisogna costruire il tensore

$$I_{ik} = \langle E'_i E_k'^* \rangle, \qquad (117,8)$$

ove le parentesi angolari indicano la media finale rispetto al moto delle particelle nel corpo finora non calcolata; la media dell'espressione quadratica dà, naturalmente, un risultato non nullo. Poiché $\mathbf{E}' \perp \mathbf{k}'$, il tensore I_{ik} ha le componenti non nulle soltanto nel piano perpendicolare a $\mathbf{k}'$; queste componenti costituiscono (in questo piano) un tensore bidimensionale $I_{\alpha\beta}$ (gli indici greci assumono due valori). Per definizione, il tensore $I_{\alpha\beta}$ è hermitiano: $I_{\beta\alpha} = I^*_{\alpha\beta}$. Esso può essere ridotto agli assi principali e il rapporto tra suoi due valori principali dà il grado di depolarizzazione, mentre la loro somma è proporzionale all'intensità totale della luce[1]).

Nei prodotti $E'_i E'^*_k$ entrano prodotti degli integrali G_i; sono essi ad essere sottoposti all'operazione della media. Scrivendo il prodotto di due integrali sotto forma di integrale doppio, abbiamo

$$\langle G_i G_k^* \rangle = e_l e_m^* \int\int \langle \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} \rangle e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} dV_1 dV_2. \qquad (117,9)$$

Gli indici superiori (1) e (2) sottolineano che i valori di α vanno considerati in due punti distinti dello spazio.

Nel calcolare la media dell'espressione integranda si deve tener conto che la correlazione fra valori di α in diversi punti del corpo si estende, in generale, a sole distanze dell'ordine di grandezze molecolari. Ciò vuol dire che dopo il calcolo della media l'espressione integranda sarà notevolmente diversa da zero soltanto per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \sim a$, ove a è l'ordine di grandezza delle distanze molecolari. L'esponente nel fattore esponenziale $\sim a/\lambda$, ove λ è la lunghezza dell'onda diffusa; ma $a/\lambda \ll 1$ già in virtù della condi-

[1]) Cfr. II § 50. La riduzione del tensore hermitiano agli assi principali significa che esso deve essere rappresentato nella forma

$$I_{ik} = \lambda_1 n_{1i} n^*_{1k} + \lambda_2 n_{2i} n^*_{2k},$$

ove $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ sono, nel caso generale, due vettori complessi unitari mutuamente ortogonali, cioè

$$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1^* = \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2^* = 1, \quad \mathbf{n}_1\mathbf{n}_2^* = 0.$$

I valori principali λ_1 e λ_2 del tensore hermitiano sono reali.

zione necessaria di applicabilità della teoria macroscopica in generale. Di conseguenza, possiamo sostituire con 1 il fattore esponenziale [1]).

In seguito, l'integrazione rispetto alle coordinate $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ si può sostituire con l'integrazione rispetto a $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Poiché dopo il calcolo della media l'espressione integranda dipende unicamente da $\mathbf{r}$, allora

$$\langle G_i G_k^* \rangle = V e_l e_m^* \int \langle \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} \rangle \, dV \tag{117,10}$$

ove V è il volume del tratto del corpo diffondente; il fatto che la diffusione deve essere proporzionale a V è evidente a priori. È da notare che dalla formula (117,10) e perciò da tutte le formule successive scompare la direzione del vettore $\mathbf{k}$ dell'onda incidente.

Gli integrali che figurano nell'espressione (117,10) costituiscono un tensore di quarto rango dipendente dalle sole proprietà del mezzo diffondente. Essendo isotropo il mezzo, questo tensore può essere espresso soltanto in funzione del tensore unitario δ_{ik} (e delle costanti scalari). Prima di scrivere l'espressione corrispondente osserviamo che il tensore α_{ik}, come ogni tensore del secondo ordine, si può rappresentare nel caso generale sotto forma di somma di tre parti indipendenti

$$\alpha_{ik} = \alpha \delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \tag{117,11}$$

ove α è scalare, s_{ik} tensore simmetrico irriducibile (cioè con la traccia nulla), a_{ik} tensore antisimmetrico:

$$\alpha = {}^1/_3 \alpha_{ii}, \quad s_{ik} = {}^1/_2 (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - {}^2/_3 \alpha_{ll} \delta_{ik}),$$
$$a_{ik} = {}^1/_2 (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}). \tag{117,12}$$

Nel calcolare la media del prodotto $\alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*}$ possono essere non nulli i soli prodotti delle componenti di ciascuna delle tre parti suindicate del tensore α_{ik} separatamente; è chiaro che tramite un tensore unitario è impossibile costruire espressione che per sue proprietà di simmetria potrebbe corrispondere ai prodotti incrociati. Queste considerazioni consentono di scrivere il tensore del quarto ordine cercato nella forma seguente:

$$\int \langle \alpha_{il}^{(1)} \alpha_{km}^{(2)*} \rangle \, dV = G_0 \delta_{il} \delta_{km} + {}^1/_{10} G_s (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl} - {}^2/_3 \delta_{il} \delta_{km}) +$$
$$+ {}^1/_6 G_a (\delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{kl}), \tag{117,13}$$

ove i tre termini per loro simmetria corrispondono esattamente ai prodotti delle parti scalari simmetriche e antisimmetriche dei ten-

[1]) Questa sostituzione, tuttavia, richiede che siano fatte menzioni speciali per la cosiddetta diffusione di Rayleigh (cfr. § 120).

sori $\alpha_{il}^{(1)}$ e $\alpha_{km}^{(2)}$. Semplificando questa espressione rispetto a varie coppie di indici, otteniamo tre uguaglianze dalle quali è possibile precisare il significato dei coefficienti che figurano nella formula (117,13):

$$G_0 = \int \langle \alpha^{(1)} \alpha^{(2)*} \rangle \, dV, \quad G_s = \int \langle s_{ik}^{(1)} s_{ik}^{(2)*} \rangle \, dV, \qquad (117,14)$$

$$G_a = \int \langle a_{ik}^{(1)} a_{ik}^{(2)*} \rangle \, dV.$$

Queste grandezze sono reali e positive [1].

In tal modo, il tensore I_{ik} assume la forma

$$I_{ik} = \text{cost} \cdot [G_0 e_i e_k^* + {}^1/_{10} G_s (\delta_{ik} + e_i^* e_k - {}^2/_3 e_i e_k^*) + {}^1/_6 G_a (\delta_{ik} - e_i^* e_k)], \qquad (117,15)$$

dove la costante è indipendente dalla direzione della diffusione e dalla polarizzazione dell'onda incidente. Questo tensore, ovviamente, non è ancora trasversale alla direzione $\mathbf{k}'$. Mentre il tensore cercato $I_{\alpha\beta}$ si ottiene proiettando il tensore (117,15) sul piano perpendicolare a $\mathbf{k}'$ (a tale scopo è sufficiente considerare un sistema di coordinate con un asse coincidente con $\mathbf{k}'$ e calcolare le componenti del tensore lungo gli altri due assi).

È da notare che nel caso generale la diffusione può essere rappresentata sotto forma di sovrapposizione di tre processi indipendenti, ossia delle diffusioni di tipo *scalare*, *simmetrico* e *antisimmetrico* cui corrispondono i tre termini dell'espressione (117,15) [2].

A prescindere da questa divisione, può essere comodo rappresentare l'espressione (117,15) sotto un'altra forma riducendo in essa i termini simili:

$$I_{ik} = \text{cost} \cdot \left\{ \frac{a+c}{2} e_i e_k^* + \frac{a-c}{2} e_i^* e_k + b\delta_{ik} \right\}, \qquad (117,16)$$

---

[1]) Il carattere reale del tensore (117,13) e, quindi, dei coefficienti in esso è evidente già dal fatto che questo tensore è automaticamente simmetrico rispetto alla permutazione della coppia di indici il con la coppia km; questa permutazione è equivalente al passaggio a una grandezza complessa coniugata (data equivalenza dei punti 1 e 2). La positività dei coefficienti segue dal fatto che essi possono essere rappresentati nella forma del quadrato del modulo (o somma dei quadrati dei moduli) per trasformazione inversa a quella che aveva luogo nel passaggio dalla (117,9) alla (117,10).

Così

$$G_0 = \frac{1}{V} \left\langle \left| \int \alpha^{(1)} \, dV \right|^2 \right\rangle.$$

[2]) La formula (117,15) e le deduzioni successive da essa differiscono per la sola definizione delle grandezze G_0, G_s, G_a dalle formule della teoria quantistica di Placek della diffusione su molecole separate orientabili liberamente; cfr. IV § 60.

ove

$$a = G_0 + {}^1/_{30}G_s - {}^1/_6G_a, \quad b = {}^1/_{10}G_s + {}^1/_6G_a, \qquad (117,17)$$
$$c = G_0 - {}^1/_6G_s + {}^1/_6G_a.$$

La formula (117,15) o (117,16) determina la distribuzione angolare e le proprietà di polarizzazione della luce diffusa. In particolare, proiettando questo tensore su un vettore di polarizzazione $\mathbf{e}'$ (determinante la direzione $\mathbf{E}'$), otteniamo l'intensità della componente della luce diffusa polarizzata in determinato modo che potrebbe essere separata dall'analizzatore di polarizzazione corrispondente

$$I_{ik}e_i'^*e_k' = \text{cost}\cdot\{G_0\,|\mathbf{ee}'^*|^2 +$$
$$+ {}^1/_{10}G_s\,(1 + |\mathbf{ee}'|^2 - {}^2/_3\,|\mathbf{ee}'^*|^2) + {}^1/_6G_a - |\mathbf{ee}'|^2)\} \qquad (117,18)$$

ossia

$$I_{ik}e_i'^*e_k' = \text{cost}\cdot\left\{\frac{a+c}{2}\,|\mathbf{ee}'^*|^2 + \frac{a-c}{2}\,|\mathbf{ee}'|^2 + b\right\}. \qquad (117,19)$$

Consideriamo la diffusione di un'onda polarizzata linearmente. A questa polarizzazione corrisponde il vettore reale $\mathbf{e}$ (cfr. II §§ 48, 50). Con esso saranno reali anche tutte le componenti del tensore $I_{\alpha\beta}$ della luce diffusa. Ciò vuol dire che la luce diffusa è polarizzata in parte e può essere decomposta in due onde indipendenti (incoerenti) ciascuna delle quali è polarizzata linearmente. Siccome nel piano perpendicolare a $\mathbf{k}'$ esiste una sola direzione privilegiata (cioè evidenziata dalla proiezione del vettore e su questo piano), è chiaro a priori che una di queste onde è polarizzata con il vettore $\mathbf{e}'$ nel piano $\mathbf{e}$, $\mathbf{k}'$ (indichiamone l'intensità con I_1) e l'altra perpendicolare al piano suindicato (con l'intensità I_2)[1].

Per $\mathbf{e}$ reale l'espressione (117,16) si riduce a

$$I_{ik} = \text{cost}\cdot(ae_ie_k + b\delta_{ik}). \qquad (117,20)$$

Osservando immediatamente che essa contiene due e non tre componenti indipendenti, abbiamo rispettivamente

$$I_{ik}e_i'e_k' = \text{cost}\cdot(a\,(\mathbf{ee}')^2 + b)$$

e, calcolando $\mathbf{e}'$ in due direzioni suindicate, troviamo così la distribuzione angolare di due componenti incoerenti della luce diffusa:

$$I_1 = \text{cost}\cdot(a\,\text{sen}^2\,\theta + b),$$
$$I_2 = \text{cost}\cdot b \qquad (117,21)$$

ove θ è l'angolo fra $\mathbf{e}$ e la direzione della diffusione $\mathbf{k}'$. Osserviamo che la seconda fra le distribuzioni è isotropa.

[1]) Sottolineiamo ancora una volta la necessità di distinguere lo stato polarizzato della luce diffusa come tale dalla polarizzazione $\mathbf{e}'$ prodotta da un rivelatore di radiazione!

Al passare attraverso il mezzo della luce naturale la luce diffusa sarà in parte polarizzata. Il tensore corrispondente I_{ik} si ottiene dall'espressione (117,16) mediante il calcolo della media rispetto a tutte le direzioni **e** nel piano perpendicolare a **k**. Questa operazione si esegue tramite la formula

$$\overline{e_i e_k^*} = {}^1/_2\,(\delta_{ik} + n_i n_k) \qquad (117,22)$$

($\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$); questo è un tensore del secondo ordine dipendente dalla sola direzione **n**, trasformabile in 1 per semplificazione e soddisfacente alla condizione

$$n_i \overline{e_i e_k^*} = \overline{(\mathbf{ne})\, e_k^*} = 0.$$

In tal modo, per la diffusione di luce naturale

$$I_{ik} = \text{cost} \cdot \left\{ \frac{a}{2} (\delta_{ik} - n_i n_k) + b\delta_{ik} \right\}. \qquad (117,23)$$

Dalle considerazioni di simmetria è evidente che le due componenti incoerenti della luce diffusa saranno linearmente polarizzate con il vettore **e**′ nel piano **k**, **k**′ (piano di diffusione) e perpendicolarmente a questo piano; indichiamo le intensità di queste componenti con $I_{\parallel}$ e $I_{\perp}$, rispettivamente. Dalla formula

$$I_{ik} e_i' e_k' = \text{cost} \cdot \left\{ \frac{a}{2} [1 - (\mathbf{ne}')^2] + b \right\}$$

ricaviamo

$$I_{\parallel} = \text{cost} \cdot \left(\frac{a}{2} \cos^2 \vartheta + b \right), \quad I_{\perp} = \text{cost} \cdot \left(\frac{a}{2} + b \right), \qquad (117,24)$$

ove ϑ è l'angolo di diffusione (angolo fra **k** e **k**′).

Scriviamo anche formule per la distribuzione angolare e le proprietà di polarizzazione di ciascuno dei tre tipi di diffusione separatamente. Queste formule si ottengono dalle espressioni (117,21) e (117,24) sostituendovi semplicemente per a e b i termini corrispondenti dall'espressione (117,17).

Per la diffusione scalare di luce linearmente polarizzata la luce diffusa è anch'essa completamente polarizzata e la distribuzione angolare dell'intensità si esprime mediante la formula

$$I = 3/2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (117,25)$$

(qui e più avanti le espressioni per I sono normalizzate in modo tale che le loro medie rispetto alle direzioni valgono 1). Per la diffusione di luce naturale, invece, la distribuzione angolare dell'intensità

e il coefficiente di depolarizzazione (il rapporto fra la più piccola e la più grande delle $I_\parallel$ e $I_\perp$) sono dati dalle formule [1])

$$I = I_\perp + I_\parallel = {}^3/_4(1 + \cos^2 \vartheta), \quad I_\parallel / I_\perp = \cos^2 \vartheta. \tag{117,26}$$

Nel caso della diffusione simmetrica di luce polarizzata abbiamo

$$I = I_1 + I_2 = {}^3/_{20}(6 + \operatorname{sen}^2 \theta), \; I_2/I_1 = 3/(3 + \operatorname{sen}^2 \theta), \tag{117,27}$$

e per la diffusione di luce naturale

$$I = {}^3/_{40}(13 + \cos^2 \vartheta), \; I_\parallel / I_\perp = {}^1/_7(6 + \cos^2 \vartheta). \tag{117,28}$$

Infine, per la diffusione antisimmetrica di luce polarizzata abbiamo

$$I = {}^3/_4(1 + \cos^2 \theta), \; I_1/I_2 = \cos^2 \theta, \tag{117,29}$$

e di luce naturale

$$I = {}^3/_8(2 + \operatorname{sen}^2 \vartheta), \; I_\perp / I_\parallel = 1/(1 + \operatorname{sen}^2 \vartheta). \tag{117,30}$$

§ 118. *Principio del bilancio dettagliato per la diffusione*

Il principio generale quantistico-meccanico del bilancio dettagliato (cfr. III § 144) consente di dedurre une relazione che lega mutuamente le intensità di vari processi di diffusione.

Indichiamo con dw_{21} la probabilità che il quanto $\hbar\omega_1$ sia soggetto alla diffusione (su un'unità di cammino) con la comparsa del quanto $\hbar\omega_2$ propagantesi nell'elemento di volume dell'angolo solido do_2 [2]). Con dw_{12} indichiamo la probabilità del processo inverso della diffusione del quanto $\hbar\omega_2$ accompagnato dalla comparsa del quanto $\hbar\omega_1$ nell'angolo solido do_1. Il principio del bilancio dettagliato stabilisce il seguente legame tra queste due probabilità:

$$\frac{dw_{21}}{k_2^2\, do_2} = \frac{dw_{12}}{k_1^2\, do_1},$$

---

[1]) Il passaggio dalle formule per $I(\theta)$ a quelle per $I(\vartheta)$ corrisponde alla media secondo la formula

$$\overline{\operatorname{sen}^2 \theta} = {}^1/_2\,(1 + \cos^2 \vartheta)$$

(cfr. il passaggio dalla (92,3) alla (92,6)).

[2]) Si tiene anche conto di determinate polarizzazioni di entrambi i quanti; per brevità, non scriviamo qui gli indici di polarizzazione. L'ordine della disposizione degli indici nella notazione dw_{21} corrisponde a quello accettato nella meccanica quantistica: da destra a sinistra, cioè dallo stato iniziale a quello finale.

ove k_1 e k_2 sono vettori d'onda di ambedue i quanti. Sostituendovi $k_1^2 = \varepsilon_1\omega_1^2/c^2$ e $k_2^2 = \varepsilon_2\omega_2^2/c^2$ (ove $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega_1)$ e $\varepsilon_2 = \varepsilon(\omega_2)$), otteniamo

$$\varepsilon_1\omega_1^2 \frac{dw_{21}}{do_2} = \varepsilon_2\omega_2^2 \frac{dw_{12}}{do_1}. \qquad (118,1)$$

È supposto in questa relazione che gli stati iniziale e finale del sistema diffondente corrispondano ai livelli energetici discreti E_1 e E_2 legati mutuamente mediante l'uguaglianza

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2.$$

Questa impostazione della questione non corrisponde in tutto allo stato reale delle cose in quanto lo spettro dei livelli energetici di un corpo macroscopico è estremamente denso e deve essere considerato come quasi-continuo.

Ciò premesso, si deve introdurre al posto della probabilità di diffusione dw_{21} con la variazione rigorosa della frequenza la probabilità di diffusione nell'intervallo di frequenze $d\omega_2$, cioè con la transizione del corpo nello stato con energia nell'intervallo $dE_2 = \hbar d\omega_2$. Indicando questa probabilità (sempre per cm del cammino) con dh_{21}, abbiamo

$$dh_{21} = dw_{21}\, d\Gamma_2 = dw_{21} \frac{d\Gamma_2}{dE_2} \hbar\, d\omega_2,$$

ove $d\Gamma_2$ è il numero di stati quantistici del corpo nell'intervallo di energie dE_2. Ora, al posto della relazione (118,1) scriviamo

$$\frac{d\Gamma_1}{dE_1} \varepsilon_1\omega_1^2 \frac{dh_{21}}{do_2\, d\omega_2} = \frac{d\Gamma_2}{dE_2} \varepsilon_2\omega_2^2 \frac{dh_{12}}{do_1\, d\omega_1}.$$

Ma in accordo con il noto legame fra il peso statistico dello stato macroscopico del corpo e la sua entropia $\mathcal{S}$ la derivata $d\Gamma/dE$ coincide soprattutto con $\exp \mathcal{S}$ in modo che il rapporto

$$\frac{d\Gamma_1/dE_1}{d\Gamma_2/dE_2} = \exp(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2).$$

Siccome la variazione dell'energia del corpo in seguito alla diffusione di un quanto è trascurabilmente piccola rispetto all'energia stessa, la variazione dell'entropia è relativamente piccola anch'essa e la si può porre uguale a

$$\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial E}(E_1 - E_2) = \frac{\hbar}{T}(\omega_2 - \omega_1).$$

Tenendo conto di questa circostanza, scriviamo infine il principio del bilancio dettagliato per la diffusione nella forma seguente:

$$e^{-\hbar\omega_1/T} \varepsilon_1\omega_1^2 \frac{dh_{21}}{do_2\, d\omega_2} = e^{-\hbar\omega_2/T} \varepsilon_2\omega_2^2 \frac{dh_{12}}{do_1\, d\omega_1}. \qquad (118,2)$$

La grandezza dh_{21} (di dimensione cm^{-1}) si dice *coefficiente differenziale di estinzione* della luce per diffusione. La sua definizione può essere formulata anche nel seguente modo: questo è il rapporto fra il numero di quanti diffusi (nell'elemento degli angoli solidi do_2 nell'intervallo di frequenze $d\omega_2$) in unità di volume durante unità di tempo e la densità del flusso di fotoni nella luce incidente. Integrando dh_{21} rispetto a tutte le frequenze della luce diffusa e in tutte le direzioni otteniamo così il *coefficiente di estinzione totale* che rappresenta il decremento dell'indebolimento della densità del flusso di fotoni durante il suo propagarsi nel mezzo diffondente.

Sia $\omega_2 < \omega_1$. La relazione (118,2) stabilisce un legame reciproco tra le intensità (coefficienti d'estinzione) della diffusione stokes ($1 \to 2$) e di quella inversa antistokes ($2 \to 1$). Si vede che la seconda, in generale, è inferiore alla prima soprattutto nel rapporto del fattore $\exp\left(-\frac{\hbar(\omega_1-\omega_2)}{T}\right)$.

Questa circostanza è assai generale e corrisponde al fatto che la trasmissione dell'energia dal corpo al campo elettromagnetico fa indebolire il processo rispetto a $\exp(-\Delta E/T)$, in cui ΔE è l'energia trasmessa. Ciò spiega anche il debole effetto dell'emissione stimolata in cui il corpo emette in una diffusione unitaria $\hbar(\omega_1+\omega_2)$. La probabilità di tale processo ha il piccolo fattore $\exp\left(-\frac{\hbar(\omega_1+\omega_2)}{T}\right)$, per $\hbar(\omega_1+\omega_2) \gg T$.

La relazione generale (118,2) si semplifica fortemente nel caso importante della diffusione con variazione relativamente piccola della frequenza. Indichiamo ω_1 semplicemente con ω e la piccola differenza $\omega_2 - \omega_1$ con Ω ($|\Omega| \ll \omega$). Inoltre, introduciamo la notazione

$$\frac{dh_{21}}{do_2\, d\omega_2} = I(\omega, \Omega). \tag{118,3}$$

Nei fattori non esponenziali $\varepsilon\omega^2$ della relazione (118,2) si può trascurare la differenza Ω e, in seguito, essi si riducono in ambedue i membri dell'uguaglianza, cosicché resta $I(\omega, \Omega)\, e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega+\Omega, -\Omega)\, e^{-\hbar(\omega+\Omega)/T}$.

Nel primo degli argomenti della funzione $I(\omega+\Omega, -\Omega)$, che indica la frequenza iniziale della luce, si può trascurare Ω, cioè riferire l'intensità della diffusione a un valore della frequenza un po' spostato della luce incidente. Allora

$$I(\omega, \Omega) = I(\omega, -\Omega)\, e^{-\hbar\Omega/T}. \tag{118,4}$$

In questa approssimazione I in ambedue i membri dell'uguaglianza si riferisce alla frequenza identica della luce incidente. In altre parole, la relazione (118,4) stabilisce un semplice legame fra le diffusioni stokes e antistokes della stessa luce con valori assoluti identici dello spostamento della frequenza Ω.

Problema

Stabilire un legame fra la diffusione combinatoria forzata (cfr. § 112) e l'intensità della diffusione ordinaria (*spontanea*).

Soluzione. La probabilità della diffusione forzata si ottiene dalla probabilità della diffusione spontanea moltiplicandola per $N_{\mathbf{k}_2}$, ossia per il numero di fotoni nello stato quantistico con il vettore d'onda $\mathbf{k}_2$. Per stabilire un legame fra questo numero e l'intensità del campo $\mathbf{E}_2$ dell'onda diffusa, si deve considerare quest'ultima come quasi-monocromatica ed uguagliare l'una all'altra le energie del campo (in unità di volume) mediante il numero di quanti o mediante l'intensità:

$$\int \hbar\omega_2 N_{\mathbf{k}_2} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi} \frac{dk_2}{d\omega_2} |\mathbf{E}_2|^2 \tag{1}$$

(il secondo membro di questa uguaglianza è scritto in accordo con la formula (83,9)). Nel primo membro si possono portare fuori dal segno di integrale i fattori che variano poco nello stretto intervallo di frequenze sostituendo preliminarmente

$$d^3k_2 = k_2^2 \frac{dk_2}{d\omega_2} do_2 d\omega_2 = \frac{\varepsilon_2\omega_2^2}{c^2} \frac{dk_2}{d\omega_2} do_2 d\omega_2.$$

Allora

$$\int \hbar\omega_2 N_{\mathbf{k}_2} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} = \frac{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi^3c^2} \frac{dk_2}{d\omega_2} \int N_{\mathbf{k}_2} d\omega_2 do_2$$

e dall'espressione (1) ricaviamo

$$\int N_{\mathbf{k}_2} d\omega_2 do_2 = |\mathbf{E}_2|^2 \frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

Quanto alla densità del flusso di fotoni incidenti, essa (si veda la formula (83,11)) è

$$\frac{1}{\hbar\omega_1} \overline{S_1} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi\hbar\omega_1} |\mathbf{E}_1|^2.$$

In tal modo, l'energia trasmessa al campo $\mathbf{E}_2$ per conto della diffusione forzata dei fotoni $\hbar\omega_1$ (introduciamo qui la notazione (118,3)) è

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt} = \hbar\omega_2 \frac{\overline{S}_1}{\hbar\omega_1} I(\omega_1, \Omega) \int N_{\mathbf{k}_2} d\omega_2 do_2 =$$

$$= \frac{\pi c^4\sqrt{\varepsilon_1}}{8\hbar\omega_1\omega_2^2\sqrt{\varepsilon_2}} |\mathbf{E}_1|^2 |\mathbf{E}_2|^2 I(\omega_1, \Omega) \tag{2}$$

($\Omega = \omega_2 - \omega_1$). Ma al tempo stesso il campo $\mathbf{E}_2$ perde energia per conto della diffusione forzata dei fotoni $\hbar\omega_2$ che si trasformano nei fotoni $\hbar\omega_1$. L'energia acquisita mediante questi processi dal campo $\mathbf{E}_1$ è data da una formula che differisce dalla formula (2) per la sola permutazione degli indici *1* e *2*. Di cui si ottiene l'energia ceduta dal campo $\mathbf{E}_2$ moltiplicando per $-\omega_2/\omega_1$ (cfr. la formula (112,8)); essa vale

$$-\frac{\pi c^4\sqrt{\varepsilon_2}}{8\hbar\omega_1^3\sqrt{\varepsilon_1}} |\mathbf{E}_1|^2 |\mathbf{E}_2|^2 I(\omega_2, -\Omega). \tag{3}$$

Sommando ambedue le espressioni ed esprimendo la funzione $I(\omega_2, -\Omega)$ mediante la funzione $I(\omega_1, \Omega)$ tramite la formula (118,2), otteniamo la variazione totale dell'energia del campo di frequenza ω_2:

$$\frac{d\overline{U}_2}{dt} = \frac{\pi c^4}{8\hbar\omega_1\omega_2^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,(1-e^{\hbar\Omega/T})\,I(\omega_1, \Omega)\,|\mathbf{E}_1|^2|\mathbf{E}_2|^2. \tag{4}$$

Introducendo l'incremento (per $\omega_2 < \omega_1$) dell'intensità della radiazione diffusa con frequenza ω_2 su unità del cammino

$$q_2 = \frac{1}{\overline{S}_2}\frac{d\overline{U}_2}{dt}$$

(grandezza di dimensione 1/cm), riscriviamo questa relazione nella forma definitiva seguente:

$$q_2 = \frac{(2\pi)^3}{k_2^2\hbar\omega_1}(1-e^{\hbar\Omega/T})\,\overline{S}_1\frac{dh_{21}}{do_2 d\omega_2}, \tag{5}$$

ove $k_2 = \omega_2\sqrt{\varepsilon_2}/c$ e $\overline{S}_1$ è la densità del flusso di energia della luce incidente di frequenza ω_1.

§ 119. *Diffusione con piccola variazione di frequenza*

La teoria sviluppata nel § 117 gode di generalità totale ed è applicabile a tutti i casi della diffusione nel mezzo isotropo a prescindere dal loro meccanismo concreto. È naturale, tuttavia, che per questo grado di generalità i calcoli si possano avanzare relativamente non lontano e che lo studio ulteriore del fenomeno sia possibile soltanto sotto ipotesi più particolari.

La diffusione della luce di solito è accompagnata da una variazione relativamente piccola della frequenza $\Omega = \omega' - \omega$. I calcoli che seguono più avanti si riferiscono esattamente e questi casi e, fra l'altro, oltre alla condizione $|\Omega| \ll \omega$, supporremo che la variazione del coefficiente di rifrazione del mezzo nell'intervallo di frequenze Ω sia relativamente esigua. Quest'ultima condizione significa che la frequenza ω non deve essere disposta troppo vicina a uno dei domini (o a righe) di assorbimento del mezzo diffondente.

Se ω è riferita al dominio ottico dello spettro, il meccanismo microscopico della diffusione con piccola Ω può essere legato a diversi moti degli atomi e delle molecole come tali (cioè con lo spostarsi dei nuclei atomici contrariamente ai moti meramente elettronici responsabili delle transizioni ottiche). Tali possono essere oscillazioni intermolecolari degli atomi, rotazioni e oscillazioni delle molecole come un tutt'uno, ecc.)[1].

[1]) In questo caso è supposto che i valori corrispondenti di Ω siano piccoli rispetto alle frequenze delle transizioni elettroniche. Questa condizione può essere violata per un gas composto di molecole con stato elettronico fondamentale degenere.

Supponiamo che $q = q(t)$ sia convenzionalmente l'insieme di coordinate descriventi il moto responsabile della diffusione (per semplicità, ragioniamo dapprima dal punto di vista classico). La lentezza relativa di questo moto permette di affrontare la descrizione macroscopica della diffusione da un punto di vista nuovo. E precisamente, si può introdurre il tensore di permettività dielettrica $\varepsilon_{ik}(q)$ le cui componenti (in ciascun istante) dipendono come da parametri dai soli valori delle coordinate q allo stesso istante. Quest'ultima circostanza è legata alla lentezza relativa supposta della variazione di ε. La permettività dielettrica così introdotta è riferita alla media del campo rispetto al moto elettronico per una data disposizione dei nuclei. Nel caso della media totale del campo (anche rispetto al moto dei nuclei) la permettività dielettrica si riduce allo scalare $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. La deviazione ε_{ik} da questo valore indichiamo con $\delta\varepsilon_{ik}$:

$$\varepsilon_{ik}(q) = \varepsilon\delta_{ik} + \delta\varepsilon_{ik}(q). \tag{119,1}$$

Il tensore ε_{ik} determina un legame esistente tra l'intensità e l'induzione del campo come funzione del tempo. Sottolineiamo che l'onda incidente è supposta, come prima monocromatica (di frequenza ω), ma il campo $\mathbf{E}'$ dell'onda diffusa è considerato ora come funzione del tempo non sviluppata in componenti monocromatiche. Il campo totale è composto del campo $\mathbf{E}$ dell'onda incidente e del campo $\mathbf{E}'$ dell'onda diffusa; quindi

$$D_i + D'_i = \varepsilon_{ik}(E_k + E'_k).$$

Riducendo, per definizione, i termini $\mathbf{D}$ e $\varepsilon\mathbf{E}$ e mettendo il termine $\delta\varepsilon_{ik}E'_k$ come infinitesimo del secondo ordine, otteniamo

$$D'_i = \varepsilon E'_i + \delta\varepsilon_{ik}(q)E_k. \tag{119,2}$$

La relazione (119,2) è dello stesso tipo che la formula (117,2). La differenza, tuttavia, consiste nel fatto che nell'impostazione affrontata è evidente che, in questo caso, il tensore $\alpha_{ik} = \delta\varepsilon_{ik}$ è simmetrico. Ciò segue immediatamente dal teorema generale sulla simmetria del tensore di permettività dielettrica. Inoltre, in accordo con il carattere reale della permettività dielettrica del mezzo trasparente si può affermare che il tensore $\delta\varepsilon_{ik}$ è reale.

La mancanza nel tensore α_{ik} della parte antisimmetrica significa che fra i tre tipi della diffusione indicati nel § 117 uno (antisimmetrico) non esiste per diffusione con piccola variazione della frequenza.

Calcoliamo l'intensità totale (con tutti gli spostamenti delle frequenze $\Omega \equiv \omega' - \omega \ll \omega$) della diffusione. Nel caso in esame ciò è facile nel seguente modo. Nell'equazione (117,3) per il campo dell'onda diffusa si può sostituire k' con $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ (e considerare

anche il valore $\alpha_{ik} \equiv \delta\varepsilon_{ik}$ per $\omega' = \omega$) dopo di che essa in generale non conterrà ω', cioè sarà uguale per tutte le componenti spettrali del campo. Perciò la stessa equazione sarà valida anche per il campo dell'onda diffusa non sviluppato secondo Fourier, che ora indichiamo con la lettera $\mathbf{E}'$. Usando la soluzione dell'equazione sotto la forma (117,7), otteniamo

$$\langle |\mathbf{E}'|^2\rangle = \frac{E_0^2 k^4 \operatorname{sen}^2\theta}{16\pi^2\varepsilon^2 R_0^2}\langle |\mathbf{G}|^2\rangle = \frac{E_0^2\omega^4 \operatorname{sen}^2\theta}{16\pi^2 c^4 R_0^2}\langle |\mathbf{G}|^2\rangle,$$

ove θ è l'angolo fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{G}$ e le parentesi angolari significano, come nel § 117, la media finale rispetto al moto delle particelle.

Introduciamo il coefficiente d'estinzione h come rapporto fra l'intensità totale della luce diffusa in tutte le direzioni nell'unità di volume del mezzo e la densità del flusso della luce incidente [1]

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}|^2}\int \langle |\mathbf{E}'|^2\rangle R_0^2\, do' \qquad (119,3)$$

(qui si è già posto $\varepsilon(\omega') \approx \varepsilon(\omega)$).

Per la stessa ragione indicata nel § 117 sostituiamo nel calcolare la media $\langle |\mathbf{G}|^2\rangle$ il fattore esponenziale nell'espressione integranda $\mathbf{G}$ con 1; allora

$$\langle |\mathbf{G}|^2\rangle = V e_l e_m^* \int \langle \delta\varepsilon_{il}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}^{(2)}\rangle\, dV$$

(cfr. le formule (117,9-10)). L'espressione tra parentesi angolari rappresenta un tensore del secondo ordine e per isotropia del mezzo fornisce dopo il calcolo della media

$$\langle \delta\varepsilon_{il}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}^{(2)}\rangle = {}^1/_3\delta_{lm}\langle \delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\rangle.$$

Allora il quadrato medio

$$\langle |\mathbf{G}|^2\rangle = \frac{V}{3}\int \langle \delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\rangle\, dV$$

è indipendente dalla direzione della diffusione e l'integrazione nell'espressione (119,3) conduce al risultato

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4}\int \langle \delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\rangle\, dV. \qquad (119,4)$$

Qui l'espressione integranda è la funzione di correlazione delle fluttuazioni della permettività dielettrica in punti diversi del mezzo $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ allo stesso istante; l'integrazione è estesa alla differenza di coor-

[1] Questa definizione differisce da quella data nel § 118 per fattore ω'/ω secondo il numero di quanti. Nel caso considerato si può suporre questo fattore uguale a 1, e allora ambedue le definizioni sono equivalenti.

dinate $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Se si fa l'integrazione inversa rispetto a dV_1 e dV_2, l'espressione (119,4) si scrive nella forma

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} V \langle \delta\varepsilon_{ik}^2 \rangle_V, \tag{119,5}$$

ove il simbolo $\langle \ldots \rangle_V$ significa il quadrato medio della fluttuazione nel volume V. È da notare che il coefficiente d'estinzione totale è indipendente dalla polarizzazione della luce incidente.

Le formule ottenute consentono di considerare la diffusione dal punto di vista macroscopico come fenomeno che si produce su disomogeneità di fluttuazione del mezzo. Con questa interpretazione la distribuzione angolare e la composizione spettrale della luce diffusa vanno definite dalle caratteristiche spaziali temporali delle fluttuazioni, ossia dalla funzione di correlazione [1])

$$\langle \delta\varepsilon_{il}(t_1, \mathbf{r}_1)\, \delta\varepsilon_{km}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle$$

fra le fluttuazioni in diversi punti dello spazio e in diversi istanti.

Per provare questo fatto sviluppiamo in integrale di Fourier le grandezze $\delta\varepsilon_{ik}$ dipendenti dal tempo:

$$\delta\varepsilon_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varepsilon_{ik\Omega} e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}, \quad \delta\varepsilon_{ik\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta\varepsilon_{ik}(t)\, e^{i\Omega t}\, dt.$$

Ciascuna delle componenti $\delta\varepsilon_{ik} e^{-i\Omega t}$ servirà ora da grandezza α_{ik} nel legame (117,2) fra le componenti monocromatiche di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}'$ e, inoltre, $\omega' = \omega + \Omega$. Rappresentando ora le espressioni quadratiche rispetto al campo sotto forma di integrali doppi (analogamente alla formula (117,9)), otteniamo senza difficoltà il coefficiente d'estinzione differenziale in frequenze e in direzioni:

$$dh = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} \{ e_i'^* e_k' e_l e_m^* (\delta\varepsilon_{il} \delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} \}\, do' \frac{d\Omega}{2\pi}, \tag{119,6}$$

ove (in accordo con le notazioni introdotte in IX, capitoli 8 e 9) è stata introdotta la componente dello sviluppo di Fourier spazio-temporale della funzione di correlazione

$$(\delta\varepsilon_{il} \delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} =$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\varepsilon_{il}(t_1, \mathbf{r}_1)\, \delta\varepsilon_{km}(t_2, \mathbf{r}_2) \rangle\, e^{i(\Omega t - \mathbf{q}\mathbf{r})}\, dt\, dV \tag{119,7}$$

---

[1]) Questa funzione dipende, ovviamente, dalla sola differenza $t = t_1 - t_2$. La seconda tappa del calcolo della media (indicata con parentesi angolari) in applicazione al prodotto di fluttuazione che qui figura si può intendere come la media rispetto all'istante iniziale t_2 per il tempo t dato.

($t = t_1 - t_2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$). La formula (119,6) si riferisce alla componente della luce diffusa con la polarizzazione $\mathbf{e}'$, registrata dall'analizzatore di polarizzazione. Parlando della distribuzione spettrale teniamo conto della forte dipendenza da Ω all'interno della riga della diffusione; quanto al fattore ω'^4 lentamente variabile, esso è stato sostituito con ω^4. Nell'espressione integranda (119,6) è lasciato il fattore $e^{-i\mathbf{qr}}$. La sua sostituzione con 1 nella formula esprimente la distribuzione spettrale può risultare inammissibile anche se ciò è lecito per la diffusione integrale rispetto alle frequenze (si veda il paragrafo prossimo).

Finora abbiamo trattato l'argomento in termini della meccanica classica. Passando alla descrizione quantistica, le coordinate q, così come le grandezze $\delta\varepsilon_{ik}$, vanno sostituite da rispettivi operatori quanto-meccanici nella rappresentazione di Heisenberg. Si può mostrare (si veda la fine del paragrafo) che in questo caso la formula (119,6) resta valida se con $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}}$ si intende la grandezza

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}} = \int\int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\hat{\varepsilon}_{km}(t_2, \mathbf{r}_2)\, \delta\hat{\varepsilon}_{il}(t_1, \mathbf{r}_1)\rangle > e^{i(\Omega t - \mathbf{qr})}\, dt\, dV. \qquad (119,8)$$

Ora la parentesi angolare significa la media totale (sia quanto-meccanica che statistica) rispetto allo stato del mezzo. Essendo gli operatori $\delta\hat{\varepsilon}_{ik}$ non commutativi in vari istanti in diversi punti del mezzo, ha importanza l'ordine in cui sono disposti questi operatori nell'espressione (119,8). A questa non commutatività è dovuta la dipendenza dell'intensità della diffusione dal segno di Ω espressa dalla relazione (118,4); nel limite classico questa dipendenza scompare, mentre la formula quantistica verifica automaticamente la relazione suindicata.

Il coefficiente d'estinzione integrale rispetto alle frequenze si ottiene integrando rispetto a Ω; per rapida convergenza all'esterno della riga di assorbimento l'integrazione può essere estesa da $-\infty$ a ∞ (ricordiamo che Ω è la differenza $\omega' - \omega$ e perciò i suoi valori positivi e negativi sono fisicamente distinti). L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = \delta(t),$$

e in seguito la funzione δ si elimina per integrazione rispetto a t, mentre la funzione di correlazione di tempo diverso diviene funzione di tempo uguale. Il coefficiente d'estinzione differenziale per direzioni è dato dalla formula

$$dh = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4} \{e_i'^* e_k' e_l e_m^* (\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}}\}\, do', \qquad (119,9)$$

ove

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} = \int \langle \delta\varepsilon_{il}^{(1)}\delta\varepsilon_{km}^{(2)}\rangle\, e^{-i\mathbf{qr}}\, dV \qquad (119,10)$$

è la componente di Fourier della funzione di correlazione contemporanea. Per $\mathbf{q} = 0$ la distribuzione angolare è legata con i soli fattori di polarizzazione, e riotteniamo così le formule già note.

La conservazione nell'integrale (119,10) del fattore $e^{-i\mathbf{qr}}$ diverso da 1 rende molto più complicate la distribuzione angolare e le proprietà di polarizzazione della luce diffusa [1]). In particolare, non è lecita la divisione della diffusione in due parti (scalare e simmetrica) che sarebbero determinate dai due primi termini nella formula (117,17). Quel che più importa in questo caso è che il tensore $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}}$ non sia più necessariamente tensore autentico, come ciò si ha automaticamente per $\mathbf{q} = 0$; in esso possono figurare termini pseudotensoriali (si veda il problema 2). Questi termini sono ammissibili se il mezzo isotropo è composto di molecole simmetriche destrorse e sinistrorse e, quindi, invariante rispetto all'inversione.

Per concludere ci soffermiamo in breve sulla deduzione delle formule (119,6) e (119,8).

Da operatore di perturbazione nell'hamiltoniano del sistema mezzo + campo funge l'integrale

$$\hat{V} = -\int \delta\hat{\varepsilon}_{ik}\frac{\hat{E}_i\hat{E}_k}{8\pi}\, dV, \qquad (119,11)$$

ove $\hat{\mathbf{E}}$ è l'operatore del campo elettromagnetico quantizzato (dopo il calcolo della media rispetto agli stati stazionari del sistema e della media statistica secondo la distribuzione di Gibbs l'operatore (119,11) dà la variazione $\delta\mathcal{F}$ dell'energia libera per lenta variazione della permettività dielettrica; si veda la formula (101,24)).

L'operatore $\hat{\mathbf{E}}$ è espresso in funzione degli operatori di annichilazione e di nascita dei fotoni negli stati ω, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$:

$$\hat{\mathbf{E}} = i\sum_{\mathbf{ke}}\left(\frac{2\pi\hbar\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/2}\{\hat{c}_{\mathbf{ke}}\mathbf{e}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{ke}}\mathbf{e}^{*}e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\}, \qquad (119,12)$$

ove $u = d\omega/dk$ (il volume di normalizzazione è posto uguale a 1). Questa espressione differisce da quella per il campo nel vuoto (cfr. IV § 2) per il fattore $(u/\sqrt{\varepsilon})^{1/2}$ nei coefficienti di normalizzazione:

[1]) Nei §§ 121-123 c'incontreremo dei casi in cui è impossibile porre $\mathbf{q} = 0$ nella formula (119,10) anche per la diffusione integrale rispetto alle frequenze.

la sua origine è legata al fattore $\sqrt{\varepsilon}/u$ che figura nella densità dell'energia (83,9) dell'onda elettromagnetica piana nel mezzo [1]).

La probabilità della transizione con assorbimento del fotone $\mathbf{k}$ ed emissione del fotone $\mathbf{k}'$, quando, fra l'altro, il mezzo passa da uno stato iniziale dato (indichiamolo con l'indice n) a qualsiasi stato finale (f), è data dalla formula (cfr. III, la formula (40,5))

$$dw = \sum_f \left| \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{k}' f \mid V \mid \mathbf{k} n \rangle \, dt \right|^2 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}, \qquad (119,13)$$

ove l'elemento di matrice

$$\langle \mathbf{k}' f \mid V \mid \mathbf{k} n \rangle = \frac{2\pi\hbar\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}} \int (\delta\varepsilon_{ik})_{fn} \frac{e_i'^* e_k}{4\pi} e^{i(\Omega t - \mathbf{q}\mathbf{r})} dV,$$

$$\Omega = \omega' - \omega, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}.$$

L'integrale che figura nella formula (119,13) riscriviamo nella forma di integrale doppio rispetto a $dV_1 dV_2 dt_1 dt_2$ e osserviamo che

$$\sum_f (\delta\varepsilon_{il}^{(1)})_{fn} (\delta\varepsilon_{km}^{(2)})_{fn}^* = (\delta\varepsilon_{km}^{(2)} \delta\varepsilon_{il}^{(1)})_{nn}.$$

L'espressione integranda dipende dalle sole differenze $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e $t_1 - t_2$. Perciò la probabilità dw contiene il fattore t, ossia il tempo totale di osservazione. Il coefficiente d'estinzione cercato è definito come $dh = dw/tu$. Dopo il calcolo definitivo della media statistica rispetto agli stati del mezzo si ottiene il risultato richiesto.

Problemi

1. Trovare la forma generale della dipendenza di polarizzazione della diffusione nel mezzo isotropo tenendo conto dell'impulso $\mathbf{q}$ trasmesso al mezzo (*B.J. Zeldovič*, 1972).

Soluzione. Il problema si riduce al ritrovamento di tutte le combinazioni tensoriali del quarto ordine indipendenti che godono della simmetria del tensore $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega\mathbf{q}}$ e che si possono costruire mediante il tensore unitario δ_{ik}, il tensore unitario antisimmetrico e_{ikl} e le componenti del vettore $\mathbf{v} = \mathbf{q}/q$; esse devono essere simmetriche rispetto a ogni coppia degli indici il e km e invarianti rispetto alla permutazione della coppia il con quella km (equivalente alla permutazione dei punti $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ e, quindi, al cambiamento di segno di $\mathbf{r}$) per cambia-

---

[1]) Il coefficiente di normalizzazione nella formula (119,12) si deduce dalla condizione secondo la quale gli autovalori dell'operatore densità dell'energia del campo devono essere uguali a $\sum (N_{\mathbf{k}e} + 1/2)\hbar\omega$, ove $N_{\mathbf{k}e}$ sono numeri di occupazione degli stati quantistici del fotone. L'energia del fotone nel mezzo è $\hbar\omega$ e l'impulso $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$): queste grandezze figurano negli esponenti dei fattori esponenziali della formula (119,12). A scanso di equivoci sottolineiamo che l'impulso $\hbar\mathbf{k}$ include in sé non soltanto il contributo del campo come tale ma anche l'impulso acquisito dal mezzo nel processo di emissione del fotone.

mento contemporaneo di segno di $\mathbf{v}$. A queste condizioni corrispondono le combinazioni

1) $\delta_{il}\delta_{km}$, 2) $\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{lk}\delta_{im}$,

3) $\delta_{il}v_k v_m+\delta_{km}v_i v_l$,

4) $\delta_{ik}v_l v_m+\ldots$, 5) $v_i v_k v_l v_m$,

6) $v_p e_{pik}\delta_{lm}+\ldots$, 7) $v_p e_{pik}v_l v_m+\ldots$

(nelle combinazioni 4), 6) e 7) sono omessi tre termini in ciascuna che si ottengono per simmetrizzazione del termine scritto). All'insieme di queste combinazioni corrisponde una distribuzione angolare della forma

$$\begin{gathered}
f_1|\mathbf{ee}'^*|^2+f_2\{1+|\mathbf{ee}'|^2\}+\\
+f_3\{(\mathbf{ee}'^*)(\mathbf{ve}^*)(\mathbf{ve}')+\text{c.c.}\}+\\
+f_4\{|\mathbf{ve}|^2+|\mathbf{ve}'|^2+((\mathbf{ee}')(\mathbf{ve}^*)(\mathbf{ve}'^*)+\text{c.c.})\}+\\
+f_5|(\mathbf{ve})(\mathbf{ve}')|^2+\\
+if_6\mathbf{v}\{[\mathbf{ee}^*]+[\mathbf{e}'^*\mathbf{e}']+([\mathbf{ee}'](\mathbf{e}^*\mathbf{e}'^*)-\text{c.c.})\}+\\
+if_7\mathbf{v}\{[\mathbf{e}'^*\mathbf{e}'](\mathbf{ve})(\mathbf{ve}^*)+[\mathbf{ee}^*](\mathbf{ve}')(\mathbf{ve}'^*)+\\
+([\mathbf{ee}'](\mathbf{ve}^*)(\mathbf{ve}'^*)-\text{c.c.})\},
\end{gathered}$$

ove $f_1, \ldots, f_7$ sono funzioni reali di Ω e q. Nel mezzo che consente l'inversione esistono i soli cinque primi termini (dei quali primi due sono equivalenti ai primi due termini nella formula (117,18)). Nel mezzo senza centro d'inversione esistono anche due ultimi termini; essi, tuttavia, si annullano se le due polarizzazioni $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ sono lineari. Se si trascura in $\mathbf{q}$ la differenza fra le frequenze ω e ω' sarà $\mathbf{v}=(\mathbf{n}'-\mathbf{n})/|\mathbf{n}'-\mathbf{n}|$, ove $\mathbf{n}=\mathbf{k}/k$ e $\mathbf{n}'=\mathbf{k}'/k$. In questa approssimazione il termine con f_7 si annulla identicamente (che si può provare con un calcolo molto complicato scomponendo ciascuno dei vettori $\mathbf{e}$ e $\mathbf{e}'$ in due componenti nel piano della diffusione e in quello ad esso perpendicolare).

2. Determinare la radiazione per moto di una particella veloce con velocità inferiore a quella della luce nel mezzo che diffonde la luce (*S.P. Kapitsa*, 1960).

Soluzione. La radiazione in questo caso si può considerare come la diffusione del campo della particella su fluttuazioni della permettività dielettrica del mezzo. Scriviamo l'energia irradiata in unità di tempo da unità di volume per il campo monocromatico diffuso come

$$W=h\bar{S}=\frac{hc\sqrt{\varepsilon}}{8\pi}|\mathbf{E}|^2$$

($\bar{S}$ dalla formula (83,11); h è il coefficiente d'estinzione della luce). In questa scrittura la formula è adatta per il campo $\mathbf{E}$ di qualsiasi origine.

Il campo della particella in moto ha lo spettro di frequenze continuo. Quindi, per ottenere la radiazione nell'intervallo di frequenza $d\omega$ (da unità di volume ma durante il tempo totale del moto) bisogna sostituire

$$|\mathbf{E}|^2\to 2|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\frac{d\omega}{2\pi}$$

(cfr. II § 66), ove $\mathbf{E}_\omega$ è la componente di Fourier temporale del campo. Integrando rispetto al volume otteniamo la distribuzione spettrale della radiazione totale

$$dW_\omega=d\omega\,\frac{hc\sqrt{\varepsilon}}{8\pi^2}\int|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\,dV.$$

L'applicabilità di questa formula chiede che il campo varii poco a distanze atomiche, e più precisamente, sul raggio di correlazione delle fluttuazioni della permettività ε nel mezzo. Inoltre, per trascurare lo spostamento della frequenza per diffusione la velocità delle molecole del mezzo deve essere piccola rispetto alla velocità v della particella.

Il campo della particella in moto è dato dalle formule (114,7-8). Abbiamo

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Ma la frequenza del campo per il moto della particella è $\omega = vk_x$. Percio $d^3k = dk_x d^2q = v^{-1}\, d\omega d^2q$ in modo che

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{v} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kr}} \frac{d^2q}{(2\pi)^2},$$

ove $\mathbf{kr} = \omega x/v + \mathbf{qr}$. Di qui

$$\int |E_\omega|^2\, dV = \frac{1}{v^2} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}\, e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\mathbf{r}} \frac{d^2q d^2q'}{(2\pi)^4}\, dV.$$

L'integrale rispetto a dx dà semplicemente la lunghezza l del cammino percorso dalla particella e l'integrale rispetto a $dy\, dz$ la funzione $\delta\,(2\pi)^2\,\delta\,(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. Quindi,

$$\int |\mathbf{E}_\omega|^2\, dV = \frac{1}{v^2} \int |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{d^2q}{(2\pi)^2}.$$

In questo integrale ha importanza il dominio di q relativamente grandi:

$$\omega \left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\right)^{1/2} \ll q \ll \frac{1}{a}$$

(a sono le dimensioni atomiche). Infatti, in questo dominio l'espressione per $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ si riduce a

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} \approx -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}} \approx -i\mathbf{q}\frac{4\pi e}{\varepsilon q^2}\, e^{-i\omega t}$$

e l'integrale diverge logaritmicamente. Con precisione logaritmica bisogna ridurre l'integrale a limiti corrispondenti alle frontiere del dominio suindicato. Come risultato otteniamo la seguente espressione per la distribuzione spettrale dell'intensità ($dF = dW/l$) di radiazione da un'unità di cammino:

$$dF = \frac{he^2c}{\pi v^2 \varepsilon^{3/2}} \ln \frac{vc}{a\omega\,(c^2 - \varepsilon v^2)^{1/2}} \tag{1}$$

con il coefficiente d'estinzione definito dalla formula (119,5).

La radiazione considerata è analoga a quella di transizione nel senso che non dipende dalla massa della particella. Per valori della velocità comparabili (che si trovano, tuttavia, nelle parti opposte dal valore di frontiera $c/\sqrt{\varepsilon}$) l'intensità di questa radiazione è piccola rispetto all'intensità della radiazione di Cerenkov. Così, nel caso dei gas per $v \sim c$, confrontando le espressioni (1) e (115,3), troviamo approssimativamente che

$$\frac{dF}{dF_{\text{čer}}} \sim \frac{\alpha^2}{\lambda^3 d^3} \sim \frac{a^6}{\lambda^3 d^3}$$

ove d sono distanze intermolecolari e $\lambda \sim \omega/c$ (per h è usata l'espressione (120,4) nella quale è posto $n - 1 \sim N\alpha$, ove $\alpha \sim a^3$ è la polarizzabilità della molecola). La stima per i liquidi si può ottenere ponendo $d \sim a$; allora $dF/dF_{\text{čer}} \sim (a/\lambda)^3$.

§ 120. *Diffusione di Rayleigh in gas e fluidi*

A seconda del carattere di variazione della frequenza della luce si distinguono due tipi di diffusione: 1) la *diffusione combinatoria* (*effetto Raman-Landsberg-Mandelštam*) che conduce alla comparsa nella luce diffusa di righe spostate (secondo la frequenza) rispetto alla luce di eccitazione e 2) la *diffusione di Rayleigh* che si produce senza variazione sensibile della frequenza.

Il meccanismo della diffusione combinatoria nei gas consiste nel cambiamento dello stato oscillatorio rotatorio o elettronico della molecola sotto influsso della luce incidente. Quanto alla diffusione di Rayleigh, essa non è legata a nessun cambiamento dello stato interno della molecola. Nel caso limite del gas rarefatto (la lunghezza l del cammino percorso dalla molecola è grande rispetto alla lunghezza d'onda λ della luce) la diffusione si produce indipendentemente su ciascuna molecola; questo fenomeno può essere studiato in modo puramente microscopico quantistico-meccanico.

Considereremo qui il caso inverso quando $l \ll \lambda$ [1]. In questo caso la diffusione di Rayleigh nei gas si può dividere in due parti. Una di esse è legata all'orientazione irregolare delle molecole (*fluttuazioni di anisotropia*). L'altra, invece, rappresenta la diffusione sulle fluttuazioni della densità del gas. L'orientazione della molecola cambia totalmente in seguito a più collisioni, cioè durante un tempo dell'ordine di grandezza del tempo del moto libero τ. Perciò la diffusione sulle fluttuazioni di anisotropia implica la comparsa di una riga relativamente sparpagliata con un massimo per $\omega' = \omega$ e di larghezza $\sim\hbar/\tau$. Quanto alla diffusione sulle fluttuazioni di densità, essa conduce alla comparsa su questo sfondo di una riga notevolmente più netta. Come vedremo più avanti, per la diffusione di luce di lunghezza d'onda λ sono importanti le fluttuazioni di densità che si producono nei volumi λ^3. Poiché questi volumi sono grandi la variazione delle fluttuazioni in essi è relativamente lenta per cui la corrispondente riga di diffusione è stretta. Conveniamo di chiamare più avanti *non spostata* questa riga netta.

La diffusione sulle fluttuazioni di densità è del tipo scalare; siccome la densità ρ è una grandezza scalare, sarà scalare anche la variazione della permettività dielettrica $\delta\varepsilon$ legata alla variazione di ρ. Ma la variazione della permettività dielettrica per fluttuazioni di anisotropia è descritta dal tensore simmetrico $\delta\varepsilon_{ik}$ con la traccia nulla; quest'ultimo fatto è evidente poiché nel calcolare la media in tutte le direzioni questo effetto deve in generale scomparire. Quindi, la diffusione sulle fluttuazioni di anisotropia è del tipo simmetrico.

---

[1]) Più precisamente, la condizione necessaria è $l \ll \lambda \operatorname{sen}(\vartheta/2)$, ove ϑ è l'angolo della diffusione. Il fatto è che la frequenza della luce figura nell'integrale (119,7) soltanto in combinazione di q (120,5) con l'angolo della diffusione.

Nei fluidi la situazione è più complicata. Qui la diffusione combinatoria può essere legata unicamente alla variazione dello stato oscillatorio (o elettronico) della molecola. Per diffusione nel liquido non compaiono righe combinatorie di oscillazione. Il fatto è che a causa della forte interazione tra molecole nel liquido non esiste loro rotazione libera che godrebbe di livelli energetici discreti. Perciò la rotazione delle molecole, come qualsiasi altro moto con cambiamento della loro disposizione reciproca, porta nel liquido un suo contributo soltanto nella creazione di una riga di diffusione comune relativamente larga attorno a $\omega' = \omega$ la quale, in questo caso, è naturale chiamare riga di Rayleigh. Il tempo di rilassamento dei moti indicati è legato alla viscosità del liquido.

La possibilità di separazione dalla diffusione di Rayleigh generale nel fluido della parte legata alle fluttuazioni termodinamiche (della densità e della temperatura) dipende da vari tempi di rilassamento. È necessario che i tempi di rilassamento di tutti processi di stabilimento dell'equilibrio nel fluido siano piccoli rispetto al tempo della variazione delle fluttuazioni suindicate. Sotto queste condizioni sarà osservata una riga stretta non spostata circondata da uno sfondo più sparpagliato (detto *ala* della riga di Rayleigh). La diffusione che conduce alla riga non spostata è scalare. Quanto all'ala, per diffusione nei liquidi (a differenza dei gas), in generale, è impossibile affermare che essa sia puramente simmetrica senza impurità della parte scalare.

La distribuzione angolare nella riga non spostata è data dalle formule generali (117,25-26) relative alla diffusione scalare. Perciò è sufficiente calcolare il coefficiente d'estinzione totale. Ponendo $\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon\delta_{ik}$ nella formula (119,5), troviamo

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \langle \delta\varepsilon^2 \rangle_V. \tag{120,1}$$

Se $\delta\rho$ e δT sono le variazioni di densità e di temperatura, allora

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \delta T.$$

In accordo con le note formule (cfr. V § 112) le fluttuazioni di densità e della temperatura sono statisticamente indipendenti ($\langle\delta\rho\delta T\rangle = 0$) e le medie quadratiche di ciascuna di esse sono

$$\langle(\delta T)^2\rangle_V = \frac{T^2}{\rho c_v V}, \quad \langle(\delta\rho)^2\rangle_V = \frac{\rho T}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T$$

(c_v è la capacità termica dell'unità di massa del mezzo). Troviamo così la formula

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[\rho T\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho c_v}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2\right]; \tag{120,2}$$

essa è stata dedotta originariamente da *Einstein* (1910).

Si può rappresentare questa formula altrimenti esprimendola in funzione di altre derivate termodinamiche. Considerando come variabili indipendenti un'altra coppia di grandezze statisticamente indipendenti, ossia la pressione P e l'entropia s (relativa a unità di massa), scriviamo

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_s \delta P + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_P \delta s$$

e usiamo le note espressioni per le fluttuazioni di queste grandezze

$$\langle(\delta s)^2\rangle_V = \frac{c_p}{\rho V}, \quad \langle(\delta P)^2\rangle_V = \frac{\rho T u^2}{V}$$

(u è la velocità adiabatica del suono nel mezzo: $u^2 = (\partial P/\partial\rho)_s$). Sostituendo anche

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}\right)_P = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_P = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \frac{1}{u^2},$$

otteniamo la formula di Einstein scritta così

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[\frac{T^2}{\rho c_p}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P^2 + \frac{\rho T}{u^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s^2\right]. \tag{120,3}$$

Nel caso dei gas la formula (120,3) si rende molto più semplice. La permettività dielettrica del gas (nel dominio ottico delle frequenze) è quasi indipendente dalla temperatura; perciò si può trascurare il primo termine tra parentesi quadre. Quanto alla dipendenza dalla densità, essa si riduce alla proporzionalità diretta fra $\varepsilon - 1$ e ρ; perciò

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \approx \varepsilon - 1 \approx 2(n-1)$$

($n = \sqrt{\varepsilon}$ è il coefficiente di rifrazione). Tenendo anche conto che secondo l'equazione di stato del gas perfetto si ha

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{NT}$$

(N è il numero di particelle in 1 cm^3), otteniamo

$$h = \frac{2\omega^4}{3\pi c^4}\frac{(n-1)^2}{N}. \tag{120,4}$$

Questa formula è stata ottenuta per la prima volta da *Rayleigh* (1881).

Passiamo ora alla questione della struttura fine della riga non spostata. A tale scopo bisogna considerare l'andamento temporale delle fluttuazioni. Sotto questo aspetto le fluttuazioni termodinamiche si dividono in due categorie. Le fluttuazioni adiabatiche di pressione nel liquido (nel gas) si propagano sotto forma di onde non smorzantisi con la velocità del suono u (qui trascuriamo l'assorbi-

mento del suono in quanto esso implica soltanto un certo allargamento della riga; si veda più avanti). Quanto alle fluttuazioni dell'entropia per pressione costante, in generale, esse non si propagano rispetto al fluido (smorzandosi lentamente sotto influsso della conducibilità termica).

In virtù del carattere ondoso di propagazione delle perturbazioni acustiche l'andamento temporale delle fluttuazioni della pressione è correlato anche a distanze superiori a quelle intermolecolari. Questa circostanza era inessenziale per il calcolo dell'intensità totale (integrale rispetto alle frequenze) della riga di diffusione: essa è determinata dalla correlazione tra fluttuazioni in diversi punti dello spazio allo stesso istante, e questa correlazione è estesa soltanto a distanze vicine. La distribuzione spettrale dell'intensità della diffusione, invece, è determinata dalla funzione di correlazione non contemporanea delle fluttuazioni e l'esistenza della correlazione lontana rende necessaria la conservazione del fattore $e^{-i\mathbf{qr}}$ nella formula (119,7).

In un'onda non smorzantesi acustica la frequenza Ω e il vettore d'onda $\mathbf{q}$ sono legati mediante la relazione $\Omega^2 = u^2\mathbf{q}^2$. Rispettivamente a questo fatto lo sviluppo spettrale della funzione di correlazione delle fluttuazioni di pressione (e, quindi, delle fluttuazioni corrispondenti di permettività) sarà composto di due righe nette con frequenze

$$\Omega = \pm qu.$$

Ma la grandezza del vettore $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ responsabile della diffusione della luce è legata con l'angolo di diffusione ϑ (angolo fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$) mediante l'uguaglianza

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \approx 2n\frac{\omega}{c}\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2} \qquad (120,5)$$

(in virtù della piccolezza della differenza $\Omega = \omega' - \omega$ qui è posto $\omega' \approx \omega$). Indicando con Ω_0 il valore corrispondente di Ω, abbiamo quindi

$$\Omega_0 = \pm 2n\omega\frac{u}{c}\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}. \qquad (120,6)$$

In tal modo, la diffusione sulle fluttuazioni di pressione implica la comparsa di un doppietto con distanza fra le componenti $2|\Omega_0|$ dipendente dall'angolo di diffusione, il cosiddetto *doppietto di Mandelštam-Brillouin* (*L.I. Mandelštam*, 1918; *L. Brillouin*, 1922) [1]).

[1]) A titolo di illustrazione notiamo che per valori tipici $u = 1{,}5\cdot10^5$ cm/s, $n = 1{,}5$, la lunghezza d'onda della luce diffusa $\lambda \approx 5\cdot10^{-5}$ cm, l'angolo di diffusione $\vartheta = 90°$ la larghezza del doppietto è $\Omega_0/2\pi c = 0{,}05$ cm^{-1}. La larghezza dell'ala della riga di Rayleigh raggiunge 200-150 cm^{-1}.

Le fluttuazioni di entropia, invece, in accordo con quanto detto, godono della frequenza nulla. Perciò la diffusione su queste fluttuazioni implica la comparsa di un'altra riga centrale con $\Omega = 0$ (*L.D. Landau, G. Placzek*, 1933) [1].

Vediamo come è distribuita l'intensità della diffusione non spostata fra doppietto e riga centrale. Con intensità del doppietto intendiamo la somma delle intensità di ambedue le sue componenti, cioè la doppia intensità di ciascuna di esse [2]. Allora il coefficiente d'estinzione totale dato dalla formula (120,2) o (120,3) è $h = h_{\text{dop}} + h_{\text{r.c.}}$.

Poiché le righe del doppietto sono condizionate dalla diffusione sulle fluttuazioni adiabatiche della pressione la loro intensità è data dal secondo termine nella formula (120,3), dovuto a queste stesse fluttuazioni. La derivata adiabatica $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s$ si può legare con la derivata isotermica trasformandola in variabili ρ, T:

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{T}{c_v\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho .$$

Se trascuriamo la variazione di ε con la temperatura per la densità immutata, allora $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T$. Con la stessa approssimazione nell'intensità totale rappresentata nella forma (120,2) si può trascurare il secondo termine (per calcolo libero di queste approssimazioni si veda il problema 1). Infine, ricorrendo alla nota formula termodinamica esprimente il rapporto fra le compressibilità adiabatica e isotermica (cfr. V, la formula (16,14))

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T , \qquad (120,7)$$

otteniamo la *formula di Landau-Placzek* esprimente la quota dell'intensità totale della riga non spostata riferita al doppietto

$$\frac{h_{\text{dop}}}{h} = \frac{c_v}{c_p} . \qquad (120,8)$$

Per determinare la forma delle righe è necessario considerare la funzione di correlazione contemporanea tenendo conto dei processi dissipativi che conducono allo smorzamento delle fluttuazioni. Per le fluttuazioni di pressione questi sono processi di viscosità e

[1]) Nell'elio superfluido (isotopo ^{4}He) le perturbazioni dell'entropia si propagano sotto forma di oscillazioni debolmente smorzantisi, ossia sotto forma di onde del secondo suono la cui velocità u_2, tuttavia, è notevolmente inferiore alla velocità del suono ordinario. Perciò la riga centrale di diffusione nell'elio superfluido si scinde, a sua volta, in doppietto stretto; la sua larghezza è data dalla stessa formula (120,6) con u_2 al posto di u (*V.L. Ginsburg*, 1943).

[2]) La differenza nelle intensità di ambedue le componenti secondo la formula (118,4) è di solito inessenziale poiché $\hbar\Omega_0 \ll T$.

di conducibilità termica. Le componenti di Fourier della funzione di correlazione per le fluttuazioni adiabatiche della pressione sono

$$(\delta P^2)_{\Omega \mathbf{q}} = \frac{\rho T u^3 \gamma}{(\Omega \mp qu)^2 + u^2\gamma^2}, \tag{120,9}$$

ove

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho u}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \tag{120,10}$$

(cfr. IV § 89). La grandezza γ è il coefficiente di assorbimento del suono su unità di lunghezza; in esso η, ζ sono i coefficienti di viscosità e $\varkappa$ il coefficiente di conducibilità termica del mezzo (cfr. VI § 77). La distribuzione dell'intensità nella riga (in ciascuna delle componenti del doppietto) per data direzione della diffusione è proporzionale all'espressione (120,9). Normalizzandola per 1, otteniamo

$$dI = \frac{\Gamma}{2\pi\left[(\Omega - \Omega_0)^2 + \Gamma^2/4\right]}\, d\Omega, \tag{120,11}$$

ove $\Gamma = 2u\gamma$. Questa forma della riga si chiama *dispersiva* e la grandezza Γ larghezza della riga. Mediante q dalla formula (120,5) troviamo la seguente espressione per questa larghezza:

$$\Gamma = \frac{2\omega^2 n^2}{\rho c^2}(1 - \cos\vartheta)\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\Big)\right]. \tag{120,12}$$

Le fluttuazioni isobare di entropia si smorzano soltanto per conto della conducibilità termica. La loro funzione di correlazione è

$$(\delta s^2)_{\Omega \mathbf{q}} = \frac{2c_p}{\rho}\,\frac{\chi q^2}{\Omega^2 + \chi^2 q^4}, \tag{120,13}$$

ove $\chi = \varkappa/\rho c_p$ è il coefficiente di conducibilità di temperatura. La forma della riga centrale è data dalla stessa formula dispersiva (120,11), ove ora si deve porre $\Omega_0 = 0$, e la larghezza della riga è

$$\Gamma = 2\chi q^2 = 4\chi\frac{n^2\omega^2}{c^2}(1 - \cos\vartheta). \tag{120,14}$$

Come è stato detto all'inizio di questo paragrafo, la teoria qui trattata è applicabile alla diffusione nel liquido a condizione che tutti i tempi di dilassamento in esso siano piccoli rispetto al tempo di variazione delle fluttuazioni. Si deve tener conto che ogni liquido ha tempi di rilassamento di ordine di grandezza diverso. Il processo di rilassamento più rapido è, probabilmente, lo smorzamento degli sforzi elastici nel liquido. Il tempo di rilassamento corrispondente (di *Maxwell*) è $\tau_M \sim \eta/G$, ove G è il modulo di scorriimento Più lenta è la ridistribuzione delle molecole secondo le loro orientazioni, cioè lo smorzamento delle fluttuazioni di anisotropia. Il

tempo di rilassamento corrispondente (di *Debay*) è $\tau_D \sim \eta a^3/T$, ove a sono le dimensioni della molecola. La differenza fra τ_M e τ_D è particolarmente grande nei liquidi con grandi molecole. Infine, sono possibili processi di rilassamento lenti di vario tipo che implicano la dispersione del suono (ad esempio, reazioni chimiche, trasmissione lenta di energia ai gradi di libertà oscillatori della molecola, ecc.). Per la diffusione sono importanti processi per i quali $1/\tau$ è comparabile con la frequenza delle perturbazioni acustiche sulle quali si produce la diffusione. Senza entrare in dettaglio, indichiamo soltanto per viscosità sufficientemente grande del fluido, quando $\tau_M \gg 1/qu$, il fluido si comporta nei confronti della diffusione della luce come un corpo solido amorfo.

Problemi

1. Trovare una formula esatta esprimente il rapporto fra le intensità della riga centrale e del doppietto nella riga di diffusione non spostata (*I.L. Fabelinskij*, 1956).

Soluzione. Come è stato detto nel testo, il secondo termine della formula (120,3) dà l'intensità del doppietto. Il primo termine, invece, è legato con le fluttuazioni isobariche dell'entropia e perciò dà l'intensità della riga centrale. Quindi

$$\frac{h_{\text{r.c}}}{h_{\text{dop}}} = \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P^2 \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s^2 \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s .$$

Dalle relazioni termodinamiche (120,7) e da:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T - \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2$$

(cfr. V, la formula (16,15)) ricaviamo

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p - c_v}\,\frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2 .$$

Infine, abbiamo

$$\frac{h_{\text{r.c}}}{h_{\text{dop}}} = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P\right]^2 .$$

Nell'approssimazione di Landau-Placzek l'espressione fra parentesi quadre si riduce a 1.

2. La luce si diffonde nel gas di molecole della forma lineare con polarizzabilità $\alpha_\parallel$ e $\alpha_\perp$ nelle direzioni longitudinale e trasversale all'asse, rispettivamente. Determinare le intensità di vari tipi di diffusione.

Soluzione. L'intensità totale della diffusione (per dati stati oscillatori ed elettronici delle molecole) include in sé tutta la diffusione di Rayleigh e la parte rotatoria della diffusione combinatoria. Poiché la diffusione procede indipendentemente da ognuna delle molecole del gas, il coefficiente d'estinzione totale è più semplice ottenere in base alla formula (92,4) moltiplicandola per

il numero N di particelle in 1 cm³ e sostituendo il quadrato $|\alpha V|^2$ con $1/3\alpha_{ik}^2 = 1/3\,(\alpha_{\parallel}^2 + 2\alpha_{\perp}^2)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}(\alpha_{\parallel}^2 + 2\alpha_{\perp}^2) \tag{1}$$

(le definizioni di polarizzabilità qui e nel § 92 differiscono per il fattore V).

La riga di Rayleigh non spostata è legata con la parte scalare della polarizzabilità, cioè il processo avviene come se il tensore di polarizzabilità della molecola fosse uguale a $1/3\alpha_{ll}\delta_{ik}$. Perciò mediante la stessa formula (92,4) troviamo

$$h_{\text{non spost}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\,\frac{(\alpha_{\parallel} + 2\alpha_{\perp})^2}{3}. \tag{2}$$

La differenza $h_{\text{totale}} - h_{\text{non spostato}}$ contiene in sé lo sfondo della riga non spostata (diffusione sulle fluttuazioni di anisotropia) e la diffusione combinatoria rotatoria. Per separare il primo è necessario preliminarmente calcolare la media del tensore di polarizzabilità della molecola rispetto alla sua rotazione intorno a un asse (perpendicolare all'asse della molecola). La media così calcolata della polarizzabilità lungo l'asse di rotazione, evidentemente, coincide con $\alpha_{\perp}$ ed è uguale a $1/2\,(\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel})$ lungo qualsiasi direzione nel piano perpendicolare all'asse della rotazione. In altre parole, la molecola rotante attorno a un asse assegnato si deve considerare come particella con valori principali del tensore di polarizzabilità uguali a

$$\alpha_{\perp},\ (\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel})/2,\ (\alpha_{\perp} + \alpha_{\parallel})/2.$$

Mediante questi valori va calcolato il tensore simmetrico $\alpha_{ik} - 1/3\alpha_{ll}\delta_{ik}$ con la traccia nulla; dopo questa operazione il calcolo analogo alla deduzione delle formule (1) e (2) dà

$$h_{\text{sfondo}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\,\frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel})^2}{6}. \tag{3}$$

Infine, l'intensità della diffusione combinatoria rotatoria si ottiene sottraendo le (2) e (3) dall'(1):

$$h_{\text{comb}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\,\frac{(\alpha_{\perp} - \alpha_{\parallel})^2}{2}.$$

§ 121. *Opalescenza critica*

Come è noto, la compressibilità isotermica di una sostanza $(\partial\rho/\partial P)_T$ cresce infinitamente all'avvicinarsi al punto critico. Con essa cresce anche l'espressione (120,2) per l'intensità totale della diffusione di Rayleigh. Ne risulta che la diffusione cresce bruscamente in prossimità del punto critico (*opalescenza critica*) [1]. Tuttavia la

[1]) L'idea sul legame fra questo fenomeno e la crescita delle fluttuazioni di densità è stata avanzata da *M. Smoluchowski* (1908). Nei limiti della teoria del punto critico di Van der Waals (cfr. V § 152) il fenomeno è stato studiato da *L.S. Ornstein* e *F. Zernicke* (1914).

formula stessa (120,2), in generale, diviene inapplicabile. Il fatto è che in prossimità del punto critico la funzione di correlazione contemporanea fra fluttuazioni di densità (e con essa della permettività dielettrica) in diversi punti dello spazio si estende a distanze dell'ordine di grandezza del raggio di correlazione r_c che aumenta infinitamente all'avvicinarsi al punto critico (cfr. V §§ 152, 153). Per questa ragione qui non si può sostituire il fattore $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ nella formula (119,9) con 1 anche per il calcolo dell'intensità totale della diffusione (e non soltanto della sua struttura spettrale fine).

Questa sostituzione in tutto il dominio degli angoli di diffusione è ammissibile sotto la sola condizione che

$$kr_c \ll 1, \tag{121,1}$$

ove $k = n\omega/c$ è il vettore d'onda della luce diffusa. In questo caso si può, come prima, ricorrere alla formula (120,2) per il coefficiente d'estinzione totale e, inoltre, sarà sufficiente lasciare in essa il solo primo termine crescente (crescono le sole fluttuazioni della densità e non della temperatura). All'avvicinarsi al punto critico seguendo qualsiasi direzione nel piano ρ,T, tranne l'isoterma critica $T = T_c$, la compressibilità aumenta secondo la legge [1]).

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T \backsim |T - T_c|^{-\gamma}, \quad \gamma \approx 1{,}26.$$

Poiché non esistono ragioni per cui la derivata $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T$ si annulli o diventi infinita, secondo la stessa legge varierà anche l'intensità della diffusione:

$$h \backsim |T - T_c|^{-\gamma}. \tag{121,2}$$

Questa crescita è legata con l'aumento dell'intensità non di tutte le componenti della struttura fine della riga di Rayleigh, bensì della sola sua componente centrale. Infatti, in secondo con la formula (120,8) $h_{\text{dop}} = hc_v/c_p$. Il fattore c_p a denominatore compensa il fattore $(\partial\rho/\partial P)_T$ in h poiché tutti e due crescono secondo la stessa legge. Perciò l'intensità del doppietto cresce soltanto come c_v, cioè secondo una legge molto più lenta [2]):

$$h_{\text{dop}} \backsim |T - T_c|^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 0{,}1. \tag{121,3}$$

[1]) Tutti i dati in questo paragrafo inerenti al carattere di variazione delle grandezze termodinamiche nell'intorno del punto critico si possono trovare in V § 153. Qui si usano le stesse nozioni per gli indici critici.

[2]) In tutti questi ragionamenti è supposto, ovviamente, che la disuguaglianza (121,1) sia compatibile con l'ipotesi che la sostanza si trovi già nel « dominio di fluttuazione » nell'intorno del punto critico.

In prossimità sufficiente al punto critico la disuguaglianza (121,1) per k assegnato sarà violata a priori e la sostituzione del fattore $e^{-i\mathbf{qr}}$ con 1 sarà illecita tanto più quanto più piccolo è l'angolo di diffusione [1]). Sia dh il coefficiente d'estinzione differenziale per diffusione in elemento dell'angolo solido do', cioè per un valore assegnato $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Per fissare le idee, ci limitiamo alla diffusione della luce naturale. Tenendo conto che la dipendenza angolare legata allo stato di polarizzazione della luce per diffusione sulle fluttuazioni scalari è data dal fattore I nella formula (117,26), abbiamo

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} (\delta\varepsilon^2)_{\mathbf{q}} \frac{3}{4} (1 + \cos^2\vartheta) \frac{do'}{4\pi}, \tag{121,4}$$

ove

$$(\delta\varepsilon^2)_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 (\delta\rho^2)_{\mathbf{q}}.$$

Nell'intorno immediato del punto critico, ove

$$kr_c \gg 1, \tag{121,5}$$

per angoli di diffusione non troppo piccoli sarà anche $qr_c \gg 1$. In questo dominio di angoli nell'integrale $(\delta\rho^2)_{\mathbf{q}}$ sono importanti le distanze $r \sim 1/q \gg r_c$ ove la funzione di correlazione delle fluttuazioni della densità ha carattere di potenza [2]):

$$\langle\delta\rho^{(1)}\delta\rho^{(2)}\rangle \backsim r^{-(1+\zeta)}, \quad \zeta \approx 0{,}04.$$

Inoltre, la componente di Fourier della funzione di correlazione è

$$(\delta\rho^2)_{\mathbf{q}} \backsim q^{-2+\zeta} \tag{121,6}$$

con il coefficiente indipendente dalla temperatura. In tal modo, otteniamo la seguente dipendenza del coefficiente d'estinzione nel dominio considerato da angoli e da frequenze:

$$dh \backsim \omega^{2-\zeta} \frac{1 + \cos^2\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)^{1-\zeta/2}} do'. \tag{121,7}$$

---

[1]) È da notare, tuttavia, che la diffusione come tale è opportuno considerare soltanto per angoli dell'ordine di grandezza dell'angolo di diffrazione $\sim\lambda/L$, ove L sono le dimensioni lineari del corpo.

[2]) Cfr. V, la formula (148,7). In virtù dell'equivalenza formale dei problemi del punto critico e delle transizioni di fase di seconda specie (con parametro d'ordine unidimensionale) questa formula è applicabile anche all'intorno del punto critico.

Si vede che per angolo di diffusione fisso nel dominio $qr_c \gg 1$ l'aumento dell'intensità a misura di avvicinamento al punto critico cessa. In questo punto stesso la formula (121,7) si verifica per tutti gli angoli.

§ 122. *Diffusione nei cristalli liquidi*

La diffusione intensa della luce, che sotto certi aspetti è simile all'opalescenza critica, avviene in cristalli liquidi. Ci limitiamo qui alla considerazione di questo fenomeno nei cristalli liquidi del tipo nematico (*P.G. de Gennes*, 1968).

Di questi cristalli abbiamo già parlato nel § 17 e trovato l'espressione del loro tensore di permettività dielettrica

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(\omega)\,\delta_{ik} + \varepsilon_a(\omega)\,d_i d_k; \tag{122,1}$$

i coefficienti ε_0 e ε_a sono ora funzioni della frequenza.

Le fluttuazioni di permettività sono legate, soprattutto, con le fluttuazioni della direzione del diretto $\mathbf{d}$ e rappresentano, quindi, le fluttuazioni di anisotropia. Una rotazione uguale contemporanea della direzione del direttore in tutto il volume, in generale, non cambia l'energia del corpo; perciò le fluttuazioni di onda lunga sono legate con sole piccole perdite energetiche e, di conseguenza, sono grandi. A loro volta, grandi fluttuazioni della permettività implicano forte diffusione della luce.

Rappresentiamo la grandezza fluttuante $\mathbf{d}$ nella forma

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \mathbf{v}, \tag{122,2}$$

ove $\mathbf{d}_0$ è la sua media costante e $\mathbf{v}$ piccola variazione per fluttuazione; poiché $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d}_0^2 = 1$, allora per piccolezza di $\mathbf{v}$ abbiamo

$$\mathbf{v}\mathbf{d}_0 = 0. \tag{122,3}$$

La variazione della permettività dielettrica per fluttuazione si esprime in funzione di $\mathbf{v}$ secondo la formula

$$\delta\varepsilon_{ik} = \varepsilon_a(d_{0i}v_k + d_{0k}v_i). \tag{122,4}$$

L'influsso delle fluttuazioni di densità e di temperatura su $\delta\varepsilon_{ik}$ si può trascurare.

Tenuto conto della formula (122,4), esprimiamo la funzione di correlazione contemporanea delle fluttuazioni di permettività

mediante la funzione di correlazione delle fluttuazioni del direttore:

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} = \varepsilon_a^2 \{d_{0i}d_{0k}(\nu_l\nu_m)_{\mathbf{q}} + d_{0i}d_{0m}(\nu_k\nu_l)_{\mathbf{q}} + \\ + d_{0k}d_{0l}(\nu_i\nu_m)_{\mathbf{q}} + d_{0l}d_{0m}(\nu_i\nu_k)_{\mathbf{q}}\}. \quad (122,5)$$

Quanto alla funzione $(\nu_i\nu_k)_{\mathbf{q}}$, essa è stata già trovata in V § 141. In virtù dell'uguaglianza (122,3) questo tensore ha componenti non nulle nel solo piano perpendicolare a $\mathbf{d}_0$. Indicando con le lettere α, β gli indici tensoriali in questo piano, abbiamo

$$(\nu_\alpha\nu_\beta)_{\mathbf{q}} = a\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q_\perp^2}\right) + b\,\frac{q_\alpha q_\beta}{q_\perp^2}, \\ a = \frac{T}{a_2 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2}, \qquad b = \frac{T}{a_1 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2}, \quad (122,6)$$

ove a_1, a_2, a_3 sono moduli positivi che determinano la dipendenza dell'energia libera del cristallo nematico dalle derivate del direttore; $q_\parallel$ e $q_\perp$ sono le proiezioni di $\mathbf{q}$ sulla direzione $\mathbf{d}_0$ e sul piano che le è perpendicolare.

Se è supposto che l'anisotropia della permettività dielettrica sia relativamente piccola, cioè che $|\varepsilon_a| \ll \varepsilon_0$, allora per il coefficiente d'estinzione differenziale per direzioni si può ricorrere alla formula (119,9) ottenuta per i mezzi isotropi (in questo caso, ovviamente, non si può porre $\mathbf{q} = 0$!). Non scriviamo qui formula molto complicata per la distribuzione angolare e per dipendenze di polarizzazione.

Proprietà caratteristica della diffusione considerata è l'aumento della sua intensità per piccoli angoli di diffusione secondo la legge

$$dh \backsim do'/q^2. \quad (122,7)$$

Questo forte aumento (così come l'aumento secondo la formula (121,7) nel punto critico) è dovuto a una decrescenza lenta (seconda la potenza) della funzione di correlazione delle fluttuazioni al crescere della distanza. L'integrale rispetto agli angoli diverge logaritmicamente nel limite inferiore. Esso deve essere tagliato sui valori $q \sim 1/L$ corrispondenti alla diffrazione sul corpo in totale (cfr. la nota alla pag. 622) e, quindi, l'intensità totale della diffusione dipende logaritmicamente dalle dimensioni L del corpo.

È da notare infine che il campo magnetico esterno limita il crescere della funzione di correlazione $(\nu_i\nu_k)_{\mathbf{q}}$ per $\mathbf{q}$ piccoli (cfr. V § 141) e soppianta così la diffusione, ossia « schiarisce » il cristallo liquido.

§ 123. *Diffusione nei corpi solidi amorfi*

La diffusione di Rayleigh nei corpi solidi amorfi [1]) differisce notevolmente dalla diffusione in fluidi e gas. Nel corpo isotropo, come è noto, esistono due velocità di propagazione del suono: longitudinale u_l e trasversale u_t. In relazione a ciò la struttura fine della riga di Rayleigh contiene non un doppietto di Mandelštam-Brillouin ma due. Essi sono legati con la diffusione sulle « onde acustiche » trasversali e longitudinali e distanti, rispettivamente, dal centro della riga a

$$\Omega_l = \pm u_l q \quad \text{e} \quad \Omega_t = \pm u_t q.$$

Poiché sempre $u_l > u_t$, allora $|\Omega_l| > |\Omega_t|$. La componente centrale della riga è legata di nuovo con la diffusione su fluttuazioni che non si propagano rispetto al mezzo. Fra queste fluttuazioni il ruolo fondamentale in questo caso giocano le fluttuazioni della struttura. In un corpo amorfo con la sua disposizione disordinata di atomi queste fluttuazioni sono relativamente grandi e praticamente non variano con il tempo (in virtù di una lentezza straordinaria dei processi diffusivi nel solido). La diffusione su queste fluttuazioni implica la comparsa di una riga intensa di larghezza praticamente nulla. Per sua polarizzazione e distribuzione angolare questa diffusione rappresenta l'insieme dei tipi scalare e simmetrico.

Consideriamo le componenti dei doppietti della riga di Rayleigh nei solidi amorfi. Nel solido l'azione di qualsiasi deformazione (nel caso considerato di quella fluttuazionale) si estende a distanze notevoli. Perciò anche le fluttuazioni contemporanee in punti diversi del corpo sono correlate a grandi (rispetto a $1/q$) distanze. Quindi, abbiamo a che fare di nuovo con la situazione quando è impossibile porre $\mathbf{q} = 0$ nella funzione di correlazione delle fluttuazioni neanche calcolando l'intensità totale (e la polarizzazione) della luce diffusa.

Il campo dell'onda diffusa è dato dalla formula

$$\mathbf{E}' = -\frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2} E_0 [\mathbf{n}' [\mathbf{n}'\mathbf{G}]], \tag{123,1}$$

ove

$$G_i = \int \delta\varepsilon_{ik} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} dV \cdot e_k, \tag{123,2}$$

[1]) Teoria notevolmente più complicata della diffusione nei cristalli solidi non è trattata nel presente libro.

e $\mathbf{n}'$ è vettore unitario nella direzione della diffusione. La variazione della permettività dielettrica per deformazione del corpo isotropo è data dalla formula

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}, \tag{123,3}$$

ove u_{ik} è il tensore di deformazione (cfr. la (102,1)). Poiché l'integrale (123,2) separa da $\delta\varepsilon_{ik}$ la componente di Fourier spaziale con il vettore d'onda $\mathbf{q}$, allora anche nella formula (123,3) si deve intendere con u_{ik} la deformazione nell'onda acustica con questo vettore d'onda. Perciò scriviamo il vettore di spostamento nel caso della deformazione sotto la forma

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}\{\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{qr}}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_0 e^{i\mathbf{qr}} + \mathbf{u}_0^* e^{-i\mathbf{qr}}), \tag{123,4}$$

e di qui il tensore di deformazione è

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) = \operatorname{Re}\left\{\frac{i}{2}(u_{0i}q_k + u_{0k}q_i)\, e^{i\mathbf{qr}}\right\},$$

e l'integrale esteso al volume

$$\int u_{ik} e^{-i\mathbf{qr}}\, dV = \frac{iV}{4}(u_{0i}q_k + u_{0k}q_i). \tag{123,5}$$

Consideriamo dapprima la diffusione sulle onde acustiche trasversali. Poiché nell'onda trasversale $\mathbf{u} \perp \mathbf{q}$ e $u_{ll} = 0$, allora

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik}.$$

Perciò, ricorrendo alla formula (123,5), troviamo

$$\mathbf{G} = \frac{iVa_1}{4}\{\mathbf{u}_0(\mathbf{qe}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}_0\mathbf{e})\}. \tag{123,6}$$

L'onda acustica trasversale può avere due direzioni di polarizzazione indipendenti: il vettore $\mathbf{u}$ può giacere nel piano $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ o essere perpendicolare ad esso. Tenendo anche conto che $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, vediamo facilmente che nel primo caso la proiezione $\mathbf{G}$ sul piano perpendicolare a $\mathbf{k}'$ è nulla. In tal modo, le onde acustiche trasversali polarizzate nel piano $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, in generale, non diffondono la luce.

Se il vettore di spostamento $\mathbf{u}$ è perpendicolare al piano $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$ un semplice calcolo mediante le formule (123,1) e (123,6) dà le seguenti espressioni per il campo dell'onda diffusa:

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= e^{ikR_0}\frac{\omega^2 E_0}{4\pi R_0 c^2}\frac{a_1 iV}{4}\, qu_0 \cos\frac{\vartheta}{2}\, e_{\perp}, \\ E'_{\perp} &= e^{ikR_0}\frac{\omega^2 E_0}{4\pi R_0 c^2}\frac{a_1 iV}{4}\, qu_0 \cos\frac{\vartheta}{2}\, e_{\parallel} \end{aligned} \tag{123,7}$$

(ϑ, come ovunque, è l'angolo fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$, e gli indici $\parallel$ e $\perp$ denotano le componenti vettoriali nel piano della diffusione e perpendicolarmente ad esso). I coefficienti di proporzionalità in ambedue queste formule contengono la stessa grandezza di fluttuazione u_0. Ciò vuol dire che per diffusione non avviene la depolarizzazione, ossia la luce polarizzata linearmente (anche se in un altro piano).

Data la totale coincidenza dei coefficienti nelle formule (123,7), il coefficiente d'estinzione dh è indipendente dagli stati di polarizzazione della luce incidente e vale

$$dh = \left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2}\right)^2 V\,|\,u_0\,|^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2}\,do. \qquad (123,8)$$

Resta da determinare il quadrato medio dell'ampiezza dello spostamento di fluttuazione u_0.

Dal punto di vista della teoria delle fluttuazioni termodinamiche si può considerare l'onda acustica (123,4) come l'insieme di due (onde propagantisi a destra e a sinistra) oscillatori classici ciascuno dei quali deve godere di energia cinetica media $T/2$. Siccome la frequenza di oscillazioni in questo caso è $\Omega = u_t q$, l'energia cinetica media vale

$$\frac{1}{2} V \langle \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \rangle = \frac{1}{4} V \rho\,(u_t q)^2 \langle |\,u_0\,|^2 \rangle.$$

Uguagliando questa espressione a $2 \cdot T/2$, otteniamo

$$\langle |\,u_0\,|^2 \rangle = \frac{4T}{V \rho u_t^2 q^2}. \qquad (123,9)$$

Infine, sostituendo la (123,9) nella (123,8) abbiamo

$$dh = \frac{a_1^2 \omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2 \rho} \cos^2\frac{\vartheta}{2}\,do. \qquad (123,10)$$

Sottolineiamo quanto la dipendenza angolare della diffusione sia assolutamente differente da quella che abbiamo avuto nel caso dei fluidi e dei gas.

Passiamo ora alla diffusione sulle onde acustiche longitudinali. In queste onde $\mathbf{u} \parallel \mathbf{q}$, e mediante le formule (123,3) e (123,4) troviamo

$$\mathbf{G} = \frac{iV}{2} u_0 q \left\{ a_1 \frac{\mathbf{q}\,(\mathbf{q}\mathbf{e})}{q^2} + a_2 \mathbf{e} \right\} E_0.$$

Dopo un semplice calcolo troviamo il campo dell'onda diffusa:

$$E_{\perp} = \frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2} \frac{iVu_0 q}{2} a_2 E_0 e_{\perp},$$
$$E_{\parallel} = \frac{e^{ikR_0}\omega^2}{4\pi R_0 c^2} \frac{iVu_0 q}{2} \left[\frac{a_1}{2} + \left(\frac{a_1}{2} + a_2\right) \cos\vartheta\right] E_0 e_{\parallel}. \tag{123,11}$$

Anche in questo caso non avviene la depolarizzazione per diffusione. Ma la distribuzione angolare e la grandezza del coefficiente d'estinzione dipendono dallo stato e dalla direzione della polarizzazione della luce incidente. Non scriviamo qui i calcoli corrispondenti assai complicati che sono analoghi a quelli precedenti e osserviamo soltanto che l'espressione per $\langle | u_0 |^2 \rangle$ differisce per la sola sostituzione di u_t con u_l nella (123,9).

Capitolo XVI

DIFFRAZIONE DEI RAGGI X NEI CRISTALLI

§ 124. Teoria generale della diffrazione dei raggi X

Il fenomeno di diffrazione dei raggi X nei cristalli occupa un posto particolare nell'elettrodinamica dei mezzi materiali poiché la loro lunghezza d'onda è comparabile con le distanze interatomiche. Questa è la ragione per cui il trattamento macroscopico ordinario della sostanza come mezzo continuo qui è assolutamente inapplicabile, e dobbiamo partire dalla considerazione della diffusione su particelle cariche (elettroni) separate [1].

Le frequenze dei moti degli elettroni nell'atomo sono dell'ordine di grandezza $\omega_0 \sim v/a$, ove v è la velocità degli elettroni e a le dimensioni atomiche. Se $\lambda \sim a$, allora in virtù di $v \ll c$ queste frequenze sono piccole rispetto alla frequenza dei raggi X $\omega \sim c/\lambda$. Questa circostanza permette di scrivere l'equazione del moto degli elettroni nel campo dell'onda elettromagnetica nella forma

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \tag{124,1}$$

considerando cioè gli elettroni come liberi (cfr. § 78).

Dall'equazione (124,1) ricaviamo la velocità acquisita dall'elettrone sotto influsso del campo dell'onda

$$\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega.$$

Indichiamo con n (**r**) la densità del numero di elettroni nel cristallo la cui media è calcolata rispetto allo stato elettronico quantistico meccanico e rispetto alla distribuzione statistica del moto termico dei nuclei nel reticolo cristallino. Sottolineiamo, tuttavia, che qui non è calcolata la media ordinaria nella teoria macroscopica rispetto ad elementi di volume fisicamente infinitesimi, vale a dire che n (**r**) è la vera e propria densità elettronica quanto-meccanica nel reticolo cristallino. La corrispondente densità di corrente creata dal campo dell'onda è

$$\mathbf{j}' = en\mathbf{v}' = \frac{ie^2n}{m\omega}\mathbf{E}. \tag{124,2}$$

---

[1]) La diffusione sui nuclei è inessenziale, ovviamente, in virtù della grande massa di questi ultimi.

Introduciamo questa corrente nelle equazioni di Maxwell microscopiche:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \tag{124,3}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}' = -\frac{i\omega}{c}\left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right)\mathbf{E}. \tag{124,4}$$

Con ciò teniamo conto del suo influsso inverso sul campo, cioè dell'effetto di diffusione. In questo caso, ovviamente, è supposto che questo effetto sia piccolo, cioè che si verifichi la disuguaglianza

$$\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \ll 1. \tag{124,5}$$

Mediante l'introduzione della notazione $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ ove

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \tag{124,6}$$

ossia la notazione corrispondente alla solita definizione di induzione, l'equazione (124,4) si riduce alla forma ordinaria $\operatorname{rot}\mathbf{H} = -(i\omega/c)\,\mathbf{D}$. In questo senso l'espressione (124,6) per la permettività dielettrica (cfr. la (78,1)) può essere usata anche nel caso di lunghezze d'onda $\lambda \sim a$. È evidente in questo caso che il significato letterale delle grandezze $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ che qui figurano non coincide con quello precedente poiché esse sono riferite al campo e non alla sua media rispetto a volumi infinitamente infinitesimi. Ciò premesso, ε rappresenta ora funzione delle coordinate.

Per la diffusione dei raggi X su atomi pesanti può verificarsi un caso quando la condizione $\omega \gg \omega_0$ è soddisfatta per i gusci elettronici esterni e, al tempo stesso, non soddisfatta per gli elettroni interni per i quali $\omega \lesssim \omega_0$ e si verifica rispettivamente la disuguaglianza $\lambda \gg a$. Anche in questo caso può essere introdotta la nozione di permettività dielettrica (come coefficiente di proporzionalità fra $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$), ma allora un'espressione della forma (124,6) non determina quindi che il solo contributo in essa proveniente dagli elettroni esterni. Quanto al contributo degli elettroni interni, esso deve essere calcolato in linea di massima mediante la media rispetto al volume di questi gusci. In tal modo, se si scrive nella forma generale $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ con ε dipendente dalle coordinate, si tiene conto automaticamente di tutti i casi possibili. Per fissare le idee, più avanti ricorremo ovunque all'espressione (124,6).

Calcolando nella (124,2) la media della densità elettronica e ottenendo come risultato una funzione n (r) indipendente dal tempo, con ciò escludiamo la variazione possibile della frequenza per diffusione. In altre parole, consideriamo una diffusione a rigore coerente senza variazione della frequenza.

Escludendo **H** dalle due equazioni (124,3) e (124,4) otteniamo

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}=\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}$$

Sostituendovi

$$\mathbf{E}=\mathbf{D}+\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E}$$

sviluppando l'espressione rot rot **E** e tenendo conto che div $\mathbf{D}=0$ (come ciò risulta dalla formula (124,4)), otteniamo

$$\Delta\mathbf{D}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}=\mathrm{rot\,rot}\,\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\mathbf{E}. \qquad (124,7)$$

A secondo membro di questa equazione, già contenente la piccola grandezza $4\pi e^2 n/m\omega^2$, si deve intendere con **E** il campo assegnato dell'onda incidente. Cerchiamo la soluzione dell'equazione (124,7) nello spazio esterno al cristallo diffondente a grandi distanze da quest'ultimo. Poiché questa equazione coincide formalmente con l'equazione (117,3), possiamo scrivere immediatamente la soluzione cercata per analogia con l'espressione (117,4) [1]:

$$\mathbf{E}=\frac{e^2}{m\omega^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}[\mathbf{k}'[\mathbf{k}'\mathbf{E}_0]]\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV. \qquad (124,8)$$

Qui R_0 è la distanza dall'origine delle coordinate sita all'interno del cristallo al punto di osservazione del campo; $\mathbf{q}=\mathbf{k}'-\mathbf{k}$; $k=k'=\omega/c$; $\mathbf{E}_0$ è l'ampiezza dell'onda incidente; a primo membro dell'uguaglianza scriviamo **E** al posto di **D** in quanto nel vuoto all'esterno del corpo $\mathbf{D}=\mathbf{E}$.

Per caratterizzare l'intensità della diffrazione dei raggi X introduciamo la *sezione efficace* (o semplicemente la *sezione*) σ definita come rapporto fra intensità della radiazione diffratta nell'angolo solido do' e densità del flusso di energia nell'onda incidente. Secondo la formula (124,8) abbiamo

$$d\sigma=\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\mathrm{sen}^2\,\theta\left|\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV\right|^2 do' \qquad (124,9)$$

ove θ è l'angolo fra $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{k}'$. Se i raggi incidenti sono « naturali » (e non polarizzati) il fattore $\mathrm{sen}^2\,\theta$ in questa formula si sostituisce

[1]) Nel § 117 nel risolvere l'equazione (117,3) era impossibile considerare il campo all'esterno del corpo poiché ciò chiederebbe di tener conto delle condizioni di frontiera sulla sua superficie in quanto il primo membro dell'equazione conteneva la grandezza ε' diversa all'interno e all'esterno del corpo. Il primo membro dell'equazione (124,7), invece, non cambia di forma in tutto lo spazio.

con $1/2\,(1+\cos^2\vartheta)$, ove ϑ è l'angolo fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ (cfr. la nota a pag. 600):

$$d\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)\left|\int ne^{-i\mathbf{qr}}\,dV\right|^2 do'. \qquad (124,10)$$

Per fissare le idee, più avanti supporremo proprio questo caso.

Si vede che l'intensità dei raggi diffratti in una direzione assegnata è definita essenzialmente dal quadrato del modulo dell'integrale

$$\int ne^{-i\mathbf{qr}}dV, \qquad (124,11)$$

cioè dalla componente di Fourier spaziale della densità elettronica. Per $\mathbf{q}\to 0$ questo integrale si riduce semplicemente alla media della densità elettronica rispetto al volume del cristallo $\bar{n}$ (cioè rispetto alla sua cella elementare). Ma se nelle equazioni (124,3-4) sostituiamo n con $\bar{n}$, otteniamo le equazioni di Maxwell macroscopiche ordinarie con la permettività dielettrica

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2\bar{n}}{m\omega^2}.$$

Secondo queste equazioni i raggi X nel passare attraverso il cristallo saranno rifratti secondo leggi ordinarie (con l'indice di rifrazione $\sqrt{\varepsilon}$). In tal modo, la diffrazione per piccoli angoli conduce a una rifrazione ordinaria che qui non presenta nessun interesse. Supporremo più avanti che $\mathbf{q}$ sia notevolmente diverso da zero.

La densità elettronica (come qualsiasi altra funzione del punto nel reticolo cristallino) può essere sviluppata in serie di Fourier della forma

$$n=\sum_{\mathbf{b}} n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}} \qquad (124,12)$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i periodi $\mathbf{b}$ del reticolo inverso (cfr. V § 133). Sostituendo la (124,12) nella (124,11) e integrando rispetto al volume del cristallo si ottiene un risultato sensibilmente diverso da zero per i soli valori $\mathbf{q}$ vicini a uno dei $\mathbf{b}$. Negli intervalli fra questi valori l'intensità è praticamente nulla. Ciò premesso, è possibile considerare ciascuno dei massimi di diffrazione separatamente ponendo in questo caso $n=n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}}$ con $\mathbf{b}$ assegnato. Sostituendo questa espressione nella formula (124,10) abbiamo

$$d\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1+\cos^2\vartheta)\,|n_{\mathbf{b}}|^2\left|\int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\mathbf{r}}\,dV\right|^2 do'. \qquad (124,13)$$

I massimi più intensi compaiono nelle direzioni in cui si verifica l'uguaglianza precisa

$$\mathbf{k}'-\mathbf{k}=\mathbf{b} \qquad (124,14)$$

(*equazione di Laue*); questi massimi si dicono *principali*. Per **b** assegnato il massimo principale può essere realizzato, tuttavia, non per direzione (frequenza) qualsiasi dei raggi incidenti. Scrivendo l'uguaglianza (124,14) nella forma $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{b}$, elevandola al quadrato e tenendo conto che $k^2 = k'^2$, otteniamo

$$2\,\mathbf{bk} = -b^2. \qquad (124,15)$$

Questa equazione definisce quei valori del vettore d'onda **k** per i quali sono possibili massimi principali con valore assegnato **b**. Dal punto di vista geometrico la (124,15) è un'equazione del piano nello spazio **k**, perpendicolare al vettore **b** e sito a distanza $b/2$ dall'origine delle coordinate. Si vede, in particolare, che deve essere necessariamente $k \geqslant b/2$.

Siccome $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}$, dall'uguaglianza (124,14) segue che

$$2k \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2} = b, \qquad (124,16)$$

ciò che definisce l'angolo di diffrazione nel massimo principale (*equazione di Bragg-Wulf*).

Come è noto, ogni vettore **b** del reticolo inverso determina una famiglia di piani cristallini in base alle equazioni $\mathbf{rb} = 2\pi m$, ove il numero m assume valori interi. Questi piani sono perpendicolari alla direzione del vettore **b** e rispetto a essi i vettori **k** e **k'** (soddisfacenti alla condizione (124,14)) sono diretti sotto gli stessi angoli « di incidenza » e di « riflessione » (fig. 64). In relazione a ciò talvolta con diffrazione nel massimo principale intendono la riflessione dai piani cristallini corrispondenti.

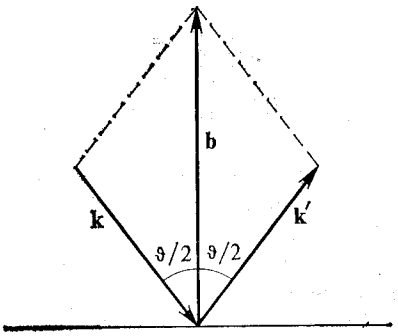


Fig. 64

L'intensità totale della *macchia di diffrazione* in prossimità di uno dei massimi si ottiene integrando l'espressione (124,13) rispetto agli angoli solidi in prossimità della direzione corrispondente **k'**. Determiniamo l'intensità totale in prossimità del massimo principale.

Indichiamo con $\mathbf{k}'_0$ il valore **k'** corrispondente al soddisfacimento esatto della condizione di Laue (per **k** assegnato): $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + \mathbf{b}$. Introduciamo anche $\varkappa = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$. Nell'intorno del massimo $\varkappa$ è piccolo e, poiché **k'** e $\mathbf{k}'_0$ differiscono unicamente per direzione,

$\varkappa \perp \mathbf{k}_0'$. Perciò l'elemento di angolo solido si può scrivere nella forma

$$do' = \frac{1}{k'^2}\, d\varkappa_x\, d\varkappa_y = \frac{1}{k^2}\, d\varkappa_x\, d\varkappa_y, \qquad (124,17)$$

ove l'asse z coincide con la direzione $\mathbf{k}_0'$. In tal modo abbiamo

$$\sigma = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\,|\,n_b\,|^2 \int\int d\varkappa_x\, d\varkappa_y \left|\int e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\, dV\right|^2.$$

Nell'integrale di volume si può integrare rispetto a dz poiché $e^{-i\varkappa\mathbf{r}}$ non dipende da questa coordinata:

$$\int e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\, dV = \int Z e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\, df,$$

ove $df = dx\, dy$ e $Z = Z(x, y)$ è la lunghezza del corpo considerato nella direzione $\mathbf{k}_0'$. Infine, ricorriamo alla seguente formula della teoria degli integrali di Fourier:

$$\int |\,\varphi_\varkappa\,|^2 \frac{d\varkappa_x\, d\varkappa_y}{(2\pi)^2} = \int \varphi^2\, dx\, dy, \qquad (124,18)$$

ove

$$\varphi_\varkappa = \int \varphi(x, y)\, e^{-i\varkappa\mathbf{r}}\, dx\, dy$$

sono le componenti dello sviluppo di Fourier bidimensionale. Come risultato otteniamo infine la seguente formula:

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\,|\,n_b\,|^2 \int Z^2\, df =$$
$$= \frac{8\pi^2}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2}\,(1+\cos^2\vartheta)\,|\,n_b\,|^2 \int Z^2\, df. \qquad (124,19)$$

L'integrale che qui figura è dell'ordine di grandezza di L^4, ove L sono le dimensioni lineari del corpo. In tal modo, la sezione totale della diffrazione (o, che è lo stesso, l'intensità totale della macchia di diffrazione) è proporzionale a $V^{4/3}$, ove V è il volume del corpo. È da notare che l'intensità nel massimo stesso è proporzionale ad un'altra potenza del volume: per $\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{b}$ l'integrale nella formula (124,13) è semplicemente V in modo che $d\sigma$ è proporzionale a V^2, ossia

$$\left(\frac{d\sigma}{do'}\right)_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\,|\,n_b\,|^2 V^2. \qquad (124,20)$$

Il fatto che l'intensità nel massimo è proporzionale a una potenza più elevata di V che l'intensità totale illustra evidentemente la nettezza del massimo. La larghezza di quest'ultimo è proporzionale, probabilmente, a $V^{4/3}/V^2 = V^{-2/3}$.

La teoria qui trattata è applicabile alla sola condizione che tutto l'effetto della diffrazione sia piccolo. Come si vede, questa ipotesi sottomette le dimensioni del cristallo a una determinata condizione. E precisamente, σ deve essere piccola rispetto all'area geometrica della sezione del corpo ($\sim L^2$) e di qui

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{L}{k}\,|\,n_{\mathbf{b}}\,| \ll 1. \qquad (124,21)$$

Se questa condizione è violata, l'approssimazione della teoria delle perturbazioni diviene inapplicabile per la deduzione della formula (124,8) [1].

Problemi

1. Determinare la distribuzione dell'intensità nella macchia di diffrazione attorno al massimo principale per diffrazione su un cristallo avente la forma del parallelepipedo retto con lunghezze dei lati L_x, L_y, L_z.

Soluzione. Introduciamo, come nel testo, il vettore $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$ e un sistema di coordinate con gli assi paralleli agli spigoli del parallelepipedo e origine nel suo centro.

L'integrale $\int e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}}\,dV$ si scompone in prodotto di tre integrali della forma

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{-i\varkappa x}\,dx = \frac{2}{\varkappa}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varkappa L}{2}\,.$$

In tal modo,

$$d\sigma = 32\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\,\frac{|\,n_{\mathbf{b}}\,|^2}{\varkappa_x^2\varkappa_y^2\varkappa_z^2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\varkappa_x L_x}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\varkappa_y L_y}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\varkappa_z L_z}{2}\,do'.$$

Si deve tener conto che le componenti del vettore $\boldsymbol{\varkappa}$ non sono indipendenti ma legate dalla condizione $\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{k}_0' = 0$.

2. Risolvere il problema 1 per diffrazione su un cristallo sferico di raggio a.

Soluzione. Introduciamo di nuovo $\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$ e consideriamo un sistema di coordinate con l'asse z coincidente con la direzione $\boldsymbol{\varkappa}$ (e con origine al centro della sfera). Abbiamo

$$\int e^{-i\varkappa z}\,dV = \int_{-a}^{a} (a^2 - z_2)\,e^{-i\varkappa z}\,dz = \frac{4\pi}{\varkappa^3}\,(\mathrm{sen}\,\varkappa a - \varkappa a\cos\varkappa a).$$

In tal modo,

$$d\sigma = 8\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1+\cos^2\vartheta)\,|\,n_{\mathbf{b}}\,|^2\,\frac{1}{\varkappa^6}\,(\mathrm{sen}\,\varkappa a - \varkappa a\cos\varkappa a)^2\,do'.$$

---

[1]) Per *teoria dinamica* della diffusione esente dalla condizione limitativa (124,21) si veda il libro di *Pinsker Z. G.* — Teoria dinamica della diffusione dei raggi X nei cristalli (edizione russa), Mosca, Nauka, 1974. La teoria esposta precedentemente si chiama *cinematica*.

3. Determinare l'intensità totale della macchia di diffrazione attorno a un massimo ausiliare.

Soluzione. In questo caso il vettore d'onda **k** dell'onda incidente non soddisfa alla condizione (124,15). Come è stato sottolineato nel testo, la (124,15) è un'equazione del piano perpendicolare al vettore **b**; indichiamo un piccolo spostamento dell'estremo del vettore **k** da questo piano con $\eta\mathbf{b}$, ove $\eta \ll 1$. In altre parole, rappresentiamo **k** nella forma $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta\mathbf{b}$, ove $\mathbf{k}_0$ verifica l'equazione (124,15) (fig. 65).

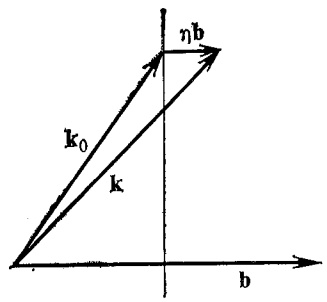


Fig. 65

All'intensità massima nella macchia di diffrazione corrisponde una direzione **k'** tale per cui la differenza $\mathbf{k}' - (\mathbf{k} + \mathbf{b})$ abbia un minimo (in modo che l'integrale nella formula (124,13) è massimo). Ma il valore assoluto della differenza di due vettori (fra cui uno ha direzione qualsiasi) assume un minimo quando le direzioni di questi vettori coincidono. Perciò abbiamo (tenendo conto che $k' = k$)

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} = k - |\mathbf{k} + \mathbf{b}| = \frac{k^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{b})^2}{k + |\mathbf{k} + \mathbf{b}|}.$$

Poiché **k** è vicino a $\mathbf{k}_0$ e consideriamo un dominio in prossimità del massimo, allora $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k} + \mathbf{b}$ e il denominatore nell'espressione scritta si può sostituire con $2k$. Al numeratore, invece, sviluppiamo la parentesi e otteniamo

$$-2\mathbf{k}\mathbf{b} - \mathbf{b}^2 = (-2\mathbf{k}_0\mathbf{b} - \mathbf{b}^2) - 2\eta\mathbf{b}^2 = -2\eta b^2.$$

Quindi,

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} \approx -\eta b^2 / k.$$

In seguito, introduciamo $\varkappa$ in base alla relazione

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k} + \mathbf{b})\left(1 - \frac{\eta b^2}{k^2}\right) + \varkappa$$

e, considerando l'asse z coincidente con la direzione $\mathbf{k} + \mathbf{b}$, riduciamo il problema al calcolo dell'integrale (si veda la deduzione della formula (124,19))

$$\int d\varkappa_x d\varkappa_y \left| \int \exp\left(i\frac{\eta b^2}{k} z - i\varkappa\mathbf{r}\right) dV \right|^2 = \int d\varkappa_x d\varkappa_y \left| \int e^{-i\varkappa\mathbf{r}} \frac{\operatorname{sen}(\eta b^2 Z/2k)}{\eta b^2/2k} df \right|^2.$$

Infine, ricorrendo alla formula (124,18), otteniamo

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)|n_{\mathbf{b}}|^2 \int \frac{\operatorname{sen}^2(\eta b^2 Z/2k)}{(\eta b^2/2k)^2} df.$$

Per $\eta \to 0$ questa formula si trasforma nella (124,19). Se invece $\eta b^2 Z/2k \gg 1$ (ciò che non contraddice la condizione $\eta \ll 1$), allora il quadrato del seno va sostituito con la sua media 1/2 e si ottiene

$$\sigma = 4\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2\vartheta}{\eta^2 b^4} |n_{\mathbf{b}}|^2 S,$$

ove S è l'area della proiezione (dell'« ombra ») del corpo sul piano xy.

§ 125. Intensità integrale

Le formule ottenute nel paragrafo precedente determinano l'intensità della diffrazione per incidenza sul cristallo di un'onda a rigore monocromatica e a rigore piana. Consideriamo ora alcuni casi in cui queste condizioni non sono soddisfatte.

Cominciamo dal caso in cui l'onda incidente è piana ma non monocromatica [1]). In altre parole, il suo sviluppo spettrale contiene onde con vettori d'onda $\mathbf{k}$ identici per direzione ma diversi in modulo $k = \omega/c$. Indichiamo con $\rho(k)$ la densità della distribuzione dell'intensità della radiazione incidente rispetto alle frequenze e normalizzata per unità dalla condizione $\int \rho(k)\, dk = 1$.

L'intensità totale della macchia di diffrazione è determinata dalla sezione che si ottiene integrando l'espressione (124,13) rispetto a do' e a $\rho(k)\, dk$:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 \int\int \left| \int e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\mathbf{r}}\, dV \right|^2 \times$$
$$\times (1+\cos^2\vartheta)\, \rho(k)\, do'\, dk. \qquad (125,1)$$

Introduciamo per il momento la notazione $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}$ e scriviamo il quadrato del modulo nella forma dell'integrale doppio

$$\left| \int e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}}\, dV \right|^2 = \int\int e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\, dV_1\, dV_2.$$

Introducendo al posto di $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ le variabili $1/2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e integrando rispetto alle prime variabili sul volume del corpo, otteniamo

$$\left| \int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\, dV \right|^2 = V \int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\, dV.$$

Nell'integrale restante si può ora integrare rispetto a tutte le variabili nei limiti infiniti [2]); come risultato troviamo

$$\left| \int e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}}\, dV \right|^2 = (2\pi)^3 V \delta(\mathbf{K}). \qquad (125,2)$$

Sostituendo questo risultato nella formula (125,1), riscriviamo quest'ultima così:

$$\sigma = 4\pi^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V (1+\cos^2\vartheta_0) \int\int \delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b})\, \rho(k)\, do'\, dk; \qquad (125,3)$$

---

[1]) Questo caso corrisponde al noto *metodo di Laue* dell'analisi strutturale dei cristalli con i raggi X.

[2]) Ciò è possibile fare in quanto ci proponiamo di calcolare la sola intensità totale della macchia di diffrazione e non la sua larghezza.

poiché nell'espressione integranda figura la funzione δ abbiamo portato fuori il fattore $1 + \cos^2 \vartheta$ sostituendolo con il valore per $\vartheta = \vartheta_0$, ove ϑ_0 è l'angolo fra i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ soddisfacenti alle condizioni di Laue (indichiamoli con $\mathbf{k}_0$ e $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{b}$).

È comodo eseguire l'integrazione rispetto a do' osservando che essa è equivalente a quella rispetto a

$$d^3k' = k'^2\, dk'\, do' = {}^1/_2 k' d\,(k'^2)\, do'$$

a condizione che nell'espressione integranda sia introdotto il fattore supplementare $(2/k)\,\delta\,(k'^2 - k^2)$. Quindi, l'integrale nell'espressione (125,3) va sostituito con

$$\int\int \frac{2}{k}\,\delta\,(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b})\,\delta\,(k'^2 - k^2)\,\rho\,(k)\, d^3k'\, dk.$$

Integrando rispetto a d^3k' mediante la prima funzione δ, dobbiamo sostituire nella seconda k'^2 con $(\mathbf{k} + \mathbf{b})^2$ e come risultato otteniamo

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\, n_{\mathbf{b}} \,|^2\, V\,(1 + \cos^2 \vartheta_0) \int \frac{1}{k}\,\delta\,(2\mathbf{bk} + b^2)\,\rho\,(k)\, dk. \tag{125,4}$$

Infine, eseguiamo l'ultima integrazione rispetto a dk (per direzione assegnata $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$). L'argomento della funzione δ si annulla per $k = k_0$ e l'integrale vale

$$\frac{\rho\,(k_0)}{2k_0}\,\frac{1}{|\,\mathbf{bn}\,|} = \frac{\rho\,(k_0)}{2\,|\,\mathbf{bk}_0\,|} = \frac{\rho\,(k_0)}{b^2}.$$

Quindi, otteniamo infine

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\, n_{\mathbf{b}} \,|^2\, V\,(1 + \cos^2 \vartheta_0)\,\frac{\rho\,(k_0)}{b^2}. \tag{125,5}$$

Consideriamo ora un altro caso in cui l'onda incidente è monocromatica ma contiene le componenti con diverse direzioni $\mathbf{k}$ che si ottengono l'una dall'altra per rotazione a un certo asse [1]). Il vettore unitario lungo la direzione di quest'ultimo indichiamo con $\mathbf{l}$ e l'angolo di rotazione attorno a questo asse con ψ. Supponiamo che la funzione $\rho\,(\psi)$ dia la distribuzione dell'intensità della radiazione incidente secondo gli angoli normalizzata all'unità:

$$\int_0^{2\pi} \rho\,(\psi)\, d\psi = 1.$$

Tutti i calcoli che hanno portato alla formula (125,4) si riferiscono completamente anche a questo caso con la sola differenza che l'in-

[1]) Questo caso corrisponde al noto *metodo di Bragg* (o al *metodo di rotazione*) dell'analisi strutturale con i raggi X quando si tratta non della rotazione della direzione $\mathbf{k}$, bensì della rotazione del cristallo stesso attorno all'asse $\mathbf{l}$.

tegrazione rispetto a $\rho(k)\,dk$ va sostituita con quella rispetto a $\rho(\psi)\,d\psi$:

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\mathbf{b}}|^2 V (1+\cos^2\vartheta_0) \int \frac{1}{k}\,\delta(2\mathbf{bk}+b^2)\,\rho(\psi)\,d\psi. \tag{125,6}$$

Indichiamo di nuovo con $\mathbf{k}_0$ il valore $\mathbf{k}$ per il quale si annulla l'argomento della funzione δ e calcoliamo a partire dal piano $\mathbf{l}$, $\mathbf{k}_0$. Per ψ piccoli abbiamo

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + [\mathbf{lk}_0]\,\psi.$$

Allora l'integrale nell'espressione (125,6) assume la forma

$$\int \frac{1}{k}\,\delta(2\mathbf{b}\,[\mathbf{lk}_0]\,\psi)\,\rho(\psi)\,d\psi = \frac{\rho(0)}{2k\,|\,\mathbf{b}\,[\mathbf{lk}_0]\,|} =$$

$$= \frac{\rho(0)}{2k^2\,|\,\mathbf{b}\,[\mathbf{ln}_0]\,|} = \frac{2\rho(0)\,\mathrm{sen}^2\dfrac{\vartheta_0}{2}}{b^2\,|\,\mathbf{b}\,[\mathbf{ln}_0]\,|}.$$

Quindi,

$$\sigma = \frac{2\,(2\pi)^3}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \mathrm{sen}^2\frac{\vartheta_0}{2}\,(1+\cos^2\vartheta_0)\,|\,n_{\mathbf{b}}\,|^2 V \frac{\rho(0)}{|\,\mathbf{b}\,[\mathbf{ln}_0]\,|}. \tag{125,7}$$

Infine, consideriamo la diffrazione dell'onda piana monocromatica da un corpo che rappresenta l'insieme di cristallini caoticamente orientati [1]).

Indichiamo con $\mathbf{k}_0'$ e $\mathbf{b}_0$ i vettori $\mathbf{k}'$ e $\mathbf{b}$ diretti in modo tale da soddisfare la condizione di Laue $\mathbf{k}_0' = \mathbf{k} + \mathbf{b}_0$. Le direzioni $\mathbf{k}_0'$ e $\mathbf{b}_0$ non sono univoci poiché la condizione di Laue, ovviamente, continua ad essere soddisfatta per qualsiasi rotazione del triangolo $\mathbf{kb}_0\mathbf{k}_0'$ attorno alla direzione $\mathbf{k}$. In tal modo, al massimo principale corrispondono le direzioni $\mathbf{k}'$ che descrivono una superficie conica con angolo $2\vartheta_0$ al vertice; al posto della macchia di diffrazione avremo ora l'anello di diffrazione.

La sezione totale cercata è definita da una formula che differisce dalla (125,4) per la sola sostituzione dell'integrazione rispetto a $\rho(k)\,dk$ con il calcolo della media lungo le direzioni $\mathbf{b}$, cioè

$$\sigma = (2\pi)^3 V \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\,n_{\mathbf{b}}\,|^2 (1+\cos^2\vartheta_0) \int \frac{1}{k}\,\delta(2\mathbf{bk}+b^2)\,\frac{do_{\mathbf{b}}}{4\pi} \tag{125,8}$$

[1]) Questo caso corrisponde al *metodo delle polveri* (*metodo di Debye-Scherrer*) dell'analisi strutturale con i raggi X.

(do_b è l'elemento di angolo solido nella direzione **b**). Indicando l'angolo fra **k** e **b** mediante α, scriviamo l'integrale nella (125,8) nella forma

$$\int \frac{1}{k}\,\delta\,(2bk\cos\alpha + b^2)\,\frac{2\pi d\cos\alpha}{4\pi} = \frac{1}{4bk^2} = \frac{1}{b^3}\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\vartheta_0}{2}\,.$$

Quindi,

$$\sigma = (2\pi)^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\,n_b\,|^2\,\frac{V}{b^3}\,(1+\cos^2\vartheta_0)\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\vartheta_0}{2}\,. \qquad (125,9)$$

Ciascuno dei tre casi considerati corrisponde a un determinato modo di calcolo della media del quadro di diffrazione. È da notare che la dipendenza della media dell'intensità totale della diffrazione dal volume del corpo si riduce in questo caso, come si doveva aspettare, a una semplice proporzionalità. Ricordiamo che nel quadro senza media la dipendenza dell'intensità e della sua distribuzione sulla macchia di diffrazione dal volume è più pronunciata.

§ 126. *Diffusione termica diffusa dei raggi* X

Nei due paragrafi precedenti abbiamo inteso con $n\,(x,\,y,\,z)$ la densità elettronica nel cristallo la cui media è stata calcolata rispetto al tempo. Con ciò da essa scomparivano le oscillazioni della densità causate da diverse ragioni e con esse anche la parte corrispondente (incoerente) della diffusione dei raggi X. Una delle sorgenti della diffusione incoerente sono le fluttuazioni termiche della densità. Questa diffusione è distribuita in modo diffuso in tutte le direzioni, ma la sua caratteristica singolare sta in intensità relativamente grande in prossimità delle direzioni corrispondenti a righe ben pronunciate della diffusione strutturale studiata nei paragrafi precedenti. Consideriamo ora questi massimi della diffusione termica (*W.H. Zachariasen*, 1940).

Le oscillazioni termiche del reticolo cristallino rappresenteremo sviluppate in onde acustiche separate. Come si vedrà più avanti, alla creazione dei massimi suindicati della diffusione termica partecipano onde con lunghezze grandi (rispetto alla costante del reticolo). La variazione della densità elettronica provocata da questa onda si può considerare in ciascun punto dello spazio come risultato di una semplice traslazione del reticolo per un valore uguale al valore locale del vettore di spostamento **u** nell'onda. In tal modo, il cambiamento della densità (e non della sua media rispetto al tempo) per il passaggio di un'onda acustica assegnata si può esprimere in funzione della densità media nel seguente modo:

$$\delta n = n\,(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - n\,(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{u}\,\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}\,.$$

Considerando la diffusione diffusa in prossimità di una determinata riga è necessario sostituire n con $n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}}$ con vettore $\mathbf{b}$ assegnato in modo che

$$\delta n = -i\,(\mathbf{bu})\,n_{\mathbf{b}}e^{i\mathbf{br}}. \tag{126,1}$$

La dispersione sulle fluttuazioni della densità, ovviamente, non è coerente alla diffusione sulla densità media e, quindi, non interferisce con essa. Per questa ragione la sezione della diffusione diffusa si può trovare tramite la formula (124,10) sostituendovi δn al posto di n e calcolando in seguito la media statistica rispetto alle fluttuazioni:

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\,n_{\mathbf{b}}\,|^2\,(1+\cos^2\vartheta)\left\langle\left|\int(\mathbf{ub})\,e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV\right|^2\right\rangle do', \tag{126,2}$$

ove abbiamo introdotto la notazione $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}$. L'intensità della diffusione è grande nelle direzioni per le quali il vettore $\mathbf{K}$ è piccolo ($K \ll b$).

L'integrale $\int \mathbf{u}e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV$ separa da $\mathbf{u}$ la componente di Fourier spaziale con il vettore d'onda $\mathbf{K}$; perciò possiamo intendere con $\mathbf{u}$ semplicemente vettore di spostamento nell'onda acustica con questo vettore d'onda. La disuguaglianza $K \ll b$ significa, di conseguenza, che la lunghezza dell'onda acustica diffondente è grande rispetto alle dimensioni della cella elementare del cristallo.

Scriviamo quindi

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{u}_0e^{i\mathbf{Kr}} + \mathbf{u}_0^*e^{-i\mathbf{Kr}}), \tag{126,3}$$

in modo che

$$\int(\mathbf{bu})\,e^{-i\mathbf{Kr}}\,dV = \frac{1}{2}V\,\mathbf{bu}_0$$

e la sezione è

$$d\sigma = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |\,n_{\mathbf{b}}\,|^2\,(1+\cos^2\vartheta)\,b_ib_k\,\langle u_{0i}u_{0k}\rangle\,V^2\,do'. \tag{126,4}$$

Il calcolo della media dei prodotti di componenti $\mathbf{u}_0$ è analogo a quello eseguito nel § 123 per un'onda acustica nel mezzo isotropo. L'energia elastica dell'unità di volume del cristallo deformato è data dall'espressione

$$^1/_2\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm},$$

ove u_{ik} è il tensore di deformazione e λ_{iklm} il tensore dei moduli di elasticità (cfr. VII § 10). Perciò l'energia elastica media di tutto il cristallo vale

$$^1/_2V\lambda_{iklm}\,\langle u_{ik}u_{lm}\rangle.$$

Sostituiamo qui

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\{(iK_k u_{0i}+iK_i u_{0k})\,e^{i\mathbf{Kr}}\}.$$

I termini contenenti i fattori $e^{\pm 2i\mathbf{Kr}}$ si annullano nel calcolare la media. Tenendo anche conto delle proprietà di simmetria del tensore λ_{iklm} (simmetria rispetto agli indici ik e lm e rispetto alla permutazione della coppia ik con la coppia lm) otteniamo

$$\frac{V}{4}\lambda_{iklm}K_k K_m\langle u_{0i}u_{0l}^*\rangle=\frac{V}{4}g_{ik}\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle,$$

ove è stata introdotta la notazione

$$g_{ik}=\lambda_{ilkm}K_l K_m. \tag{126,5}$$

In accordo con la teoria generale delle fluttuazioni termodinamiche ora è possibile scrivere immediatamente per le medie cercate quanto segue [1]):

$$\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle=\frac{4T}{V}g_{ik}^{-1} \tag{126,6}$$

(g_{ik}^{-1} è il tensore inverso di g_{ik}), e otteniamo infine la sezione di diffusione

$$d\sigma=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 TV\,|\,n_{\mathbf{b}}\,|^2(1+\cos^2\vartheta)\,b_i b_k g_{ik}^{-1}\cdot do'. \tag{126,7}$$

In tal modo, l'intensità della diffusione diffusa, come si doveva aspettare, è proporzionale al volume del cristallo. La caratteristica singolare di questa diffusione sta nella distribuzione della sua intensità sull'area della macchia. A prescindere dal fattore $(1+\cos^2\vartheta)$ praticamente costante per una macchia assegnata, vediamo che la distribuzione dell'intensità è determinata dall'espressione $g_{ik}^{-1}b_i b_k$. Quest'ultima rappresenta il prodotto di K^{-2} per una funzione assai complicata della direzione del vettore $\mathbf{K}$ relativamente agli assi cristallografici. Per diffusione in prossimità del massimo principale l'intensità della diffusione diffusa è anch'essa massima nel punto $\mathbf{K}=0$ (l'espressione stessa (126,7) diventa infinita per $\mathbf{K}=0$ e, quindi, in questo caso non è più applicabile). Se la condizione (124,15) $2\mathbf{bk}=-b^2$ non è soddisfatta, l'uguaglianza $\mathbf{K}=0$ è impossibile e il massimo dell'intensità della diffusione

[1]) Cfr. V § 111. Se la distribuzione delle probabilità per le grandezze fluttuanti $x_1, x_2, \ldots$ ha la forma

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_{ik}x_i x_k\right\}$$

allora $\langle x_i x_k\rangle=\lambda_{ik}^{-1}$. Il fattore superfluo 2 nella formula (126,6) è dovuto al fatto che ciascuno dei valori complessi u_{0i} rappresenta l'insieme di due grandezze indipendenti.

diffusa si trova per un **K** non nullo e, in generale, non coincide con la posizione del massimo della diffusione strutturale. In ambedue i casi la diffusione diffusa crea uno sfondo la cui intensità decresce in generale come $1/K^2$, cioè in modo molto più lento che l'intensità nella riga più pronunciata della diffusione strutturale che esso circonda.

§ 127. Dipendenza della sezione di diffrazione dalla temperatura

Consideriamo ora la dipendenza dalla temperatura della sezione della diffusione coerente dei raggi X. La questione si riduce alla determinazione della dipendenza dalla temperatura della densità elettronica microscopica nel cristallo la cui media è stata calcolata tenendo conto del moto termico degli atomi.

Supponiamo gli atomi sufficientemente pesanti in modo che la maggioranza dei loro elettroni è localizzata nei gusci non sovrapposti mutuamente che soltanto si deformano debolmente per oscillazioni del reticolo. Supporremo anche che il reticolo sia composto di atomi di una medesima specie, uno in ciascuna cella elementare; sottolineiamo che quest'ultima ipotesi non ha importanza di principio ed è avanzata soprattutto per rendere più facile la scrittura delle formule.

Allora si può rappresentare la densità elettronica microscopica precisa (e non la sua media) nella forma

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} F(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{n}}) = \sum_{\mathbf{n}} F(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\mathbf{n}0} - \mathbf{u}_{\mathbf{n}}), \qquad (127,1)$$

ove $F(\mathbf{r})$ è la densità degli elettroni in un atomo separato (*fattore di forma atomico*); la sommatoria è estesa a tutti gli atomi nel reticolo, $\mathbf{r}_{\mathbf{n}}$ sono raggi vettori dei nuclei atomici enumerati mediante l'indice vettoriale $\mathbf{n}$ (di componenti numeriche intere). Indichiamo i raggi vettori delle posizioni d'equilibrio dei nuclei (cioè dei nodi del reticolo) con $\mathbf{r}_{\mathbf{n}0}$ e i vettori di spostamenti degli atomi da queste posizioni con $\mathbf{u}_n$. Abbiamo così $\mathbf{r}_{\mathbf{n}} = \mathbf{r}_{\mathbf{n}0} + \mathbf{u}_{\mathbf{n}}$, ciò che è stato utilizzato nell'ultima uguaglianza (127,1).

Sviluppando la densità (127,1) nella serie di Fourier (124,12) nel volume V del reticolo, rappresentiamo i coefficienti di sviluppo nella forma

$$n_{\mathbf{b}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{n}} e^{-i(\mathbf{r}_{\mathbf{n}0} + \mathbf{u}_{\mathbf{n}})\mathbf{b}} F_{\mathbf{b}},$$

ove

$$F^{\mathbf{b}} = \int F(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{b}\mathbf{r}}\, dV \qquad (127,2)$$

sono le componenti di Fourier del fattore di forma atomico. Tutti i prodotti $\mathbf{r}_{\mathbf{n}_0}\mathbf{b}$ sono uguali a multipli interi di 2π. Perciò tutti i fattori $\exp(-i\mathbf{r}_{\mathbf{n}_0}\mathbf{b}) = 1$ in modo che

$$n_{\mathbf{b}} = \frac{F_{\mathbf{b}}}{V} \sum_{\mathbf{n}} e^{-i\mathbf{u}_{\mathbf{n}}\mathbf{b}} . \tag{127,3}$$

Calcoliamo la media di questa espressione rispetto al moto degli atomi. È evidente che le medie dei termini della somma sono indipendenti dal numero $\mathbf{n}$. Perciò

$$\langle n_{\mathbf{b}} \rangle = \frac{F_{\mathbf{b}}}{v} \langle e^{-i\mathbf{b}\mathbf{u}} \rangle , \tag{127,4}$$

ove $\mathbf{u}$ è il vettore di spostamento dell'atomo (qualsiasi) e $v = V/N$ il volume della cella elementare (N è il numero di celle nel volume V). La media nella (127,4) si deve intendere come media statistica totale, cioè media rispetto alle funzioni d'onda degli stati stazionari con il successivo calcolo della media secondo la distribuzione di Gibbs.

Per ottenere questa media si deve considerare $\mathbf{u}$ come operatore quantistico

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \left(\frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} \right)^{1/2} \{ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{n}}} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\alpha} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mathbf{n}}} \} \tag{127,5}$$

(cfr. V § 72). La sommatoria è estesa a tutti i valori del vettore d'onda $\mathbf{k}$ dei fononi (nel volume V) e a tutte le loro polarizzazioni indipendenti enumerate mediante l'indice $\alpha = 1, 2, 3$; $\omega_\alpha(\mathbf{k})$ sono le frequenze fononiche, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ i vettori di polarizzazione dei fononi e M la massa dell'atomo. Gli operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ e $\hat{c}^{+}_{\mathbf{k}\alpha}$ sono operatori di annichilazione e di nascita dei fononi negli stati $\mathbf{k}\alpha$.

Per gli operatori della forma (127,5) si verifica il teorema di Wick secondo il quale la media del prodotto di ogni numero pari di operatori è uguale alla somma di tutti i prodotti possibili delle coppie di medie (mentre la media del prodotto di numero dispari di operatori è nulla) [1]. Qui è essenziale l'uguaglianza

$$\langle e^{\hat{L}} \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \langle \hat{L}^2 \rangle \right) , \tag{127,6}$$

che si verifica per ogni operatore $\hat{L}$ soddisfacente a questo teorema; questa affermazione è facile provare sviluppando $\exp \hat{L}$ in serie e calcolando la media di ciascun termine dello sviluppo [2].

---

[1]) Il teorema si dimostra nel « limite macroscopico » ($N \to \infty$) corrispondente alla sua applicazione in statistica, cfr. IX § 13.

[2]) Il prodotto del numero pari $2n$ di fattori $\hat{L}$ si può decomporre in coppie con $(2n-1)(2n-3) \ldots 1$ modi (considerando uno dei $2n$ fattori si può

Applicando la formula (127,6) all'espressione (127,4) otteniamo

$$\langle n_{\mathbf{b}}\rangle = \frac{F_{\mathbf{b}}}{v} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle(\mathbf{bu})^2\rangle\right\}.$$

La sezione di diffrazione è proporzionale al quadrato di questa grandezza e perciò la sua dipendenza dalla temperatura si separa sotto la forma del fattore

$$D = \exp\{-\langle(\mathbf{bu})^2\rangle\}. \tag{127,7}$$

Esso si chiama *fattore di Debye-Waller* (*P. Debye*, 1912; *I. Waller*, 1925).

Resta da calcolare la media quadratica $\langle(\mathbf{bu})^2\rangle$. Fra tutti i prodotti di coppie di operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}, \hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}$ hanno le medie non nulle i soli prodotti

$$\langle\hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \langle\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha}+1,$$

ove $N_{\mathbf{k}\alpha}$ sono le medie di occupazione degli stati fononici in equilibrio. Perciò

$$\langle(\mathbf{bu})^2\rangle = \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} |\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{b}|^2 \langle\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha} + \hat{c}^+_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\rangle =$$

$$= \sum_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\hbar}{MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} |\mathbf{b}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}|^2 \left(N_{\mathbf{k}\alpha}+\frac{1}{2}\right).$$

In questo caso i numeri $N_{\mathbf{k}\alpha}$ sono dati dalla distribuzione di Bose

$$N_{\mathbf{k}\alpha} = \left[\exp\frac{\hbar\omega_\alpha(\mathbf{k})}{T} - 1\right]^{-1}. \tag{127,8}$$

Per la sostituzione nella (127,7) il termine con oscillazioni nulle dà un fattore indipendente dalla temperatura che si deve omettere (più precisamente, inserire nella definizione di $F_{\mathbf{b}}$). Infine, passando dalla sommatoria estesa a $\mathbf{k}$ all'integrazione rispetto a $V\,d^3k/(2\pi)^3$, otteniamo infine

$$D = \exp\left\{-\frac{\hbar v}{M}\sum_\alpha \int \frac{|\mathbf{b}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}|^2}{\omega_\alpha(\mathbf{k})} N_{\mathbf{k}\alpha} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right\}. \tag{127,9}$$

Per $T \to 0$ la funzione $N_{\mathbf{k}\alpha}$ si annulla e, rispettivamente, D si riduce a 1; all'aumentare della temperatura D decresce. Notiamo che l'influenza della temperatura si riduce alla diminuzione generale

---

« accoppiarlo » con ciascuno dei $2n-1$ fattori restanti: considerando ogni volta uno dei restanti $2n-2$ operatori si può accoppiarlo con $2n-3$ modi, ecc.). Perciò

$$\langle\hat{L}^{2n}\rangle = [(2n-1)(2n-3)\ldots 1]\langle\hat{L}^2\rangle^n.$$

dell'intensità della riga di diffusione senza cambiamento della sua forma (e anche della sua larghezza).

Lo spostamento termico medio degli atomi dai nodi del reticolo cristallino di solito (anche ad alte temperature) è piccolo rispetto alla costante del reticolo. Allora l'indice dell'esponente in D per le righe di diffusione con piccoli $\mathbf{b}$ è esiguo rispetto all'unità e l'effetto di temperatura rappresenta una piccola correzione. La depressione dell'intensità diviene tuttavia notevole per le righe di diffusione corrispondenti a $\mathbf{b}$ più grandi.

Ad alte temperature (rispetto alla temperatura di Debye) la media quadratica $\langle \mathbf{u}^2 \rangle \backsim T$ e con essa è proporzionale a T l'indice dell'esponente in D. Alle basse temperature i fononi termici appartengono soprattutto ai rami acustici dello spettro per i quali la frequenza $\omega \backsim k$; l'integrazione rispetto a ω nella formula (127,9) può essere estesa in questo caso a ∞ e l'indice dell'esponente è proporzionale a T^2.

È da notare, infine, che alle basse temperature, quando sono essenziali i soli fononi di onde lunghe, per la verifica delle formule (127,7-9) non è necessaria la possibilità di rappresentare la densità n (r) nella forma della somma di atomi (127,1): per oscillazioni d'onda lunga grandi tratti del reticolo si spostano come un tutt'uno con loro valori della densità elettronica, ciò che ha importanza per la deduzione delle formule suindicate.

Appendice

COORDINATE CURVILINEE

A titolo di informazione diamo più avanti alcune formule riferite alle operazioni vettoriali in coordinate curvilinee nel caso generale e in qualche caso particolare.

In un sistema ortogonale qualsiasi di coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3 il quadrato dell'elemento di lunghezza ha la forma

$$dl^2 = h_1^2\, du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2\, du_3^2,$$

ove h_i sono funzioni delle coordinate. L'elemento di volume nelle stesse coordinate è

$$dV = h_1 h_2 h_3\, du_1\, du_2\, du_3.$$

Diverse operazioni vettoriali si esprimono mediante le funzioni h_i secondo le formule che seguono. Le operazioni vettoriali con scalare:

$$(\text{grad}\, f)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i},$$

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right),$$

ove la sommatoria è estesa alle permutazioni circolari degli indici 1, 2, 3. Le operazioni vettoriali con vettore:

$$\text{div}\, \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum \frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1),$$

$$(\text{rot}\, \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 A_2)\right]$$

(le altre componenti di rot **A** si ottengono mediante la permutazione circolare degli indici).

Coordinate cilindriche r, φ, z. L'elemento di lunghezza:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

$$h_r = 1,\ h_\varphi = r,\ h_z = 1.$$

Le operazioni vettoriali:

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\text{div}\, \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$(\text{rot}\, \mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\quad (\text{rot}\, \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \quad (\Delta \mathbf{A})_z = \Delta A_z.$$

Nelle espressioni per le componenti del vettore $\Delta \mathbf{A}$ con ΔA_i si intende il risultato dell'azione dell'operatore Δ sulla grandezza A_i supposta, in questo caso, come scalare.

Coordinate sferiche r, θ, φ. L'elemento di lunghezza:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, d\varphi^2,$$

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \operatorname{sen}\theta.$$

Le operazioni vettoriali:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right],$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi),$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta - \right)\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right],$$

$$(\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \operatorname{cotg}\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \operatorname{sen}\theta}\right].$$

INDICE ANALITICO [1]

Abraham, forza di, 382, 408
Ala della riga di Rayleigh, 614
Alfvén, discontinuità di, 354
— —, dilatazione, 358
—,onde di, 346
— —, assorbimento, 350
—,velocità di, 346
Allungamento di un filo anulare sotto azione del campo magnetico della corrente passante attraverso il filo, 189
Altezza del livello di un liquido in un condensatore, 78
Angolo della polarizzazione totale, 432
— limite della riflessione totale, 433
Asse facile, piano facile, 211
— ottico, 491, 497
— — circolare, 501
— — dei raggi, 497
— — singolare, 501
Assi dielettrici principali, 486
Assorbimento bifotonico, 537
Attraversamento normale, 444
— obliquo, 444
Autocanalizzazione, 548
Autofrequenze di due contorni legati, 318-320
— in una cavità risonante rettangolare, 455
— — —, per collocamento di una sferetta, 456
— — —, per piccolo cambiamento della permettività dielettrica, 457
— in un risonatore sferico, 456

Barnett, effetto, 196
Binormale, 497
Biot-Savart, legge di, 169
Birifrangenza, 494, 507, 526
Bragg, metodo di, 637
Bragg-Wulf, equazione di, 632
Brewster, angolo di, 432

Cambiamento del segno del tempo, 198
Campo di depolarizzazione 68
— di pompaggio, 402, 562
— elettrostatico creato nel vuoto di una sfera piroelettrica, 90
— — di un cilindro conduttore in un campo esterno, 31
— — di un cilindro vuoto dielettrico, 70
— — di un disco conduttore carico, 45
— — di un ellissoide in un campo esterno, 47

[1] Questo indice analitico completa, senza però ripeterlo, l'indice generale del libro. Esso contiene i termini, i concetti e i problemi che non compaiono nell'indice generale.

Campo di di una lamina anisotropa in un campo esterno, 91
— — di un piano conduttore con una fessura retta 49
— — — — con un foro circolare, 48
— — di una sfera conduttrice in un campo esterno, 30
— — di una sfera vuota dielettrica, 70
— — in prossimità dello spigolo di un cuneo conduttore, 31 — — —
— — di una punta conica su una superficie conduttrice, 32
— magnetico creato dalla corrente circolare, 171
— — — dalla corrente lineare chiusa, 171
— — di un foro cilindrico, 172
— — generato dalla corrente lineare in un mezzo anisotropo, 173
— piano, 27
Capicità, 16
— di un anello, 22
— di un condensatore tenendo conto degli effetti di bordo, 36
— di un segmento conduttore sferico, 36
— di una sfera conduttrice immersa in un mezzo anisotropo, 91
— reciproca di due cilindri, 33
— — di due conduttori, 20
— termica di un ellissoide nello stato intermedio, 287
Capovolgimento dei sottoreticoli, 252
Carica che descrive un contorno al variare del flusso magnetico, 351
— che passa attraverso un anello per fermata della rotazione, 329
Cariche estranee, 60, 99, 107, 378
Classi cristalline magnetiche, 200, 202
Coefficiente di assorbimento, 418
— di autoinduzione, 181
— di depolarizzazione, 43
— di elettroconducibilità, 135
— di estinzione, 602
— di induzione, 181
— — di un filo chiuso, 187
— — — doppio, 189
— — di un solenoide cilindrico, 190
— — — toroidale, 190
— di riflessione, 430
— — di una lamina, 435
— — in prossimità dell'angolo di riflessione totale, 435
— — per incidenza scivolante della luce, 435
— di indebolimento del campo, 305
Coefficienti cinetici, 138
— giromagnetici, 197
Compton-Muton, effetto, 508
Condizione di sincronismo, 552, 564
Condizioni di frontiera dei corpi magnetici, 163, 164
— — dei dielettrici, 60
— — dei domini, 236
— — di un corpo in moto, 386
— — di Leontovič, 438
— — nei superconduttori, 270, 281
« Congelamento » delle linee magnetiche di forza, 334, 370
Cono di Čerenkov, 582
Coordinate ellissoidali, 37
— sferoidali, 39
Corpi antiferromagnetici, 199, 249
— ferromagnetici, 199, 257

Corpi piroelettrici, 88
Correnti a densità distribuita in modo azimutale e lungo il meridiano, 343
— di spostamento, 379
— estranee, 378, 449
— lineari, 169
Costanti otticoelastiche, 513
Cristalli biassici, 87
— negativi, 492
— nematici liquidi, 111, 623
— positivi, 492
— uniassici, 82

Debye-Scherrer, metodo di, 638
Debye-Waller, fattore di, 644
Densità di corrente di conducibilità, 165
— di corrente elettrica, 135
Dielettrici, 12, 58
Diffrazione su una fessura, 478
— su un foro circolare, 479
— su uno schermo, 478
Diffusione antistokes, 592, 602
— combinatoria, 613
— — forzata, 562, 603
— Stokes, 591, 602
— di tipo scalare, simmetrico e antisimmetrico, 597
— su molecole della forma lineare, 619
— su particelle anisotrope, 468
— su una sferetta che gode di ε grande, 469
Dipendenza di polarizzazione della diffusione tenendo conto dell'impulso trasmesso, 610
Direttore di un cristallo fluido, 111, 621
Direzione di magnetizzazione leggera 211
Discontinuità di contatto, 353
— rotatorie, 354
Dissipazione di energia in dielettrici, 401, 483
— — mediante un sistema di elettrodi immersi in un mezzo conduttore, 138
— — minima in un mezzo conduttore, 139
Distribuzione delle cariche su un disco circolare in un campo esterno, 46
— — su una sbarra cilindrica conduttrice, 35
— — sulla superficie di un ellissoide conduttore sito in un campo esterno, 46
— — su una superficie con convessità che ha una forma semisferica, 34
Distensione di un cristallo ferromagnetico a seconda della direzione della magnetizzazione, 222
Disuguaglianze termodinamiche, 120
Dominio di fluttuazione, 208, 214, 243
— di magnetizzazione spontanea, 217
— di trasparenza, 402, 420
— polaritonico dello spettro, 532
Domini, 217
— dei corpi ferroelettrici, 127
— —, la regione di esistenza, 217
— di chiusura, 233
Dzjaloŝinskij, campo di, 261

Eccitoni, 532
Effetto elettrocalorifico in un dielettrico, 85
Effetto Ettingshausen, 156
Einstein-de Haas, effetto, 196
Ellissoide tensoriale, 88
Emissione stimolata, 592

Energia d'attrazione di un dipolo da una superficie piana conduttrice, 33
— — dei domini pianoparalleli, 236
— libera totale del corpo in un mezzo dielettrico, 82
— magnetoelastica, 219
— magnetostatica, 238
— d'emersione dei domini, 237
Equazione del telegrafista, 464

Faraday, effetto, 508
—,— inverso, 510
— legge di, 322
Fattore di forma atomico, 642
Fermat, principio di, 425
Fizeau, effetto, 428
Fluttuazioni dell'anisotropia, 613
Forma dispersiva di una riga, 618
Forme enantiomorfe, 526
Forza agente su un filo di corrente collocato in un mezzo magnetico, 193
— degli oscillatori, 413
— dell'immagine, 23
— di mutua repulsione dei conduttori, 54
— — — fra due semisfere, 54
— elettromotrice, 146
— — di un « elemento di concentrazione », 160
Forze in un dielettrico solido contenente cariche estranee, 107
— ponderomotrici, 95
Foucault, correnti di, 297
Frequenze combinatorie, 535
Fresnel, ellissoide di, 490
—, equazione di, 486
— formule di, 430

Girotropia naturale, 528
Gruppi spaziali, 200

Hall, costante di, 142
—, effetto, 141
Hartmann, numero di, 339

Iconale, 424, 487
Impedenza, 310
— superficiale, 300, 438
— — tenendo conto dell'effetto termoelettrico, 305
Indice critico intermedio, 256
Indici critici, 244, 245, 621
— di rifrazione, 417, 418
Induzione di una sferetta magnetizzata uniformemente, 325
— elettrica, 60
— magnetica, 161
— unipolare, 324
Intensità del campo elettrico, 12
— del campo magnetico, 162
Interazione di scambio, 207
— relativistica, 207, 265
Invariante adiabatica, 407
Ipotesi dell'invarianza di scala, 245, 257
Irraggiamento da una sferetta assorbente, 471
— da una superficie con piccola impedenza, 443
Isteresi, 215

Joule-Lenz, legge di, 135, 141

Kerr, effetto, 502
Kramers-Kronig, formule di, 412

Landau-Placzek, formula di, 517
Laue, equazione di, 632
—,metodo di, 636
Lavoro d'uscita, 143
Leduc-Righi, effetto, 156
Legame del tensore di conducibilità inverso con quello diretto nel campo magnetico, 142
— non locale, 517

Macchia di diffrazione 632
— — attorno al massimo principale, 634
— — attorno a un massimo ausiliare, 635
Magnetizzazione, 162
— di un corpo policristallino, 217
Magnetostrizione lineare, 263
Mandelstam-Brillouin, doppietto, di, 616, 624
Manley-Rowe, teorema di, 510
Matrice di impedenza, 314
Maxwell, effetto, 515
Metodo delle immagini, 23
— dell'inversione, 25
— delle polveri, 639
Mezzo defocalizzante, 545
— focalizzante, 545
— girotropo, 504
Mezzi otticamente più (meno) densi, 433
Micromagnetismo, 237
Momento di dipolo, 35, 59
— delle forze agenti su un ellissoide dielettrico, 69
— — — su una sfera dielettrica anisotropa, 91
— di quadrupolo elettrico di un ellissoide carico, 45
— elettrico, 59
— magnetico di un disco superconduttore, 275
— — di una sfera conduttrice che ruota uniformemente nel campo magnetico, 324
— — di una sfera che ruota non uniformemente, 328

Nernst, effetto, 156

Ohm, legge di, 135
—, — per un conduttore in moto, 320
Onda d'inclusione, 369
— d'urto elettromagnetica, 560
— — lenta, 366
— — parallela, 367
— — —, evoluzione, 368
— — rapida, 366
— principale, 461
— superficiale sulla frontiera di due dielettrici, 449
— — perpendicolare, 361
Onde longitudinali del tipo elettrico (onde E) e del tipo magnetico (onde H), 422, 445, 458, 529
— magnetoacustiche, 347
— ordinarie, 492
— piane eterogenee, 416
— — — a sezione rettangolare, 465
— propagantisi lungo una guida d'onda a sezione circolare, 465
— straordinarie, 493, 500
— superficiali di un cristallo piezoelettrico, 116
— trasversali elettriche e magnetiche, 458
Onsager, principio di, 137
Oscillazioni magnetoacustiche, 396

Parete di dominio in cristalli cubici, 227-231

Peltier, effetto, 153
Permeabilità magnetica, 166
Permettività dielettrica, 61
— — longitudinale e trasversale, 521
— —, legame con ε e μ, 521
Pinch plasmico, 341, 342
Polarizzabilità elettrica, 470
— magnetica, 302, 470
— — di un cilindro conduttore, 304
— — di una sfera conduttrice nel campo magnetico, 302
Polarizzazione dielettrica, 58
Potenziale chimico, 77
— complesso, 27
— d'uscita, 143
Principio di simmetria dei coefficienti cinetici, 137, 151
— — — — generalizzato, 482, 519
Profondità di penetrazione nei superconduttori, 269, 297, 440
— — per riflessione da un corpo girotropo, 511
Punto di Curie, 206
— — antiferromagnetico, 249
— di riflessione, 445

Radiazione di dipolo in un mezzo con ε e μ, 451
— per moto di una particella nel mezzo che diffonde la luce, 611
Rafforzamento parametrico, 557
Regola delle somme, 413
Reticolo di Bravais, 205
Reynolds, numero magnetico di, 337
Rifrazione della luce sulla superficie di un corpo isotropo, 516
— — — del cristallo uniassico, 494
Riga non spostata, 613
Risonanza ferromagnetica non uniforme, 396
— — uniforme, 397
— — di un ellissoide, 398
— — di una lamina pianoparalella, 399

Sezione efficace di diffusione, 466
Somma delle velocità di propagazione, 427
Stabilità di una goccia sferica carica, 57
Stato misto, 285
Stewart-Tolman, effetto, 326
Strato doppio, 144, 148
Stringa di plasma, 341
Struttura del fronte d'onda nell'l'interno di un dielettrico dispersivo, 422
— magnetica, 198
Strutture incommensurabili, 267
Superconduttori di prima e di seconda specie, 269, 276, 285, 286
Superficie degli indici, 486
— delle normali, 486
— dei vettori d'onda, 486
— radiale, 487
— magnetiche, 341
Suscettività generalizzata, 302, 481, 519
— magnetica, 163
— non lineare, 538

Tempo di rilassamento di Maxwell, 618
Tensore di conducibilità, 137
— di deformazione, 101
— dielettrico, 86

Tensore di impedenza superficiale, 483
— magnetoelettrico, 263, 264
— di permettività dielettrica, 86, 482
— — magnetica, 482
— piezoelettrico, 109, 263
— piezomagnetico, 263
—, proprietà di simmetria, 112-117
— degli sforzi, 50, 95, 102, 192
Teorema di reciprocità per i radiatori di quadrupolo e di dipolo magnetici, 451
Thomson, effetto, 153
—, formula di, 307
—,relazione di, 154
Transizione superconduttrice, 268
Trasformazione conforme, 29

Valori medi delle espressioni quadratiche, 300
Variazione del calore specifico di una lamina dielettrica in un campo esterno, 85
— della capacità di un condensatore per collocamento di una sferetta dielettrica, 86
— della forma di una sfera dielettrica in un campo esterno, 106
— del volume e l'effetto elettrocalorifico per un ellissoide dielettrico in un campo esterno, 84
— del volume e della forma di una sfera conduttrice sita in un campo esterno, 55
— del volume di un ellissoide ferromagnetico in un campo esterno, 222
Velocità di gruppo, 426
— di propagazione della luce in un mezzo in moto, 427
— di fase, 426
Vettore di attività ottica, 504
— di girazione, 504
— di Poynting in un mezzo girotropo, 510
— — in un mezzo con dispersione spaziale, 521

Young, modulo di, 115

Zemplen, teorema di, 360